

## 0.1 Extremwertaufgaben

**Definition 0.1** (lokales Maximum/Minimum). Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Ein Punkt  $x \in D$  heißt lokales Minimum (Maximum) von  $f$ , falls eine Umgebung  $K_\delta(x) \subset \mathbb{R}^n$  existiert mit

$$f(x) \leq f(y), \forall y \in K_\delta(x) \cap D$$

( $f(x) \geq f(y), \forall y \in K_\delta(x) \cap D$ ). Falls

$$f(x) < f(y), \forall y \in K_\delta(x) \cap D \setminus \{x\}$$

( $f(x) > f(y)$ ), dann heißt  $x$  striktes lokales Minimum (Maximum).

**Satz 0.2** (Notwendige Bedingung für lokales Extremum (Min oder Max)). Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $x \in D$  ein lokales Extremum von  $f$ . Dann gilt :  $\nabla f(x) = 0$ .

*Beweis.* Für  $i = 1, \dots, n$ , betrachte  $g_i(t) := f(x + te_i)$ . Da  $D$  offen ist, sind alle  $g_i$  auf einem Intervall  $(-\delta, \delta)$ ,  $\delta > 0$  wohldefiniert und differenzierbar.  $g_i(t)$  hat in  $t = 0$  ein lokales Minimum/-Maximum, also gilt  $\forall i = 1, \dots, n$

$$\left. \frac{dg_i(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Aufgrund der totalen Differenzierbarkeit von  $f$  folgt

$$0 = \left. \frac{dg_i(t)}{dt} \right|_{t=0} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \delta_{ij} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

□

**Bemerkung 0.3.** Die Umkehrung ist falsch, z.B.  $f(x) = x^3$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , hat in  $x = 0$   $\nabla f(x) = 0$ , aber  $x = 0$  ist kein Max/Min von  $f(x) = x^3$ .

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$  hat in  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   $\nabla f(x) = 0$ , aber  $x = 0$  ist kein Max/Min von  $f$ .

**Satz 0.4** (Hinreichende Bedingung für lokales Extremum). Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$  und  $x \in D$  mit  $\nabla f(x) = 0$ . Dann gilt:

1.  $H_f(x)$  positiv definit  $\implies x$  striktes lokales Minimum von  $f$ .
2.  $H_f(x)$  negativ definit  $\implies x$  striktes lokales Maximum von  $f$ .
3.  $H_f(x)$  indefinit  $\implies x$  kein lokales Extremum.

*Beweis.* Nach Taylor gilt lokal um  $x$ :

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2}(H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x, h)$$

mit  $\frac{\omega_2(x, h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$

1. Sei  $H_f(x)$  positiv definit. Betrachte  $\min_{\|h\|=1} (H_f(x)h, h)_2$ . Die Menge  $\{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$  ist kompakt  $\implies (H_f(x)h, h)_2$  nimmt ihr Minimum auf  $\{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$  als stetige Funktion an.  $\implies \alpha := \min_{\|h\|=1} (H_f(x)h, h)_2 > 0$ , da  $H_f(x)$  positiv definit ist. Sei  $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  beliebig. Dann gilt

$$(H_f(x)h, h)_2 = \|h\|^2 \underbrace{\left( H_f(x) \cdot \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} \right)_2}_{\geq \alpha} \geq \alpha \|h\|^2 > 0$$

Wähle  $\delta > 0$  klein, sodass  $\forall \|h\| < \delta$  gilt  $|\omega_2(x, h)| \leq \frac{\alpha}{4} \|h\|^2$  (weil  $\omega_2(x, h) = o(\|h\|^2)$ ).  
Damit gilt  $\forall h, \|h\| < \delta$

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{(\nabla f(x), h)_2}_{=0} + \frac{1}{2} (H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x, h) \geq f(x) + \frac{\alpha}{2} \|h\|^2 - \frac{\alpha}{4} \|h\|^2 > f(x)$$

$\implies x$  striktes lokales Minimum von  $f$ .

