

Analysis II

Prof. Dr. Ekaterina Kostina

SoSe 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Folgen und Reihen von Funktionen	3
1.1	Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz	3
1.2	Der Funktionenraum $C[a, b]$	5
1.3	Integration und Grenzübergänge	7
1.4	Der Funktionen-Raum $R[a, b]$	9

Kapitel 1

Folgen und Reihen von Funktionen

1.1 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Definition 1.1. Sei für $n \in \mathbb{N}$, $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ falls $\forall x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon, x) > 0 \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Beispiel 1.2. (a)

$$f_n(x): [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, 2]$.

$$x = 0: f_n(0) = 0 = f(0)$$

$$0 < x \leq 2: \forall n \geq \frac{2}{x}, f_n(x) = 0 = f(x)$$

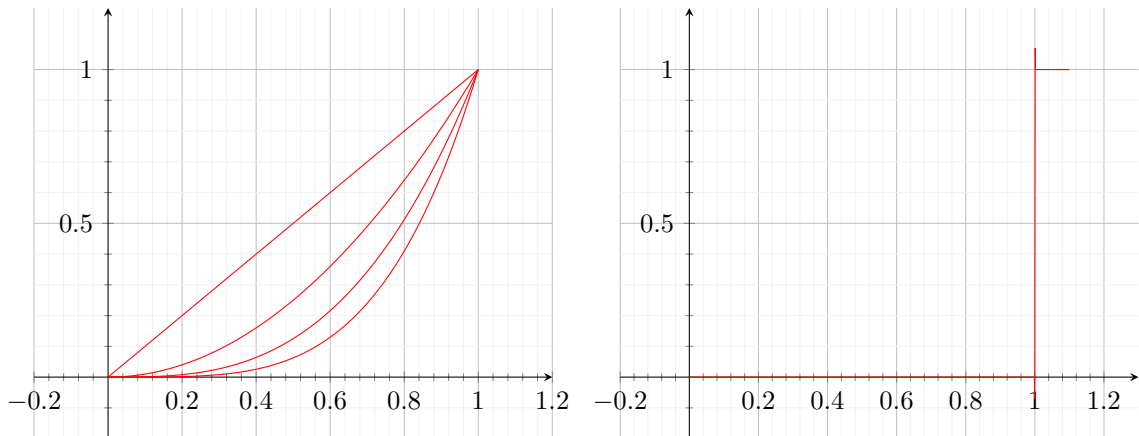
(b) $f_n(x) = x^n$, $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\text{punktweise}]{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Bemerkung 1.3. Punktweiser Limes stetiger Funktionen muss nicht stetig sein.

Definition 1.4. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ falls gilt

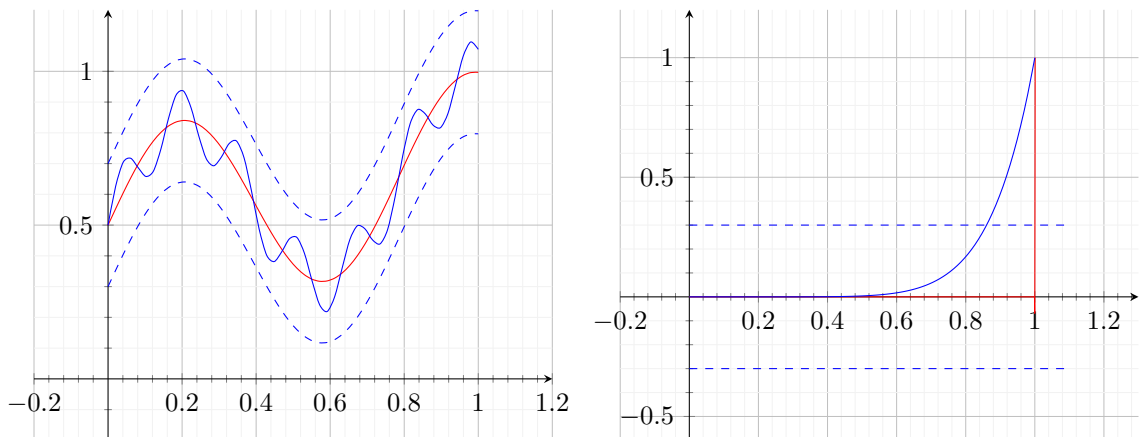
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ und } n \geq N.$$

