

Analysis II

Prof. Dr. Ekaterina Kostina

SoSe 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Folgen und Reihen von Funktionen	3
1.1	Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz	3
1.2	Der Funktionenraum $C[a, b]$	5
1.3	Integration und Grenzübergänge	7
1.4	Der Funktionen-Raum $R[a, b]$	9
1.5	Fourier-Entwicklung	14

Kapitel 1

Folgen und Reihen von Funktionen

1.1 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Definition 1.1. Sei für $n \in \mathbb{N}$, $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ falls $\forall x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon, x) > 0 \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Beispiel 1.2. (a)

$$f_n(x): [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, 2]$.

$$x = 0: f_n(0) = 0 = f(0)$$

$$0 < x \leq 2: \forall n \geq \frac{2}{x}, f_n(x) = 0 = f(x)$$

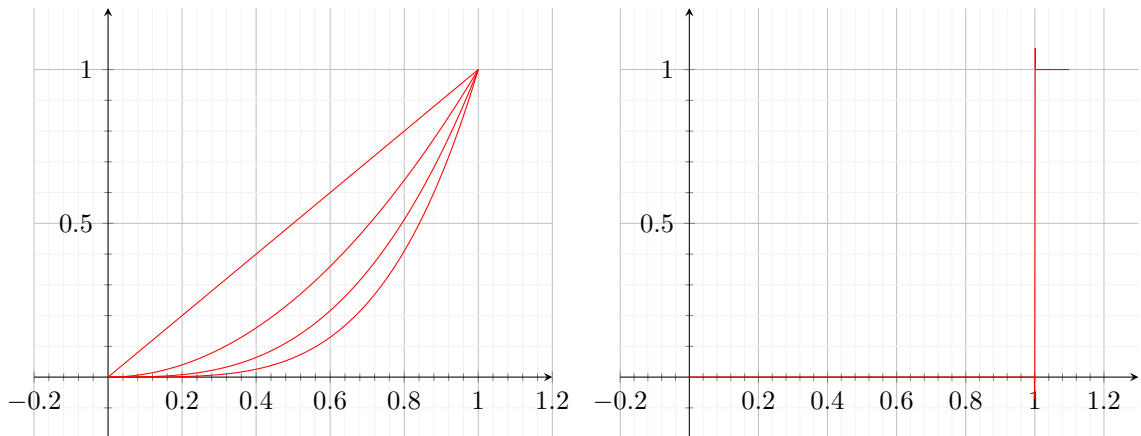
(b) $f_n(x) = x^n$, $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\text{punktweise}]{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Bemerkung 1.3. Punktweiser Limes stetiger Funktionen muss nicht stetig sein.

Definition 1.4. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ falls gilt

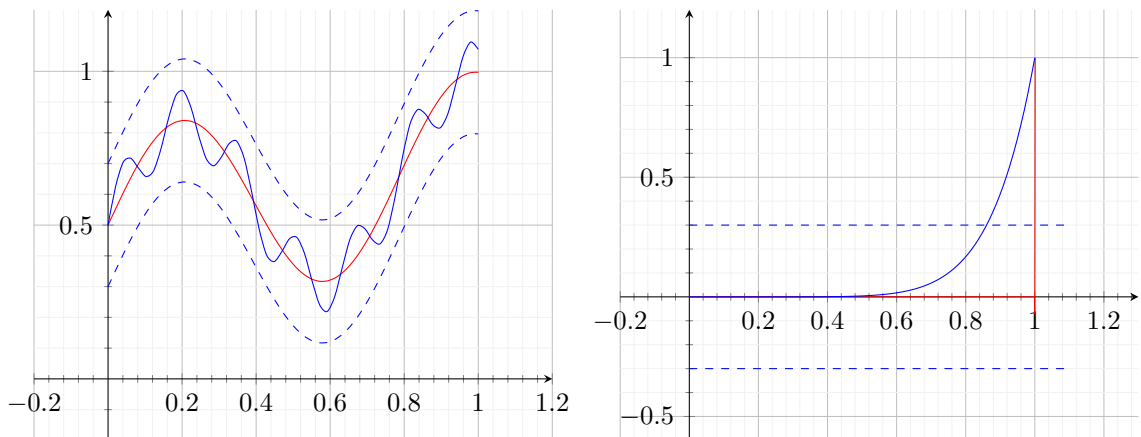
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ und } n \geq N.$$

Abbildung 1.1: $f_n(x) = x^n$ und ihre Grenzfunktion

Bemerkung 1.5. $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \forall n \geq N$ gilt

$$\text{graph}(f_n) \subset \epsilon\text{-Umgebung von Graphen von } f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid |y - f(x)| < \epsilon\}.$$