2. Ersetze  $f$  durch  $-f$ , dann 1)  
3.  $\exists h \in \mathbb{R}^n$  mit  $(H_f(x)h, h)_2 = \alpha > 0$ , sodass

$$f(x+th) \stackrel{\text{Taylor}}{=} f(x) + \frac{1}{2} t^2 \cdot \alpha + \omega_2(x, th) = f(x) + t^2 \left( \frac{\alpha}{2} + \underbrace{\frac{\omega_2(x, th)}{t^2}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0} \right) \text{ für } \begin{matrix} 0 < t \ll 1 \\ > \end{matrix} f(x)$$

Außerdem  $\exists \eta \in \mathbb{R}^n$  mit  $(H_f(x)\eta, \eta)_2 = \beta < 0$ . Analog  $\implies f(x+t\eta) \leq f(x) + \beta \frac{t^2}{4} < f(x)$   
für  $0 < t \ll 1$ .  $\implies f(x)$  kein Maximum/Minimum.

□

**Beispiel 0.5.** 1.  $f(x, y) := x^2 + 2y^2 \implies \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} = 0$  für  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  positiv definit.  $\implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  striktes lokales Minimum (sogar global).

$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in D$  globales Minimum  
 $f(x) < f(y) \quad \forall y \in D \setminus \{x\}$  striktes globales Minimum

2.  $f(x, y) := x^2 - y^2 \implies \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = 0$  für  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$   
indefinit.  $\implies 0 \in \mathbb{R}^2$  kein lokales Extremum.

3.  $f_1(x, y) := x^2 + y^4$ ,  $f_2(x, y) := x^2$ ,  $f_3(x, y) := x^2 + y^3$  Es gilt

$$\nabla f_i(0) = 0 \in \mathbb{R}^2, H_{f_i}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \forall i = 1, 2, 3$$

Die Hesse-Matrix ist positiv semidefinit. Es gilt

für  $f_1$ : Punkt 0 ist ein striktes lokales Maximum,  
für  $f_2$ : Punkt 0 ist ein lokales Minimum, aber nicht strikt,  
für  $f_3$ : Punkt 0 ist ein Sattelpunkt.

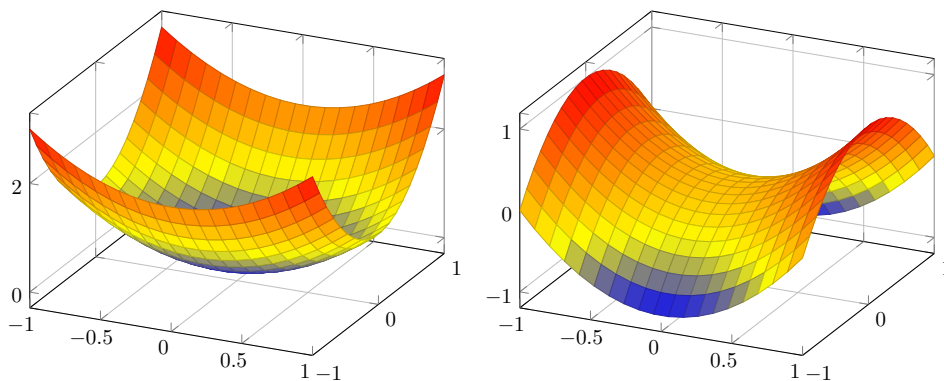


Abbildung 1: Links:  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  ist ein Paraboloid, Rechts:  $f(x, y) = x^2 - y^2$  ist eine Sattelfläche

## 0.2 Implizite Funktionen und Umkehrabbildung.

Frage: Umkehrabbildung: Auflösen von  $x = g(y)$ , d.h.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, \dots, y_n) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = x_1 - g_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ 0 = x_n - g_n(y_1, \dots, y_n) \end{array} \right\} \quad (*)$$

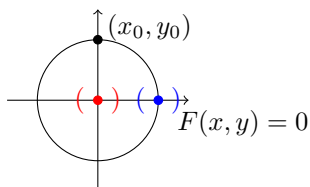
$n$  Gleichungen,  $n$  Unbekannte  $y_1, \dots, y_n$ . Gesucht: Abbildung  $f$  mit  $y = f(x)$  ( $f = g^{-1}$ ), s.d.  $(x, f(x))$  Gleichung  $(*)$  löst (lokal um  $(x_0, y_0 = f(x_0))$ ).

