0.1 Lineare Abbildungen auf dem K^n

Definition 0.1 (Lineare Abbildung)**.** Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ heißt linear, falls $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

Bemerkung 0.2. Eine lineare Abbildung läßt sich als Matrix darstellen. Betrachte $x \in \mathbb{K}^n$ und euklidische/kartesische Basis $e^{(i)}$, $i = 1, \dots n$. Dann $\exists!$ Darstellung von x bezüglich der Basis

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{(i)}.$$

Die Koeffizienten $x_i, i = 1, \dots n$ sind Koordinaten. Wir definieren Koordinatenvektor $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \varphi\left(e^{(i)}\right).$$

$\varphi(x)$ hat auch eine (eindeutige) Darstellung bzgl. Basis in $\mathbb{K}^m$.

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\varphi_j(x)}_{*} \cdot e^{(j)} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overbrace{\varphi_j\left(e^{(i)}\right)}^{a_{ji}}\right)}_{=\varphi_j(x)} \cdot e^{(j)}$$

(*) Koordinaten von $\varphi_j(x)$ bzgl. Basis $e^{(j)}, j = 1, \dots, m$

Dabei sind die $\varphi_j(x)$ Koordinaten und der Koordinatenvektor ist $\hat{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \cdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$. Dann erhalten wir eine Matrix

$$\begin{pmatrix} \varphi_1\left(e^{(1)}\right) & \dots & \varphi_1\left(e^{(n)}\right) \\ & \vdots & & \vdots \\ \varphi_m\left(e^{(1)}\right) & \dots & \varphi_m\left(e^{(n)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

Für einen Koordinatenvektor bezüglich Basis $e^{(j)}$ gilt

$$\varphi(x) = (A\hat{x})_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i, \qquad j = 1, \dots, m$$

Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lässt sich bezüglich festgelegter Basen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ eindeutig durch die Matrix $A \in K^{m \times n}$ beschreiben.

$$\hat{\varphi}(x) = A\hat{x}, \qquad x \in \mathbb{K}^n$$

Im folgenden wird der Punkt x mit seiner speziellen kartesischen Darstellung $\hat{x}$ identifiziert. Konvention: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

- Anzahl an Zeilen $m =$ Dimension des Bildraums $\mathbb{K}^m$

- Anzahl an Spalten n = Dimension des Urbildraums $\mathbb{K}^n$

Falls $m = n$ definiert $A \in K^{n\times n}$ eine lineare Abbildung in $\mathbb{K}^n$.

Lemma 0.3 (Lineare Abbildungen in $\mathbb{K}^n$). Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. A ist regulär
2. $Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\forall b \in \mathbb{K}^n$ (Bijektivität der linearen Abbildung)
3. $Ax = 0$ hat nur eine Lösung $x = 0$ (Injektivität)
4. $Ax = b$ ist $\forall b \in \mathbb{K}^n$ lösbar (Surjektivität)
5. $\text{Rang}(A) = n$
6. $\det(A) \neq 0$
7. Alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A sind ungleich Null
8. Die (komplex) transponierte Matrix $\bar{A}^T$ ist regulär.

Weitere Begriffe und Eigenschaften

- $A, A' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind **identisch** ($a_{ij} = a'_{ij}\ \forall i,j$) $\Leftrightarrow Ax = A'x\ \forall x \in \mathbb{K}^n$
- $A, A' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind **ähnlich**, wenn $\exists T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär, sodass
$$A' = T^{-1}AT$$
Übergang $A \to A'$ heißt Ähnlichkeitstransformation und es gilt für $z \in \mathbb{C}$
$$\begin{aligned}\underbrace{\det(A' - z\mathbb{I})}_{\substack{\text{Charakt. Polynom für } A'\\ \text{Nullstellen = EW von } A'}} &= \det\left(T^{-1}AT - z\underbrace{T^{-1}T}_{=\mathbb{I}}\right)\\ &= \det(T^{-1}(A - z\mathbb{I})T)\\ &\overset{\det(AB)=\det(A)\det(B)}{=} \det(T^{-1})\det(A - z\mathbb{I})\det(T)\\ &\overset{\det(T^{-1})\det(T)=1=\det(\mathbb{I}))}{=} \underbrace{\det(A - z\mathbb{I})}_{\text{char. Pol. von } A}\end{aligned}$$
Ähnliche Matrizen haben also die gleichen Eigenwerte, aber im Allgemeinen unterschiedliche Eigenvektoren.
- $n \times n$ Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ bilden einen Vektorraum.
  - **Konvergenz** von Folgen von Matrizen ist komponentenweise Konvergenz
$$A^{(k)} \to A, k \to \infty \Leftrightarrow a_{ij}^{(k)} \overset{k\to\infty}{\to} a_{ij}\ \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots n$$
- Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Dann
$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n} \|Ax\| \text{ für } \|x\| = 1$$
ist die von $\|\cdot\|$ in $\mathbb{K}^n$ erzeugte natürliche **Matrixnorm**