Beispiele 1.2 (a) und (b) nicht gleichmäßig konvergent, zu (a): Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ gilt $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| =$

Abbildung 1.2: Links: „ ϵ -Schlauch“, Rechts: 1.2 (b) nicht gleichmäßig konvergent

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

Beispiel 1.6. $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(2\pi n \cdot x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = 0$.

$$|\sin(2\pi n \cdot x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in [0, 2] \implies \text{punktweise Konvergenz.}$$

Sei nun $\epsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \epsilon$. Damit folgt

$$\forall n \geq N \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{N} < \epsilon \quad \forall x \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

Bemerkung 1.7. Konvergiert $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, dann konvergiert f_n punktweise gegen f . Die Umkehrung gilt nicht, siehe 1.2 (a) und (b).

Satz 1.8 (Gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ stetig in D . Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt: f ist stetig in D .

Beweis. Seien $x_0 \in D$ und $\epsilon > 0$. Zu zeigen: $\exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n \rightarrow \infty} f \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \geq N \quad \forall x \in D \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$f_n \text{ stetig in } x_0 \implies \exists \delta \text{ s.d. } \forall x \in D \text{ gilt } |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Zusammen: $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

1.2 Der Funktionenraum $C[a, b]$

Definition 1.9 (Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$). Es sei D ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) stetig. Dann

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Das Maximum existiert wegen der Stetigkeit des Absolutbetrags und weil $[a, b]$ beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz 1.10 ($\|\cdot\|_\infty$ und gleichmäßige Konvergenz). Es sei $D = [a, b]$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

- (i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \iff \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$
- (ii) Cauchy-Kriterium: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b] \iff \forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n, m \geq N_0$ gilt $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$

Beweis. (i) „ $\implies$ “: Sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \forall x \in [a, b]$ und $\forall n \geq N$. Damit folgt:

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \implies \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

„ $\impliedby$ “: Sei $\epsilon > 0$. Wegen $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon \forall n \geq N$. Damit folgt $\forall n \geq N$ und $\forall x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

(ii) „ $\implies$ “ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$, d.h. $\exists f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.d. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{gleichmäßig}} f$.

Sei $\epsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall n \geq N_0$ und $\forall x \in [a, b]$.

Damit gilt $\forall n, m \geq N_0$ und $\forall x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} \\ \implies \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| &= \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_0. \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei $\epsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N_0 \quad \forall x \in [a, b].$$

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\implies$ Definiere $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in [a, b]$.

Dann gilt $\forall n \geq N_0$, $\forall x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} \implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f.$$

□

Bemerkung 1.11. $\|\cdot\|_\infty$ erfüllt s.g. Normeigenschaften:

(N1) $\|f\|_\infty = 0 \implies f(x) = 0, x \in [a, b]$ (Definitheit)

(N2) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (Homogenität)

(N3) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (Dreiecksungleichung)

folgen direkt aus den Eigenschaften des Absolutbetrags.

Definition 1.12. Der Funktionenraum $C[a, b]$ definiert durch

$$C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \},$$

ist mit $\|f\|_\infty$ ein normierter Vektorraum.

Satz 1.13 (Vollständigkeit). Der Raum $C[a, b]$ ist vollständig bezüglich gleichmäßiger Konvergenz, d.h. jede Cauchy-Folge von Funktionen aus $C[a, b]$ besitzt einen Limes in $C[a, b]$

Beweis. Rannacher

□

1.3 Integration und Grenzübergänge

Wichtige Frage: Wenn $f_n \rightarrow f$, gilt dann auch $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$?

Satz 1.14. Seien $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Riemann-integrierbare Funktionen und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (gleichmäßige Konvergenz). Dann gilt f stetig und Riemann-integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Beweis. $f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n \rightarrow \infty} f \implies f \text{ stetig} \implies f \text{ Riemann-integrierbar}.$

Es gilt

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \underbrace{\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|}_{= \|f_n - f\|_\infty} \underbrace{(b - a)}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \text{beschränkt}}}.$$

□

Satz 1.15. Seien $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen ($n \in \mathbb{N}$) und die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ konvergiere gleichmäßig auf $[a, b]$, d.h. die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=0}^N f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gleichmäßig konvergent. Dann gilt:

$$f(x) := \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

ist stetig und Riemann-integrierbar und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x) dx \\ \int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x) dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x) dx, \end{aligned}$$

d.h. die Reihe wird gliedweise integriert.

Beweis. f_n sind stetig $\implies \sum_{n=0}^N f_n(x)$ stetig und Riemann-integrierbar.