**Implizite Funktion**  $m$  Gleichungen,  $m$  Unbekannte  $y_1, \dots, y_m$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ 0 = F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{array} \right\} \quad (**)$$

$0 = F(x, y)$  Auflösen nach  $y$ , d.h. Gesucht: Abbildung  $f$ , s.d.  $y = f(x)$  mit  $(x, f(x))$  löst  $(**)$  (lokal um eine Lösung  $(x_0, y_0) : F(x_0, y_0) = 0$ )

**Beispiel 0.6.**  $m = 1, n = 1, F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$



An der Stelle  $x_0 = 0, y_0 = 1$  gilt  $F(0, 1) = 0$ ,  
also  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$ .

$$\Rightarrow \underline{f(x) := \sqrt{1 - x^2}} \text{ für } |x| < 1$$

erfüllt  $F(x, f(x)) = 0, |x| < 1$ .

Für  $x_0 = 1, y_0 = 0$  hingegen gibt es keine Umgebung von  $x_0 = 1$ , sodass

$$\underline{\exists f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } F(x, f(x)) = 0.}$$

**Satz 0.7** (Satz über implizite Funktionen). Sei  $D^x \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $D^y \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $F^1 \in C^1(D^x \times D^y, \mathbb{R}^m)$  (stetig differenzierbar) und  $(\hat{x}, \hat{y}) \in D^x \times D^y$  mit  $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ . Die  $m \times m$  Matrix

$$D_y F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

sei im Punkt  $(\hat{x}, \hat{y})$  invertierbar. Dann gilt:

1.  $\exists$  offene Umgebungen  $U(\hat{x}) \subset D^x$ ,  $U(\hat{y}) \subset D^y$  um  $\hat{x}$  und  $\hat{y}$  und  $\exists$  eine stetige Funktion  $f: U(\hat{x}) \rightarrow U(\hat{y})$ , s.d.

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U(\hat{x})$$

2.  $f$  ist eindeutig bestimmt, d.h.  $F(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in U(\hat{x}) \times U(\hat{y}) \Leftrightarrow y = f(x)$
3.  $f$  ist in  $\hat{x}$  stetig differenzierbar und  $J_f(\hat{x}) = D_x f(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist

$$D_x f(\hat{x}) = -(D_y F(\hat{x}, \hat{y}))^{-1} D_x F(\hat{x}, \hat{y}).$$

*Beweis.* 1. O.B.d.A. sei  $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$  (sonst betrachte  $F(x, y) - F(\hat{x}, \hat{y})$ ). Die Matrix  $J_y := D_y F(0, 0)$  ist regulär. Definiere  $G: D^x \times D^y \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $G(x, y) := y - J_y^{-1} F(x, y)$ .  $G$  ist stetig differenzierbar und erfüllt:  $G(0, 0) = 0$  und  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow G(x, y) = y$ . Jacobi-Matrix von  $G(x, y)$  bzgl.  $y$ :

$$D_y G(x, y) = \mathbb{I} - J_y^{-1} D_y F(x, y) \text{ und insb. } D_y G(0, 0) = \mathbb{I} - J_y^{-1} J_y = 0.$$

$F$  stetig differenzierbar  $\implies D_y G(x, y)$  stetig  $\implies \exists K_r^x(0) \times K_r^y(0) \subset D^x \times D^y$  mit Radius  $r$ , sodass  $\|D_y G(x, y)\|_2 \leq \frac{1}{2}$ ,  $(x, y) \in K_r^x(0) \times K_r^y(0)$ .  $G(0, 0) = 0 \implies \exists K_s^x(0) \subset K_r^x(0)$  mit Radius  $0 < s \leq r$  sodass

$$\|G(x, 0)\|_2 \leq \frac{1}{2}r, \quad x \in K_s^x(0)$$

Ziel: Konstruiere  $f: K_s^x(0) \rightarrow K_r^y(0)$  stetig mit  $G(x, f(x)) = f(x)$  ( $\Leftrightarrow F(x, f(x)) = 0$ ). Betrachte Fixpunktgleichung