Abbildung 1.1: $f_n(x) = x^n$ und ihre Grenzfunktion

Bemerkung 1.5. $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \forall n \geq N$ gilt

$$\text{graph}(f_n) \subset \epsilon\text{-Umgebung von Graphen von } f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid |y - f(x)| < \epsilon\}.$$

Beispiele 1.2 (a) und (b) nicht gleichmäßig konvergent, zu (a): Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ gilt $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| =$

Abbildung 1.2: Links: „ ϵ -Schlauch“, Rechts: 1.2 (b) nicht gleichmäßig konvergent

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

Beispiel 1.6. $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(2\pi n \cdot x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = 0$.

$$|\sin(2\pi n \cdot x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in [0, 2] \implies \text{punktweise Konvergenz.}$$

Sei nun $\epsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \epsilon$. Damit folgt

$$\forall n \geq N \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{N} < \epsilon \quad \forall x \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

Bemerkung 1.7. Konvergiert $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, dann konvergiert f_n punktweise gegen f . Die Umkehrung gilt nicht, siehe 1.2 (a) und (b).

Satz 1.8 (Gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ stetig in D . Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt: f ist stetig in D .

Beweis. Seien $x_0 \in D$ und $\epsilon > 0$. Zu zeigen: $\exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n \rightarrow \infty} f \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \geq N \quad \forall x \in D \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$f_n \text{ stetig in } x_0 \implies \exists \delta \text{ s.d. } \forall x \in D \text{ gilt } |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Zusammen: $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

1.2 Der Funktionenraum $C[a, b]$

Definition 1.9 (Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$). Es sei D ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) stetig. Dann

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Das Maximum existiert wegen der Stetigkeit des Absolutbetrags und weil $[a, b]$ beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz 1.10 ($\|\cdot\|_\infty$ und gleichmäßige Konvergenz). Es sei $D = [a, b]$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

- (i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \iff \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$
- (ii) Cauchy-Kriterium: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b] \iff \forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n, m \geq N_0$ gilt $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$

Beweis. (i) „ $\implies$ “: Sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \forall x \in [a, b]$ und $\forall n \geq N$. Damit folgt:

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \implies \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

„ $\impliedby$ “: Sei $\epsilon > 0$. Wegen $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon \forall n \geq N$. Damit folgt $\forall n \geq N$ und $\forall x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

(ii) „ $\implies$ “ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$, d.h. $\exists f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.d. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{gleichmäßig}} f$.

Sei $\epsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall n \geq N_0$ und $\forall x \in [a, b]$.

Damit gilt $\forall n, m \geq N_0$ und $\forall x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} \\ \implies \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| &= \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_0. \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei $\epsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N_0 \quad \forall x \in [a, b].$$

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\implies$ Definiere $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in [a, b]$.

Dann gilt $\forall n \geq N_0$, $\forall x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} \implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f.$$

□

Bemerkung 1.11. $\|\cdot\|_\infty$ erfüllt s.g. Normeigenschaften:

(N1) $\|f\|_\infty = 0 \implies f(x) = 0, x \in [a, b]$ (Definitheit)

(N2) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (Homogenität)

(N3) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (Dreiecksungleichung)

folgen direkt aus den Eigenschaften des Absolutbetrags.

Definition 1.12. Der Funktionenraum $C[a, b]$ definiert durch

$$C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \},$$

ist mit $\|f\|_\infty$ ein normierter Vektorraum.

Satz 1.13 (Vollständigkeit). Der Raum $C[a, b]$ ist vollständig bezüglich gleichmäßiger Konvergenz, d.h. jede Cauchy-Folge von Funktionen aus $C[a, b]$ besitzt einen Limes in $C[a, b]$

Beweis. Rannacher

□

1.3 Integration und Grenzübergänge

Wichtige Frage: Wenn $f_n \rightarrow f$, gilt dann auch $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$?