Die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=0}^N f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \text{ stetig} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N f_n(x) \right) \text{ gleichmäßiger Limes.}$$

Es gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx + \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig, d.h. $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall N \geq N_\epsilon$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) dx \right| \leq \epsilon \cdot (b-a) \\ \Rightarrow & \left| \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx - \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \epsilon \\ \Rightarrow & \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \end{aligned}$$

□

Korrolar 1.16 (Integration von Potenzreihen). Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in jedem Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ für $0 < r < \rho$ gleichmäßig und für $[a, b] \subset]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \Big|_a^b.$$

Beweis. Nur die gleichmäßige Konvergenz für $|x-x_0| \leq r$ ist zu beweisen: Für $|x-x_0| \leq r$, $r < \rho$ gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} \\ &\stackrel{|x-x_0| < r}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho-\epsilon} \right)^n \cdot r^n \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{r}{\rho-\epsilon} \right)^n}_{<1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{geometrische Reihe}} 0. \end{aligned}$$

(*) : $\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, $r < \rho - \epsilon$ für ein $\epsilon > 0 \implies \exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho-\epsilon} \forall n \geq N_0$ □

Jetzt: Fourier Analysis!

1.4 Der Funktionen-Raum $R[a, b]$

Definition 1.17. Eine $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, falls $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx.$$

Bemerkung 1.18. 1. Analog: Definitionen von uneigentlichen Riemann-integralen für komplexwertige Funktionen

2. Die Rechenregeln für das reelle Riemann-integral übertragen sich auf komplexwertige Integrale, insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{f(x)} \, dx &= \int_a^b (\operatorname{Re} f(x) - i \cdot \operatorname{Im} f(x)) \, dx \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx - i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx \\ &= \overline{\int_a^b f(x) \, dx}. \end{aligned}$$

Definition 1.19. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt stückweise stetig, falls

- 1) f in $[a, b]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig und beschränkt ist.
- 2) in jeder dieser Unstetigkeitsstellen $\xi \in [a, b]$ die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte

$$f(\xi_{\pm}) := \lim_{h \searrow 0} f(\xi \pm h).$$

existieren. Für $\xi \in (a, b)$ wird

$$f(\xi) := \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2}.$$

gesetzt.

Bemerkung 1.20. Stückweise stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Die Menge der in diesem Sinne auf $[a, b]$ stückweise stetigen (Riemann-integrierbaren) Funktionen bilden einen Vektorraum $R[a, b]$.

Definition 1.21. Wir definieren

$$(f, g) := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad (\text{„Sesquilinearform“}).$$

Dies ist wohldefiniert da für $f, g \in R[a, b]$ das Produkt $f(x) \cdot \overline{g(x)} \in R[a, b]$ ist.

Definition 1.22 (Skalarprodukt). Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt auf V , falls $\forall u, v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ (Symmetrie, hermitesch falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrisch falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

(S2) $\langle \alpha v, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle$
 $\langle v, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle$
 $\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$
 $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$

(S3) Positivdefinitheit: $\langle v, v \rangle \geq 0$
 $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

Bemerkung 1.23. Auf $R[a, b]$ besitzt $(\cdot, \cdot)$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts, denn es gilt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in R[a, b], f_1, f_2 \in R[a, b], g_1, g_2 \in R[a, b]$:

(1) $(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = (\alpha f_1, g) + (\beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$

(2) $(f, \alpha g_1 + \beta g_2) = (f, \alpha g_1) + (f, \beta g_2) = \overline{\alpha}(f, g_1) + \overline{\beta}(f, g_2)$

(3) $(f, g) = \int_a^b f \cdot \overline{g} \, dx = \int_a^b \overline{\overline{f}g} \, dx = \overline{\int_a^b \overline{f}g \, dx} = \overline{\int_a^b g \overline{f} \, dx} = \overline{(g, f)}$

(4) $(f, f) = \int_a^b f \overline{f} \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \geq 0$

(5) Aus (4) und der Definition von $R[a, b]$ folgt: $(f, f) = 0 \implies f \equiv 0$ auf $[a, b]$.

$(\cdot, \cdot)$ wird auf $R[a, b]$ L^2 -Skalarprodukt genannt.