$$G(x, y) = y, \quad x \in K_s^x(0).$$

Für  $(x, y_1), (x, y_2) \in K_s^x(0) \times K_r^y(0)$  gilt

$$\|G(x, y_1) - G(x, y_2)\|_2 \stackrel{\text{MWS}}{\leq} \sup_{(x, y) \in K_s^x(0) \times K_r^y(0)} \|D_y G(x, y)\|_2 \cdot \|y_1 - y_2\|_2 \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_2.$$

Sei  $y \in \overline{K_r^y(0)}$

$$\|G(x, y)\|_2 \leq \|G(x, y) - G(x, 0)\|_2 + \|G(x, 0)\|_2 \leq \frac{1}{2} \|y\|_2 + \frac{1}{2}r \leq r$$

d.h.  $G(x, \cdot)$  ist eine Selbstabbildung der abgeschlossenen Kugel  $\overline{K_r^y(0)}$ .

Außerdem,  $\|G(x, y_1) - G(x, y_2)\|_2 \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_2 \implies G(x, \cdot)$  ist eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante  $L = \frac{1}{2}$ . Aus dem Banachschen Fixpunktsatz (??) folgt  $\forall x \in K_s^x(0) \exists!$  ein Fixpunkt  $y(x) \in K_r^y(0)$  von  $G(x, \cdot)$ :

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)}(x), \quad y^{(k)}(x) = G(x, y^{(k-1)}(x)), \quad k \in \mathbb{N}$$

mit Startpunkt  $y^{(0)}(x) := 0$ . Es gilt die Fehlerabschätzung  $\forall x \in K_s^x(0)$ :

$$\|y(x) - y^{(k)}(x)\|_2 \leq 2^{-k} \|y^1(x) - y^{(0)}(x)\|_2 = 2^{-k} \|G(x, 0) - 0\|_2 \leq 2^{-k} \frac{1}{2} r$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$y^{(k)}(x) = G(x, y^{(k-1)}(x)) = y^{(k-1)}(x) - \underbrace{J_y^{-1} F(x, y^{(k-1)}(x))}_{\text{stetig}}$$

Induktiv folgt  $y^{(k)}(x)$  stetig in  $x \in K_s^x(0)$ . Definiere  $f(x) = y(x)$ ,  $f: K_s^x(0) \rightarrow K_r^y(0)$  und nach Konstruktion gilt

$$G(x, f(x)) = f(x), \quad x \in K_s^x(0).$$

Aus der Abschätzung  $\|y(x) - y^{(k)}(x)\| \leq 2^{-k-1} \cdot r$ ,  $x \in K_s^x(0)$  folgt, dass  $y^{(k)}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y(x)$  gleichmäßig auf  $K_s^x(0)$  konvergiert  $\implies y(x)$  stetig.  $\implies$  1. Behauptung für  $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$  mit  $U(\hat{x}) := K_s^x(0)$  und  $U(\hat{y}) := K_r^y(0)$ .

2. Die Eindeutigkeit von  $y = f(x)$  folgt nun aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Für  $x \in K_s(\hat{x})$  ist der Fixpunkt der Gleichung  $G(x, y) = y$  eindeutig bestimmt.
3. Da  $F(x, y)$  in  $(0, 0)$  differenzierbar ist, gilt nach Definition der Differenzierbarkeit

$$F(x, y) = \underbrace{F(0, 0)}_{=0} + D_x F(0, 0) \cdot x + \underbrace{D_y F(0, 0)}_{=J_y} \cdot y + \omega(x, y),$$

wobei  $\omega: K_s^x(0) \times K_r^y(0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Eigenschaft  $\|\omega(x, y)\|_2 = o(\|(x, y)\|_2)$  besitzt. Aus dem Beweis von 1. wissen wir, dass  $F(x, f(x)) = 0$  für  $x \in K_s^x(0)$  gilt. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= F(x, f(x)) = D_x F(0, 0) \cdot x + J_y \cdot f(x) + \omega(x, f(x)) \\ f(x) &= -J_y^{-1} \cdot D_x F(0, 0) \cdot x - \underbrace{J_y^{-1} \cdot \omega(x, f(x))}_{=: \psi(x)} \\ &= -J_y^{-1} D_x F(0, 0) x + \psi(x) \end{aligned}$$