Satz 1.14. Seien $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Riemann-integrierbare Funktionen und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (gleichmäßige Konvergenz). Dann gilt f stetig und Riemann-integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Beweis. $f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n \rightarrow \infty} f \implies f \text{ stetig} \implies f \text{ Riemann-integrierbar.}$

Es gilt

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \underbrace{\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|}_{= \|f_n - f\|_\infty} \underbrace{(b - a)}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \text{beschränkt}}}.$$

□

Satz 1.15. Seien $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen ($n \in \mathbb{N}$) und die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ konvergiere gleichmäßig auf $[a, b]$, d.h. die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=0}^N f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gleichmäßig konvergent. Dann gilt:

$$f(x) := \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

ist stetig und Riemann-integrierbar und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x) dx \\ \int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x) dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x) dx, \end{aligned}$$

d.h. die Reihe wird gliedweise integriert.

Beweis. f_n sind stetig $\implies \sum_{n=0}^N f_n(x)$ stetig und Riemann-integrierbar.

Die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=0}^N f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \text{ stetig} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N f_n(x) \right) \text{ gleichmäßiger Limes.}$$

Es gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx + \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig, d.h. $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall N \geq N_\epsilon$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) dx \right| \leq \epsilon \cdot (b-a) \\ \Rightarrow & \left| \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx - \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \epsilon \\ \Rightarrow & \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \end{aligned}$$

□

Korrolar 1.16 (Integration von Potenzreihen). Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in jedem Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ für $0 < r < \rho$ gleichmäßig und für $[a, b] \subset]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \Big|_a^b.$$

Beweis. Nur die gleichmäßige Konvergenz für $|x-x_0| \leq r$ ist zu beweisen: Für $|x-x_0| \leq r$, $r < \rho$ gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} \\ &\stackrel{|x-x_0| < r}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho-\epsilon} \right)^n \cdot r^n \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{r}{\rho-\epsilon} \right)^n}_{<1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{geometrische Reihe}} 0. \end{aligned}$$

$$(*): \rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}, r < \rho - \epsilon \text{ für ein } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}, \text{ s.d. } \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho-\epsilon} \quad \forall n \geq N_0$$

□

Jetzt: Fourier Analysis

1.4 Der Funktionen-Raum $R[a, b]$

Definition 1.17. Eine $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, falls $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx.$$

Bemerkung 1.18. 1. Analog: Definitionen von uneigentlichen Riemann-integralen für komplexwertige Funktionen

2. Die Rechenregeln f+r das reelle Riemann-integral übertragen sich auf komplexwertige Integrale, insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{f(x)} \, dx &= \int_a^b (\operatorname{Re} f(x) - i \cdot \operatorname{Im} f(x)) \, dx \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx - i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx \\ &= \overline{\int_a^b f(x) \, dx}. \end{aligned}$$

Definition 1.19. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt stückweise stetig, falls

- 1) f in $[a, b]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig und beschränkt ist.
- 2) in jeder dieser Unstetigkeitsstellen $\xi \in [a, b]$ die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte

$$f(\xi_{\pm}) := \lim_{h \searrow 0} f(\xi \pm h).$$

existieren. Für $\xi \in (a, b)$ wird

$$f(\xi) := \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2}.$$

gesetzt.

Bemerkung 1.20. Stückweise stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Die Menge der in diesem Sinne auf $[a, b]$ stückweise stetigen (Riemann-integrierbaren) Funktionen bilden einen Vektorraum $R[a, b]$.

Definition 1.21. Wir definieren

$$(f, g) := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad (\text{„Sesquilinearform“}).$$

Dies ist wohldefiniert da für $f, g \in R[a, b]$ das Produkt $f(x) \cdot \overline{g(x)} \in R[a, b]$ ist.