Lemma 1.24. Für ein L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf $R[a, b]$ gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Beweis. 1) Falls $g \equiv 0$ gilt trivialerweise

$$|(f, g)|^2 = 0 = (f, f) \cdot (g, g).$$

2) Falls $g \not\equiv 0$, sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig

$$0 \leq (f + \alpha g, f + \alpha g) = (f, f) + \alpha(g, f) + \overline{\alpha}(f, g) + \alpha \cdot \overline{\alpha}(g, g).$$

Setze $\alpha := -\frac{(f, g)}{(g, g)} = -\frac{\overline{(g, f)}}{(g, g)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 0 &\leq (f, f) - \frac{(f, g) \cdot (g, f)}{(g, g)} - \frac{(g, f) \cdot (f, g)}{(g, g)} + \frac{(f, g)(g, f)(g, g)}{(g, g)(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{(f, g)(g, f)}{(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{\overline{(f, g)}(f, g)}{(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \\
 \implies 0 &\leq (f, f)(g, g) - |(f, g)|^2.
 \end{aligned}$$

□

Definition 1.25 (L^2 -Norm). Das L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ induziert die L^2 -Norm auf $R[a, b]$ mit

$$\|f\| = \|f\|_{L^2} := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f \cdot \bar{f} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bemerkung 1.26. Normeigenschaften von L^2 auf $R[a, b]$ sind erfüllt:

(N1) Definitheit: $\|f\| = 0 \implies (f, f) = 0 \implies f = 0$ auf $[a, b]$

(N2) Homogenität: $\|\alpha f\| = (\alpha f, \alpha f)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 (f, f))^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|f\|$

(N3) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
 \|f + g\| &= (f + g, f + g)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (\|f\|^2 + (f, g) + (g, f) + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} (\|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|f\| + \|g\|.
 \end{aligned}$$

Definition 1.27 (Konvergenz im Quadratischen Mittel (L^2 -Konvergenz)). Seien $f_n \in R[a, b], n \in \mathbb{N}, f \in R[a, b]$. f_n konvergiert gegen f im Quadratischen Mittel $f_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty}$, wenn gilt

$$\|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Das heißt, dass die quadratische Abweichung zwischen f_n und f gegen Null konvergiert:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

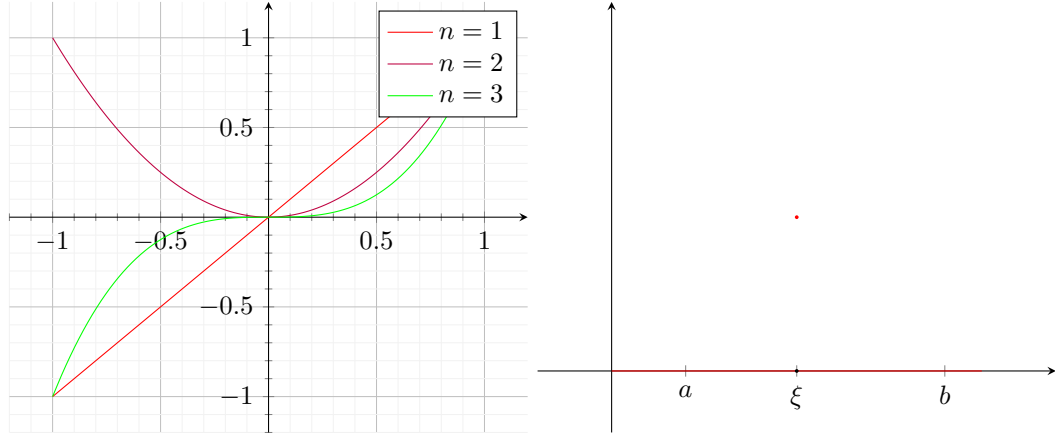
Bemerkung 1.28. (1) Es gilt:

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \leq \|f_n - f\|_{\infty}^2 (b - a).$$

Damit folgt

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Umkehrung gilt i.A. nicht! Beispiel: $f_n(x) := x^n$, $x \in [-1, 1]$



Abbildungung 1.3: Links: $f_n(x) = x^n$, Rechts: $f(x) \not\equiv 0$

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 x^{2n} dx = 2 \int_0^1 x^{2n} dx = 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f \equiv 0$.

Aber wegen $f_n(1) = 1$ für $x = 1$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert f_n nicht punktweise gegen $f \equiv 0$ und wegen $f_n(-1) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x = -1$ konvergiert f_n nicht.

- (2) Der Raum $R[a, b]$ mit L^2 -Norm $\|\cdot\|$ ist **nicht vollständig**, d.h. es existieren Cauchy-Folgen in $R[a, b]$, die keinen Grenzwert in $R[a, b]$ haben. Beispiel: siehe Abb. 1.3 (Rechts). Hier ist $f(x) \not\equiv 0$, $x \in [a, b]$.