Reminder: Def. Differenzierbarkeit:  $f(0+x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + Df(x) \cdot x + \psi(x)$  mit  $\psi(x) = o(\|x\|_2)$

Es genügt also zu zeigen, dass  $\psi(x) = o(\|x\|_2)$ , d.h.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x)}{\|x\|_2} = 0$ . Wir nutzen  $\omega(x, y) = o(\|(x, y)\|_2)$ , d.h.

$$\frac{\|\omega(x, y)\|_2}{\|(x, y)\|_2} \xrightarrow{\|(x, y)\|_2 \rightarrow 0} 0$$

d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 \in (0, s)$ ,  $\delta_2 \in (0, r)$  sodass  $\forall x$  mit  $\|x\|_2 \leq \delta_1$  und  $\forall y$  mit  $\|y\|_2 \leq \delta_2$  gilt

$$\|\omega(x, y)\|_2 \leq \varepsilon \|(x, y)\|_2 \leq \varepsilon (\|x\|_2 + \|y\|_2)$$

Da  $f$  überdies auch stetig ist (siehe Beweis 1.), gibt es ein  $\delta \in (0, \delta_1)$  sodass  $\forall \|x\|_2 \leq \delta$  gilt  $\|f(x)\|_2 \leq \delta_2$ . Daraus schließen wir für  $x$  mit  $\|x\|_2 \leq \delta$ :

$$\|\omega(x, f(x))\|_2 \leq \varepsilon (\|x\|_2 + \|f(x)\|_2)$$

Dies können wir nun auf  $f(x)$  anwenden.

$$f(x) = -J_y^{-1} D_x F(0, 0) \cdot x + \psi(x)$$

Es gilt  $\psi(x) = -J_y^{-1}\omega(x, f(x))$

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &\leq \underbrace{\|J_y^{-1}D_x F(0, 0)\|_2}_{=:c_1} \cdot \|x\|_2 + \underbrace{\|J_y^{-1}\|_2}_{=:c_2} \cdot \|\omega(x, f(x))\|_2 \\ &\leq c_1 \|x\|_2 + c_2 \|\omega(x, f(x))\|_2\end{aligned}$$

Setzen wir nun  $\varepsilon = \frac{1}{2c_2}$ , so erhalten wir für genügend kleines  $x$

$$\begin{aligned}&\leq c_1 \|x\|_2 + c_2 \cdot \frac{1}{2c_2} (\|x\|_2 + \|f(x)\|_2) \\ &= \left(c_1 + \frac{1}{2}\right) \|x\|_2 + \frac{1}{2} \|f(x)\|_2 \\ \implies \frac{1}{2} \|f(x)\|_2 &\leq \left(c_1 + \frac{1}{2}\right) \|x\|_2\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir also:

$$\|\psi(x)\|_2 \leq \|J_y^{-1}\|_2 \cdot \|\omega(x, f(x))\|_2$$

Für  $\|x\|_2 \leq \delta$  gilt

$$\begin{aligned}&\leq c_2 \cdot \varepsilon (\|x\|_2 + (2c_1 + 1) \|x\|_2) \\ &\leq \varepsilon \cdot c_3 \cdot \|x\|_2\end{aligned}$$

Daraus schließen wir

$$\frac{\|\psi(x)\|_2}{\|x\|_2} \leq \varepsilon \cdot c_3$$

Da  $\varepsilon$  beliebig ist, folgt

$$\begin{aligned}\frac{\|\psi(x)\|_2}{\|x\|_2} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ \implies \frac{\psi(x)}{\|x\|_2} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0\end{aligned}$$