Definition 1.22 (Skalarprodukt). Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt auf V , falls $\forall u, v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ (Symmetrie, hermitesch falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrisch falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

(S2) $\langle \alpha v, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle$
 $\langle v, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle$
 $\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$
 $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$

(S3) Positivdefinitheit: $\langle v, v \rangle \geq 0$
 $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

Bemerkung 1.23. Auf $R[a, b]$ besitzt $(\cdot, \cdot)$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts, denn es gilt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in R[a, b], f_1, f_2 \in R[a, b], g_1, g_2 \in R[a, b]$:

(1) $(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = (\alpha f_1, g) + (\beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$

(2) $(f, \alpha g_1 + \beta g_2) = (f, \alpha g_1) + (f, \beta g_2) = \overline{\alpha}(f, g_1) + \overline{\beta}(f, g_2)$

(3) $(f, g) = \int_a^b f \cdot \overline{g} \, dx = \int_a^b \overline{\overline{f}g} \, dx = \overline{\int_a^b \overline{f}g \, dx} = \overline{\int_a^b g \overline{f} \, dx} = \overline{(g, f)}$

(4) $(f, f) = \int_a^b f \overline{f} \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \geq 0$

(5) Aus (4) und der Definition von $R[a, b]$ folgt: $(f, f) = 0 \implies f \equiv 0$ auf $[a, b]$.

$(\cdot, \cdot)$ wird auf $R[a, b]$ L^2 -Skalarprodukt genannt.

Lemma 1.24. Für ein L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf $R[a, b]$ gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Beweis. 1) Falls $g \equiv 0$ gilt trivialerweise

$$|(f, g)|^2 = 0 = (f, f) \cdot (g, g).$$

2) Falls $g \not\equiv 0$, sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig

$$0 \leq (f + \alpha g, f + \alpha g) = (f, f) + \alpha(g, f) + \overline{\alpha}(f, g) + \alpha \cdot \overline{\alpha}(g, g).$$

Setze $\alpha := -\frac{(f, g)}{(g, g)} = -\frac{\overline{(g, f)}}{(g, g)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 0 &\leq (f, f) - \frac{(f, g) \cdot (g, f)}{(g, g)} - \frac{(g, f) \cdot (f, g)}{(g, g)} + \frac{(f, g)(g, f)(g, g)}{(g, g)(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{(f, g)(g, f)}{(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{\overline{(f, g)}(f, g)}{(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \\
 \implies 0 &\leq (f, f)(g, g) - |(f, g)|^2.
 \end{aligned}$$

□

Definition 1.25 (L^2 -Norm). Das L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ induziert die L^2 -Norm auf $R[a, b]$ mit

$$\|f\| = \|f\|_{L^2} := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f \cdot \bar{f} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bemerkung 1.26. Normeigenschaften von L^2 auf $R[a, b]$ sind erfüllt:

(N1) Definitheit: $\|f\| = 0 \implies (f, f) = 0 \implies f = 0$ auf $[a, b]$

(N2) Homogenität: $\|\alpha f\| = (\alpha f, \alpha f)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 (f, f))^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|f\|$

(N3) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
 \|f + g\| &= (f + g, f + g)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (\|f\|^2 + (f, g) + (g, f) + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} (\|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|f\| + \|g\|.
 \end{aligned}$$

Definition 1.27 (Konvergenz im Quadratischen Mittel (L^2 -Konvergenz)). Seien $f_n \in R[a, b], n \in \mathbb{N}, f \in R[a, b]$. f_n konvergiert gegen f im Quadratischen Mittel $f_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty}$, wenn gilt

$$\|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Das heißt, dass die quadratische Abweichung zwischen f_n und f gegen Null konvergiert:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