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 = \|f\|_{L^2},$$

aber $f(x) \notin R[a, b]$, denn

$$f(\xi) \neq 0 = \frac{\lim_{h \searrow 0} f(\xi + h) - \lim_{h \searrow 0} f(\xi - h)}{2}.$$

Definition 1.29 (Orthogonalität). $f, g \in R[a, b]$ heißen orthogonal, wenn gilt $(f, g) = 0$.

Eine Teilmenge $S \subset R[a, b]$ heißt Orthogonalsystem, wenn alle Elemente aus S paarweise orthogonal sind, d.h.

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} \|f_i\|^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall f_i, f_j \in S.$$

Satz 1.30. Die trigonometrischen Funktionen, für $k, l \in \mathbb{N}$

$$c_k(x) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \cos(kx) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_l(x) := \sin(lx)$$

bilden auf $R[a, b]$ bezüglich des L^2 -Skalarprodukts ein Orthogonalsystem und es gilt

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} s_l(x) \, dx = \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

Hier sei

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad \text{Kroneckersymbol.}$$

Beweis.

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \, dx = \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \, dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k} (1 - 1) = 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(lx)}_v \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx) \cdot \sin(lx)}_{\substack{u \\ =0}} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx)}_u \underbrace{l \cos(lx)}_{v'} \, dx \\ &= -\frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) c_l(x) \, dx \end{aligned}$$

Für $l = k$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= - \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx \\ \implies 2 \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x) \, dx \\ &\stackrel{l=k}{=} \int_0^{2\pi} c_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} s_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - c_k^2(x)) \, dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx &= \pi = \int_0^{2\pi} s_k^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Wenn $k \neq l$, dann folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{l^2}{k^2} \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x) \, dx \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x) \, dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} c_k(x)s_l(x) \, dx &= 0. \end{aligned}$$

□

1.5 Fourier-Entwicklung

Definition 1.31 (Periodische Funktionen). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt L -periodisch ($L > 0$) falls $f(x + L) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\implies f(x + kL) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$). Sei f periodisch und $p > 0$. Für $\tilde{f}(x) := f\left(\underbrace{\frac{L}{p}x}_{\text{Variablentransformation}}\right)$ gilt dann $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ist p -periodisch

Beispiel 1.32. $p = 2\pi$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &:= f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \implies f(x) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \\ \tilde{f}(x + 2\pi) &= f\left(\frac{L}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) \stackrel{f \text{ } L\text{-per}}{=} f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = \tilde{f} \end{aligned}$$

Hier betrachten wir deshalb nur 2π -periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$. Weiterhin betrachten wir Funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{K}$, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π -periodisch.

Beispiel 1.33 (Trigonometrische Polynome). Für $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ betrachte

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) e^{ikx} + (a_k + ib_k) e^{-ikx} \right) \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \text{ mit } c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k \geq 0 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0 \end{cases} \\ (*) : \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

Für $a_k, b_k, k > 0$ ergibt sich $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Bemerkung 1.34. Ist f ein trigonometrisches Polynom, so kann man die Koeffizienten a_k, b_k, c_k durch Integration ausrechnen, d.h. a_k, b_k, c_k sind eindeutig.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \quad k > 0 \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx}), \quad L_2\text{-Skalarprodukt} \end{aligned}$$

Beweis. Sei zuerst $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\lambda x} \, dx &= \int_a^b \cos(\lambda x) \, dx + i \int_a^b \sin(\lambda x) \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} i \cos(\lambda x) \Big|_a^b \\ &\stackrel{=}{=} \frac{1}{i} = -i \frac{1}{\lambda i} (\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{\lambda i} e^{i\lambda x} \Big|_a^b \\ \implies \int_0^{2\pi} e^{ikx} \, dx &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_1 x} e^{-ik_2 x} \, dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k_1 - k_2)x} \, dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k_1 \neq k_2 \\ 2\pi, & \text{falls } k_1 = k_2 \quad (\implies k_1 - k_2 = 0) \end{cases}$$

$\implies$ Behauptung für c_k . Für a_k, b_k gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \, dx = c_{-k} + c_k = b_k \cdot i$$

□

Bemerkung 1.35. Obige Formel gilt auch für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

falls die Reihen gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ konvergieren.

Frage: Hat jede 2π -periodische Funktion die Form $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ oder kann man sie durch trigonometrische Polynome approximieren? $\implies$ Motivation für Fourier-Reihen.