- Für natürliche Matrixnorm gilt notwendig $\|\mathbb{I}\| = 1$
- Natürliche Matrixnorm ist verträglich mit $\|\cdot\|$, d.h. für $A \in K^{n\times n}$ ist $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, $x \in \mathbb{K}^n$
- und submultiplikativ, d.h. $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ für $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Beispiel 0.4. $\|A\|_F = \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ heißt **Frobenius**-Norm. Sie ist verträglich mit $\|\cdot\|_2$ in $\mathbb{K}^n$ und submultiplikativ, aber keine natürliche Matrixnorm, weil $\|\mathbb{I}\|_F = \sqrt{n} \neq 1$ für $n \geq 2$.

Lemma 0.5 (Natürliche Matrixnormen)**.** Die natürliche Matrixnormen zu $\|\cdot\|_\infty$ (ℓ_∞ / Maximumnorm) und $\|\cdot\|_1$ (ℓ_1-Norm) in $\mathbb{K}^n$ sind

$$\|A\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \qquad \text{Maximale Zeilen-Summen-Norm}$$

$$\|A\|_\infty := \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \qquad \text{Maximale Spalten-Summen-Norm}$$

Beweis. 1. Matrixnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm (d.h. erfüllt Normeigenschaften (N1), (N2) und (N3))

2. Z.z. Verträglichkeit

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j|\right) \leq \|x\|_\infty \cdot \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \|x\|_\infty \cdot \|A\|_\infty$$

$\implies$ Verträglichkeit mit $\|\cdot\|_\infty$

3. Z.Z. $\|A\|_\infty = \sup\limits_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$

$$\|Ax\|_\infty = 0 \implies A = 0 \implies \|A\|_\infty = 0 = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$$

Sei $A \neq 0$, dann $\|A\|_\infty > 0$ (Definitheit von Normen). Sei

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{mj}| \text{ für ein } m \in \{1, \dots, n\}.$$

Setze $z_j = \frac{|a_{mj}|}{a_{mj}}$, falls $a_{mj} \neq 0$ und sonst $z_j = 0$. ($z_j = \operatorname{sign}(a_{mj})$). Für $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ gilt dann $\|z\|_\infty = 1$ und

$$(Az)_m = \sum_{j=1}^n a_{mj}z_j = \sum_{j=1}^n |a_{mj}| = \|A\|_\infty .$$

Es folgt

$$\|A\|_\infty = (Az)_m \leq \|Az\|_\infty \leq \sup_{\|y\|_\infty=1} \|Ay\|_\infty \leq \sup_{\|y\|_\infty=1} \|A\|_\infty \cdot \underbrace{\|y\|_\infty}_{=1} = \|A\|_\infty$$

$$\implies \|A\|_\infty = \sup_{\|y\|_\infty=1} \|Ay\|_\infty$$

Beweis für ℓ_1 analog. □

Definition 0.6. 1. Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{K}$ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ = Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$$

2. $\sigma(A) = \{\lambda \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$ heißt **Spektrum** von A.

3. $\forall \lambda \in \sigma(A)\ \exists$ Eigenvektor $w \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$:

$$Aw = \lambda w$$

   Die Eigenvektoren zu λ bilden einen Vektorraum, den **Eigenraum** zu λ mit Dimension = **geometrische Vielfachheit** von λ.

4. Abschätzung der Eigenwerte: Sei $\lambda \in \sigma(A)$ und w ein Eigenvektor zu λ mit $\|w\| = 1$. Dann $|\lambda| = |\lambda| \cdot \|w\| = \|\lambda w\| = \|Aw\| \underset{\text{Verträglichkeit}}{\leq} \|A\| \cdot \|w\| = \|A\| \implies |\lambda| \leq \|A\|$

5. A heißt **hermitesch**, falls gilt

$$A = \bar{A}^T \quad (a_{ij} = \overline{a_{ji}})$$

   Reelle hermitesche Matrizen heißen **symmetrisch**. Für das Skalarproukt gilt

$$A = \bar{A}^T \Leftrightarrow (Ax, y)_2 = (x, Ay)_2\ \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

   Hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar = ähnlich zu einer Diagonalmatrix, alle Eigenwerte einer hermiteschen Matrix sind reell. $\exists$ eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren.

6. $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **positiv definit**, wenn gilt $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}$, $(Ax, x)_2 > 0\ \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Eine hermitesche Matrix ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv.