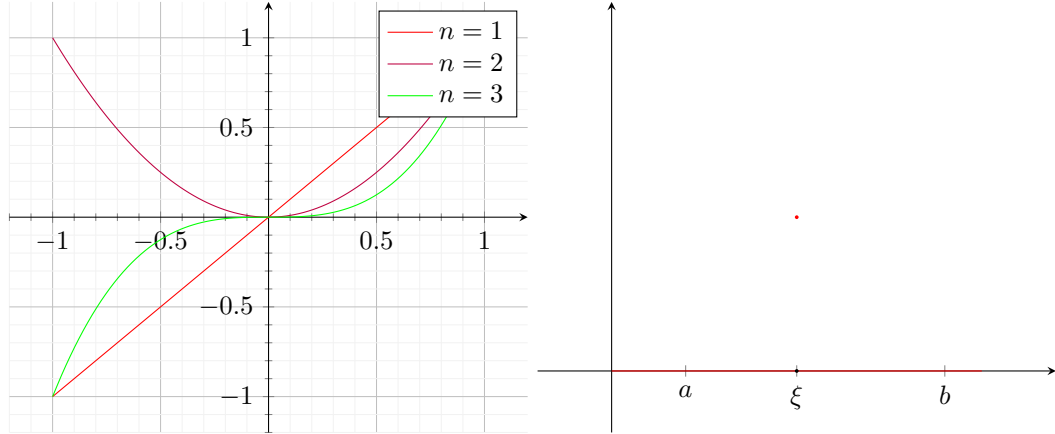
Bemerkung 1.28. (1) Es gilt:

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \leq \|f_n - f\|_{\infty}^2 (b - a).$$

Damit folgt

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Umkehrung gilt i.A. nicht! Beispiel: $f_n(x) := x^n$, $x \in [-1, 1]$



Abbildungung 1.3: Links: $f_n(x) = x^n$, Rechts: $f(x) \not\equiv 0$

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 x^{2n} dx = 2 \int_0^1 x^{2n} dx = 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f \equiv 0$.

Aber wegen $f_n(1) = 1$ für $x = 1$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert f_n nicht punktweise gegen $f \equiv 0$ und wegen $f_n(-1) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x = -1$ konvergiert f_n nicht.

- (2) Der Raum $R[a, b]$ mit L^2 -Norm $\|\cdot\|$ ist **nicht vollständig**, d.h. es existieren Cauchy-Folgen in $R[a, b]$, die keinen Grenzwert in $R[a, b]$ haben. Beispiel: siehe Abb. 1.3 (Rechts). Hier ist $f(x) \not\equiv 0$, $x \in [a, b]$.

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 = \|f\|_{L^2},$$

aber $f(x) \notin R[a, b]$, denn

$$f(\xi) \neq 0 = \frac{\lim_{h \searrow 0} f(\xi + h) - \lim_{h \searrow 0} f(\xi - h)}{2}.$$

Definition 1.29 (Orthogonalität). $f, g \in R[a, b]$ heißen orthogonal, wenn gilt $(f, g) = 0$.

Eine Teilmenge $S \subset R[a, b]$ heißt Orthogonalsystem, wenn alle Elemente aus S paarweise orthogonal sind, d.h.

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} \|f_i\|^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall f_i, f_j \in S.$$

Satz 1.30. Die trigonometrischen Funktionen, für $k, l \in \mathbb{N}$

$$c_k(x) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \cos(kx) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_l(x) := \sin(lx)$$

bilden auf $R[a, b]$ bezüglich des L^2 -Skalarprodukts ein Orthogonalsystem und es gilt

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} s_l(x) \, dx = \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

Hier sei

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad \text{Kroneckersymbol.}$$

Beweis.

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \, dx = \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \, dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k} (1 - 1) = 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(lx)}_v \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx) \cdot \sin(lx)}_{\substack{u \\ =0}} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx)}_u \underbrace{l \cos(lx)}_{v'} \, dx \\ &= -\frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) c_l(x) \, dx \end{aligned}$$

Für $l = k$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= - \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx \\ \implies 2 \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x) \, dx \\ &\stackrel{l=k}{\implies} \int_0^{2\pi} c_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} s_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - c_k^2(x)) \, dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx \\ &\implies \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx = \pi = \int_0^{2\pi} s_k^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Wenn $k \neq l$, dann folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{l^2}{k^2} \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x) \, dx \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x) \, dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} c_k(x)s_l(x) \, dx &= 0. \end{aligned}$$

□