Definition 1.36 (Fourier-Reihe). Sei $f \in R[a, b]$ 2π -periodisch. Die Fourier-Koeffizienten von f sind gegeben durch

$$c_k := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx = \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx})$$

Die (formale) Fourier-Reihe von f ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit der n -ten Partialsumme

$$s_n(x) = s_n(f, x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Die Fourier-Reihe läßt sich in der Form schreiben

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx$$

Satz 1.37. Sei $f \in R[a, b]$ eine 2π -periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten

c_k , $k \in \mathbb{Z}$ und $s_n = \sum_{k=1}^n c_k e^{ikx}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Beweis. Notation $e_n(x) := e^{ikx}$

$$(e_k, e_l) = \int_0^{2\pi} e_{ikx} e^{-ilkx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} (f, e_k) \implies (f, e_k) = 2\pi c_k$$

$$(f, s_n) = \sum_{k=-n}^n (f, c_k e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} (f, e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} 2\pi c_k = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

$$(s_n, s_n) = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n \underbrace{c_k \overline{c_l}}_{|c_k|^2} \cdot \underbrace{(e_k, e_l)}_{= \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l \end{cases}}$$

Dann

$$\begin{aligned} \|f - s_n\|^2 &= (f - s_n, f - s_n) \\ &= (f, f) - (f, s_n) - (s_n, f) + (s_n, s_n) \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \end{aligned}$$

□

Satz 1.38 (Besselsche Umgebung). Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Funktion mit Fourier-Koeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \|f\|^2$$

Beweis. Aus Satz 1.37

$$2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \|f\|^2 - \underbrace{\|f - s_n\|^2}_{\geq 0} \leq \|f\|^2$$

Die Konvergenz folgt unter Beachtung der Monotonie und Beschränktheit der Folge

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

□

Bemerkung 1.39. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ 2π -periodisch und $\|f - s_n\|_{L^2}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d.h. die Fourier-Reihe konvergiert gegen f in L^2 . Das ist nach Satz 1.37 äquivalent zu

$$\|f\|^2 = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \Leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Frage: Unter welchen Bedingungen für f gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

mit den Fourier-Koeffizienten c_k .

Ziel: Zeige die Parsevalsche Gleichung für die Fourier-Koeffizienten c_k , $\{e_k = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$, $f \in R[a, b] \Rightarrow$ Konvergenz der Fourier-Reihe in L^2 .

Lemma 1.40. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{1}{2}t)} - \frac{1}{2}$$

Beweis. $\cos(kt) = \frac{1}{2} (e^{ikt} + e^{-ikt})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2} e^{-int} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}}_{\text{geometrische Summenformel}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-int} \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-int} - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}} \\ &\stackrel{\text{Erweitern}}{=} \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \end{aligned}$$

□

Lemma 1.41. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es gilt für $x \in [a, b]$ und $s \in \mathbb{R}$

$$F_s(x) := \int_a^x f(y) \sin(sy) \, dy$$

konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $|s| \rightarrow \infty$ und $x \in [a, b]$.

Beweis. Sei $s \neq 0$.

$$F_s(x) = \int_a^x f(y) \sin(sy) \, dy \stackrel{\text{part. Integr.}}{=} f(y) \frac{1}{s} \cos(sy) \Big|_a^x + \int_a^x \frac{1}{s} \cos(sy) f'(y) \, dy.$$

f, f' stetig auf $[a, b] \implies \exists M > 0$, s.d. $|f(y)| \leq M, |f'(y)| \leq M$ mit $y \in [a, b]$. Dann gilt $|F_s(x)| \leq \frac{2M}{|s|} + \frac{M}{|s|} \cdot (b-a), \forall x \in [a, b]$. Also konvergiert $|F_s(x)|$ gleichmäßig gegen 0 für $|s| \rightarrow \infty$ und $x \in [a, b]$. $\square$

Lemma 1.42. Es gilt $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ für $0 < x < 2\pi$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen Intervallen $[\delta, 2\pi - \delta]$ für $\delta > 0$.

Beweis. Aus Hilfslemma 1.40 folgt für $0 < x < 2\pi$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^n \int_{\pi}^x \cos(ky) \, dy \\ &= \int_{\pi}^x \left(\sum_{k=1}^n \cos(ky) \right) \, dy \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.40}}{=} \int_{\pi}^x \left(\frac{\sin((n+\frac{1}{2})y)}{2 \sin(\frac{1}{2}y)} - \frac{1}{2} \right) \, dy \\ &= \underbrace{\int_{\pi}^x \frac{\sin((n+\frac{1}{2})y)}{2 \sin(\frac{1}{2}y)} \, dy}_{=: F_n(x)} - \frac{1}{2}(x - \pi) \end{aligned}$$