Daraus folgt nun schließlich für das Differential von  $f$  in  $x = 0$

$$D_x f(0) = -J_y^{-1} D_x F(0, 0)$$

Weiter müssen wir noch zeigen, dass  $D_x f(x)$  in  $K_\delta^x(0) \subset K_s^x(0)$  existiert und stetig ist in  $x = 0$ . Da  $D_y F(x, y)$  stetig in  $(0, 0)$  ist, gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass  $\forall (x, y) \in K_s^x(0) \times K_\delta^y(0) \subset K_s^x(0) \times K_r^y(0)$  gilt

$$\|D_y F(0, 0) - D_y F(x, y)\|_2 < \frac{1}{\|D_y F(0, 0)^{-1}\|_2}$$

Nach dem Störungssatz (??) ist also  $D_y F(x, y)$  regulär, also  $\det D_y F(x, y) \neq 0$ . Die Elemente von  $D_y F(x, y)^{-1}$  sind nach der Cramerschen Regel stetige Funktionen der Elemente von  $D_y F(x, y)$ . Daher ist

$$(D_y F(x, y))^{-1} D_x F(x, y)$$

als Produkt stetiger Funktionen stetig und nach Definition der Stetigkeit gilt

$$\|(D_y F(x, y))^{-1} D_x F(x, y) - (D_y F(0, 0))^{-1} D_x F(0, 0)\| \xrightarrow{\|(x, y)\|_2 \rightarrow 0} 0$$

Analog wie oben folgern wir

$$f(x+h) - f(x) = -(D_y F(x, f(x)))^{-1} D_x F(x, f(x)) \cdot h + \omega(x, h), \quad \omega(x, h) = o(\|h\|_2)$$

Die Ableitung  $D_x f(x) = -(D_y F(x, f(x)))^{-1} D_x F(x, f(x))$  von  $f$  ist stetig in  $x = 0$ .

□

**Beispiel 0.8.**  $F(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ . Dann ist  $D_y F(x, y) = 2y$ . Nach dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass  $F(x, y) = 0$  in einer Umgebung von  $(\hat{x}, \hat{y})$  mit  $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 - 1 = 0$ ,  $\hat{y} \neq 0$  (d.h.  $\hat{x} \neq \pm 1$ ) eindeutig durch  $y = \sqrt{1 - x^2}$  oder  $y = -\sqrt{1 - x^2}$  nach  $y$  auflösbar ist.

**Bemerkung 0.9** (Implizites Differenzieren). SIF und  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ ,  $F(x, f(x)) = 0$ . Kettenregel:  $0 = F(x, f(x))$ .

$$0 = \frac{dF}{dx}(x, f(x)) = \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$$

Die zweiten Ableitungen erhält man durch implizites Differenzieren von  $\frac{dF(x, f(x))}{dx} = 0$ .

**Beispiel 0.10.**  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, f(x)) = 0$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f' \quad 1. \text{ Ableitung}$$

$$0 = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f' \right) \quad 2. \text{ Ableitung}$$

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} f' + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} f' \right) f' + \frac{\partial F}{\partial y} f''$$

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} f' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} f'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} f''$$

$$f'' = - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} f' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} f'^2 \right)$$

### 0.2.1 Umkehrabbildungen

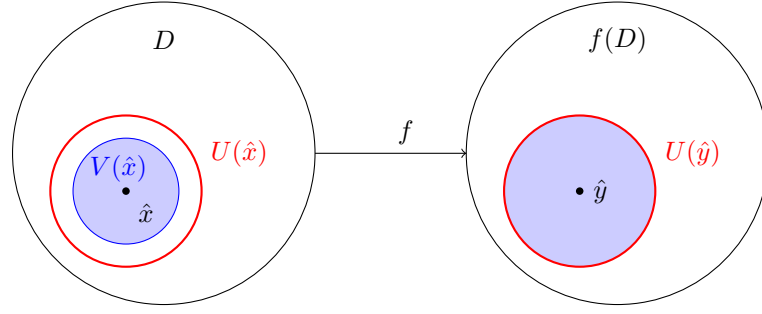
Fragestellung: Sei  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Existiert die Umkehrabbildung  $f^{-1}: B_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ ?