7. $\|\cdot\|_2$ (ℓ_2-Norm) im $\mathbb{K}^n$ erzeugt eine natürliche **Matrixnorm (Spektralnorm)** $\|\cdot\|_2$

Lemma 0.7 (Spektralnorm)**.** Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann ist $\bar{A}^T A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitesch und positiv semidefinit. Für die Spektralnorm gilt

$$\|A\|_2 = \max\left\{\sqrt{|\lambda|}, \lambda \in \sigma(\bar{A}^T A)\right\}$$

Sei A hermitesch, bzw. symmetrisch, dann gilt $\|A\|_2 = \max\{\sqrt{|\lambda|}, \lambda \in \sigma(A)\}$

Beweis. 1) $\bar{A}^T A$ hermitesch, denn

$$\overline{\left(\bar{A}^T A\right)^T} = \left(A^T \bar{A}\right)^T = \bar{A}^T A.$$

$\bar{A}^T A$ positiv semidefinit, denn

$$(\bar{A}^T Ax, x)_2 = (Ax, Ax)_2 = \|Ax\|_2^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

2) Es ist nach Definition

$$\|A\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} (Ax, Ax)_2 = \sup_{\|x\|_2=1} (x, \bar{A}^T Ax)_2.$$

Wegen (1) ist $\bar{A}^T A$ hermitesch und positiv semidefinit, d.h. es ex. $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit U unitär und $U^T \bar{A}^T AU = D$, wobei $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda \in \sigma(\bar{A}^T A)$ und $\lambda_i \geq 0$ reell.

Sei $y = \bar{U}^T x = U^{-1}x \implies x = Uy$. Damit folgt mit $|\lambda_{max}| := \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \in \sigma(\bar{A}^T A)\}$

$$\begin{aligned}
\|A\|_2^2 &= \sup_{\|x\|_2=1} (x, \bar{A}^T Ax)_2 \\
&= \sup_{\|Uy\|_2=1} (\underbrace{Uy}_{=x}, \bar{A}^T A \underbrace{Uy}_{=x})_2 \\
&= \sup_{\|y\|_2=1} (y, \underbrace{\bar{U}^T \bar{A}^T AU}_{=D} y)_2 \\
&= \sup_{\|y\|_2=1} (y, Dy)_2 \\
&= \sup_{\|y\|_2=1} \underbrace{(\lambda_1|y_1|^2 + \ldots + \lambda_n|y_n|^2)}_{=\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2} \\
&\leq \sup_{\|y\|_2=1} \sum_{i=1}^n |\lambda_{max}||y_i|^2 \\
&= |\lambda_{max}| \sup_{\|y\|_2=1} \|y\|_2^2 \\
&= |\lambda_{max}|.
\end{aligned}$$

Sei y Eigenvektor zu λ_{max} und $\|y\|_2 = 1$. Dann gilt $Dy = \lambda_{max} y$, also $(y, Dy)_2 = \lambda_{max} \underbrace{(y, y)_2}_{=1}$. Damit existiert ein y, s.d. $(y, Dy)_2 = \lambda_{max}$. Also folgt $\sup_{\|y\|_2=1} (y, Dy)_2 = \lambda_{max}$.
Damit folgt die Behauptung für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Behauptung für A hermitesch analog.

□

Definition 0.8 (orthonormale/unitäre Matrizen)**.** Eine Matrix $Q \in \mathbb{K}^{m\times n}$ heißt **orthonormal**, wenn ihre Spaltenvektoren ein Orthonormalsystem im $\mathbb{K}^m$ bilden, d.h.

$$Q = (q_1, \ldots, q_n) \qquad q_j \in \mathbb{K}^m$$

$$(q_i, q_j)_2 = \sum_{k=1}^m q_{ik} \cdot \overline{q_{kj}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls $m = n$ heißt Q unitär.

Lemma 0.9. Sei $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitär. Dann ist Q regulär, $Q^{-1} = \overline{Q}^T$ und $(Qx, Qy)_2 = (x, y)_2,\ x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2\,,\ x \in \mathbb{K}^n$$

d.h. euklidisches Skalarproukt und euklidische Norm sind invariant unter unitären Transformationen und folglich $\|Q\|_2 = \left\|Q^{-1}\right\|_2 = 1$

Beweis. 1. Z.Z. $Q^{-1} = \overline{Q}^T$

Sei $Q = (q_1, \ldots, q_n), \overline{Q}^T = \begin{pmatrix} \overline{q}_1^T \\ \vdots \\ \overline{q}_n^T \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\overline{Q}^T \cdot Q = \begin{pmatrix} \overline{q}_1^T \cdot q_1 & \ldots & \overline{q}_1^T \cdot q_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{q}_n^T \cdot q_1 & \ldots & \overline{q}_n^T \cdot q_n \end{pmatrix} \overset{Q \text{ unitär}}{=} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$
\begin{aligned}
(Qx, Qy)_2 &= (x, \overline{Q}^T Qy)_2 = (x, y)_2 \\
\|Qx\|_2^2 &= (Qx, Qx)_2 = (x, x)_2 = \|x\|_2^2 \\
\|Q\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1 \\
\left\|Q^{-1}\right\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \left\|Q^{-1}x\right\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \left\|QQ^{-1}x\right\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

□