Z.Z.: $F_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. Die Funktion $f(y) = \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2})}$ ist auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ stetig differenzierbar, weil $\frac{y}{2} \neq 0$ auf $[\delta, 2\pi - \delta]$, sodass aus Hilfslemma 1.41 folgt

$$F_n(x) = \int_{\pi}^x \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2})} \cdot \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) \, dy \xrightarrow{\text{glm.}} 0$$

für $n \rightarrow \infty$ und $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$. $\square$

Lemma 1.43. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

konvergiert gleichmäßig $\forall x, 0 \leq x \leq 2\pi$. Insbesondere gilt für $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis. Lemma 1.42 $\implies \forall x, y \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{(y-\pi)^2}{4} &= \int_y^x \frac{t-\pi}{2} dt \\ &\stackrel{1.42}{=} - \int_y^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k} dt \\ &\stackrel{\text{glm. Konv.}}{\stackrel{\text{Satz reference 1.3.2}}{=}} - \sum_{k=1}^{\infty} \int_y^x \frac{\sin(kt)}{k} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ky)}{k^2} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{y \text{ fest}} \frac{(x-\pi)^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \quad \forall x \in (0, 2\pi), C \text{ konst}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ mit Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Bestimme die Konstante C :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} dx &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \right) dx \\ \frac{\pi^3}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx}_{=0} + \int_0^{2\pi} C dx \frac{\pi^3}{6} = C \cdot 2\pi \\ C &= \frac{\pi^2}{12} \\ \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} &= \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad x \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

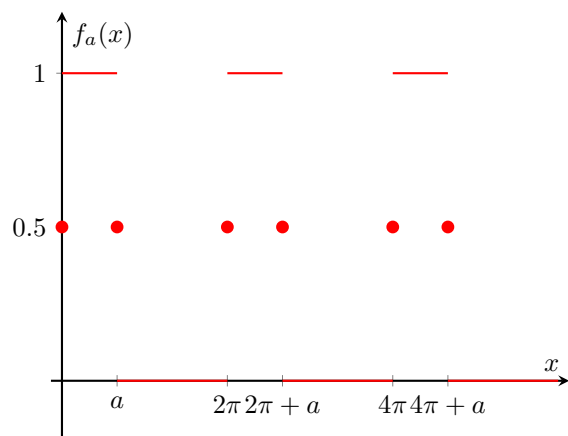
Für $x = 0$ oder $x = 2\pi$ folgt die Behauptung durch Grenzübergang, da beide Seiten stetig sind auf $[0, 2\pi]$ $\square$

Lemma 1.44. Sei f Treppenfunktion, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π periodisch. Dann $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in $L^2[0, 2\pi]$, d.h. Fourier-Reihe von f konvergiert im quadratischen Mittel gegen f .

Beweis. Zunächst Spezialfall

$$f_a(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0.5, & x \in \{0, a\} \\ 0, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Es gilt $\|f_a\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f_a|^2 \, dx = \int_0^a 1 \, dx = a$.



Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{a}{2\pi} \\
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_a(x) e^{-ikx} \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{ik} \right) e^{-ikx} \Big|_0^a \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{i}{ik} \right) (e^{-ika} - 1) \\
 &\stackrel{k \neq 0}{=} \frac{i}{2\pi k} (e^{-ika} - 1)
 \end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
|c_k|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 k^2} \underbrace{(e^{-ika} - 1)(e^{ika} - 1)}_{=1 - e^{ika} - e^{-ika} + 1} \\
&= \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left(1 - \frac{e^{ika} + e^{-ika}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos(ka)) \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \underbrace{\frac{a^2}{4\pi^2}}_{a_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_{-k}|^2 + |c_k|^2) \\
&\stackrel{\cos(-ka)=\cos(ka)}{=} \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos(ka)) \\
&= \frac{a}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}} - \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \cos(ka)}_{=\frac{(a-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{(a-\pi)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{a}{2\pi} \\
\implies 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= a = \|f_a\|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Satz 1.37}}{\implies} \|f_a - s_n(f_a)\|_{L^2}^2 = \|f_a\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine beliebige 2π -periodische Treppenfunktion mit Sprungstellen

$$a_j \in (0, 2\pi) \quad j = 1, \dots, l$$

Jede Treppenfunktion f lässt sich schreiben als

$$f(x) = \sum_{j=1}^l d_j \underbrace{f_{a_j}(x)}_{\text{Spezialfunktion (als } f_a(x))}, x \in [0, 2\pi]$$

f_{a_j} Spezielle Treppenfunktion mit Sprungstelle $a = a_j$ und $f_{a_j}(x) \in \{0, 1\} \quad \forall j, x \neq a_j$. Dann