**Definition 0.11.** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Abbildung  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt regulär in  $\hat{x} \in D$ , wenn  $\exists K_\delta(\hat{x}) \subset D$ , sodass  $f$  in  $K_\delta(\hat{x})$  stetig differenzierbar und die Jacobimatrix  $J_f(\hat{x})$  regulär ist.  $f$  heißt regulär in  $D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $\hat{x} \in D$  regulär ist.

**Satz 0.12** (Umkehrabbildung). Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulär in  $\hat{x} \in D$ . Dann  $\exists$  eine offene Umgebung  $V(\hat{x}) \subset D$  von  $\hat{x}$  derart, dass  $U(\hat{y}) := f(V(\hat{x}))$  eine offene Umgebung von  $\hat{y} = f(\hat{x})$  ist und  $f: V(\hat{x}) \rightarrow U(\hat{y})$  bijektiv. Weiter gilt: Die Umkehrabbildung  $f^{-1}: U(\hat{y}) \rightarrow V(\hat{x})$  ist regulär in  $\hat{y}$  und

$$J_{f^{-1}}(\hat{y}) = (J_f(\hat{x}))^{-1}, \quad \det J_{f^{-1}}(\hat{y}) = \frac{1}{\det J_f(\hat{x})}$$

*Beweis.* Sei  $\hat{x} \in D$  und  $\hat{y} := f(\hat{x}) \in f(D)$ . Betrachte  $F: \mathbb{R}^n \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F(y, x) = y - f(x)$ . Für  $(\hat{x}, \hat{y})$  gilt  $F(\hat{y}, \hat{x}) = 0$ . Die Jacobimatrix  $D_x F(y, x) = -J_f(x)$  ist regulär in  $\hat{x}$ . Mit Vertauschung



von  $x$  und  $y$  folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass Umgebungen  $U(\hat{y})$ ,  $U(\hat{x})$  und genau eine stetig differenzierbare Abbildung  $g : U(\hat{y}) \rightarrow U(\hat{x})$  existieren, sodass  $\forall y \in U(\hat{y})$

$$0 = F(y, g(y)) = y - f(g(y)), \implies \exists! x = g(y) \in U(\hat{x}) \text{ mit } y = f(x)$$

Setze dann

$$V(\hat{x}) := U(\hat{x}) \cap f^{-1}(U(\hat{y})) = \{x \in U(\hat{x}) \mid f(x) \in U(\hat{y})\}.$$

Da  $U(\hat{x})$  und  $f^{-1}(U(\hat{y}))$  offen sind, ist auch  $V(\hat{x})$  offen. Daher ist  $f : V(\hat{x}) \rightarrow U(\hat{y})$  bijektiv und die Umkehrabbildung  $f^{-1} : U(\hat{y}) \rightarrow V(\hat{x})$  ist gerade  $g$ .

$$J_{f \circ f^{-1}}(\cdot) = J_{\text{id}}(\cdot) = \mathbb{I}$$

Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} J_f(\hat{x}) \cdot J_{f^{-1}}(f(\hat{x})) &= \mathbb{I} \\ \implies J_{f^{-1}}(f(\hat{x})) &= J_f(\hat{x})^{-1} \end{aligned}$$

□

**Korollar 0.13.** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulär und  $O \subset D$  offen. Dann ist  $f(O)$  offen.

*Beweis.* Sei  $O \subset D$  offen und  $y \in f(O)$  beliebig mit  $y = f(x)$ ,  $x \in O$ . Nach Satz 0.12 existieren  $\forall y$  Umgebungen  $K_r(y) \subset f(O)$  und  $K_s(x) \subset O$  sodass  $K_r(y) \subset f(K_s(x)) \implies f(O)$  offen. □

**Bemerkung 0.14.** 1. Satz 0.12 garantiert nur die lokale Umkehrbarkeit von  $f$ .

2. Es seien  $U, V$  offene Mengen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow V$  stetig differenzierbar.  
 $f$  heißt Diffeomorphismus, falls  $f$  bijektiv ist und die Umkehrabbildung  $f^{-1} : V \rightarrow U$  stetig differenzierbar ist.