$\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\| \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$. Betrachte

$$s_n(f) = \sum_{j=1}^l d_j s_n(f_{a_j})$$

und

$$\|f - s_n(f)\| = \left\| \sum_{j=1}^l d_j (f_{a_j} - s_n(f_{a_j})) \right\| \leq \sum_{j=1}^l |d_j| \underbrace{\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\|}_{\xrightarrow{L^2} 0} \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$$

□

Satz 1.45. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Treppenfunktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f und es gilt die Parsevalsche Gleichung (sog. Vollständigkeitsrelation)

$$\underbrace{2\pi \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}_{=\|f\|^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Beweis. O.B.d.A. sei f reellwertig (sonst werden Real- und Imaginärteil getrennt behandelt) und $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 2\pi]$ (sonst betrachte $\bar{f}(x) := \frac{f(x)}{M}$, $M = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu ε 2π -periodische Treppenfunktionen $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

$$-1 \leq \varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \leq 1$$

und

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon| \leq \frac{1}{16\pi} \varepsilon^2$$

Konstruktion von $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ siehe Rannacher. Dann,

$$|f - \varphi_\varepsilon|^2 \leq |\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon|^2 \leq (|\psi_\varepsilon| + |\varphi_\varepsilon|)(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \underset{\substack{|\psi_\varepsilon| < 1 \\ |\varphi_\varepsilon| < 1}}{\leq} 2(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)$$

und

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|^2 = \int_0^{2\pi} |f - \varphi_\varepsilon|^2 dx \leq 2 \int_0^{2\pi} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx \leq 2 \frac{\varepsilon^2}{16\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Weiter gilt: φ_ε Treppenfunktion $\xrightarrow{1.44}$ Fourier-Reihe von φ_ε konvergiert gegen φ_ε in L^2 , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \|s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Aus Satz 1.38 folgt

$$\|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\|^2 \leq \|f - \varphi_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\| &= \|f - s_n(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon\| \\ &\leq \|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\| + \|\varphi_\varepsilon - s_n(\varphi_\varepsilon)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\implies s_n(f) \xrightarrow{L^2} f, n \rightarrow \infty$$

□

Bemerkung 1.46. Konvergenz in L^2 ist „sehr schwach“ Für „glattere“ Funktionen konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig.

Satz 1.47. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar, d.h. $\exists$ Unterteilung von $[0, 2\pi]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 2\pi$$

mit $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar für $j = 1, \dots, m$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f .

Beweis. f stetig $\implies f \in R[0, 2\pi] \implies$ Fourier-Reihe von f konvergiert gegen f in L^2 , d.h. $\|s_n(f) - f\| \xrightarrow{L^2} 0$, $n \rightarrow \infty$. Betrachte $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi(x) = \phi_j(x)$, $x \in (t_{j-1}, t_j)$, $\phi_j : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Abbildung von $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$. Definiere ϕ in t_j entsprechend (möglich, da ϕ eine stückweise stetige Funktion ist). Definition von $R[0, 2\pi] \implies \phi \in [0, 2\pi] \implies$ Für die Fourier-Koeffizienten von ϕ gilt: $\gamma_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\phi\|^2 < \infty$. Berechne Fourier-Koeffizienten c_k von f

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ &\stackrel{\text{part. Integr.}}{=} \frac{1}{2\pi} f(x) \underbrace{\frac{i}{k} e^{-ikx}}_{=0} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f'(x)}_{\phi(x)} \frac{i}{k} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-i}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-i}{k} \gamma_k \\ &\implies |c_k| = \frac{1}{k} |\gamma_k| \end{aligned}$$

Es gilt $|\alpha \cdot \beta| \leq \frac{1}{2} |\alpha|^2 + \frac{1}{2} |\beta|^2$, da Quadrate größer 0 sind

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + \frac{|\gamma_k|^2}{2} \\ &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty \\ &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \text{ absolut konvergent} \\ &\implies \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}}_{\text{Fourier-Reihe von } f} \end{aligned}$$

konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion g , die stetig ist. Also $s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} g$, $n \rightarrow \infty$, $\implies s_n(f) \xrightarrow{L^2} g$, $n \rightarrow \infty$. Andererseits $s_n(f) \xrightarrow{L^2} f$, $n \rightarrow \infty$

$$\implies \|f - g\|_{L^2} = 0$$

$$\implies f \equiv g, \text{ weil } f \text{ und } g \text{ stetig sind}$$

$$\implies s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} f, n \rightarrow \infty$$

□