

0.1 Der Funktionen-Raum $R[a, b]$

Definition 0.1. Eine $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, falls $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx.$$

Bemerkung 0.2. 1. Analog: Definitionen von uneigentlichen Riemann-integralen für komplexwertige Funktionen

2. Die Rechenregeln für das reelle Riemann-integral übertragen sich auf komplexwertige Integrale, insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{f(x)} \, dx &= \int_a^b (\operatorname{Re} f(x) - i \cdot \operatorname{Im} f(x)) \, dx \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx - i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx \\ &= \overline{\int_a^b f(x) \, dx}. \end{aligned}$$

Definition 0.3. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt stückweise stetig, falls

- 1) f in $[a, b]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig und beschränkt ist.
- 2) in jeder dieser Unstetigkeitsstellen $\xi \in [a, b]$ die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte

$$f(\xi_{\pm}) := \lim_{h \searrow 0} f(\xi \pm h).$$

existieren. Für $\xi \in (a, b)$ wird

$$f(\xi) := \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2}.$$

gesetzt.

Bemerkung 0.4. Stückweise stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Die Menge der in diesem Sinne auf $[a, b]$ stückweise stetigen (Riemann-integrierbaren) Funktionen bilden einen Vektorraum $R[a, b]$.

Definition 0.5. Wir definieren

$$(f, g) := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad (\text{„Sesquilinearform“}).$$

Dies ist wohldefiniert da für $f, g \in R[a, b]$ das Produkt $f(x) \cdot \overline{g(x)} \in R[a, b]$ ist.

Definition 0.6 (Skalarprodukt). Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt auf V , falls $\forall u, v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ (Symmetrie, hermitesch falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrisch falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

(S2) $\langle \alpha v, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle$
 $\langle v, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle$
 $\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$
 $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$

(S3) Positivdefinitheit: $\langle v, v \rangle \geq 0$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$$

Bemerkung 0.7. Auf $R[a, b]$ besitzt $(\cdot, \cdot)$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts, denn es gilt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in R[a, b], f_1, f_2 \in R[a, b], g_1, g_2 \in R[a, b]$:

$$(1) (\alpha f_1 + \beta f_2, g) = (\alpha f_1, g) + (\beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$$

$$(2) (f, \alpha g_1 + \beta g_2) = (f, \alpha g_1) + (f, \beta g_2) = \overline{\alpha}(f, g_1) + \overline{\beta}(f, g_2)$$

$$(3) (f, g) = \int_a^b f \cdot \overline{g} \, dx = \int_a^b \overline{\overline{f}g} \, dx = \overline{\int_a^b \overline{f}g \, dx} = \overline{\int_a^b g \overline{f} \, dx} = \overline{(g, f)}$$

$$(4) (f, f) = \int_a^b f \overline{f} \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \geq 0$$

$$(5) \text{ Aus (4) und der Definition von } R[a, b] \text{ folgt: } (f, f) = 0 \implies f \equiv 0 \text{ auf } [a, b].$$

$(\cdot, \cdot)$ wird auf $R[a, b]$ L^2 -Skalarprodukt genannt.

Lemma 0.8. Für ein L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf $R[a, b]$ gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Beweis. 1) Falls $g \equiv 0$ gilt trivialerweise

$$|(f, g)|^2 = 0 = (f, f) \cdot (g, g).$$

2) Falls $g \not\equiv 0$, sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig

$$0 \leq (f + \alpha g, f + \alpha g) = (f, f) + \alpha(g, f) + \overline{\alpha}(f, g) + \alpha \cdot \overline{\alpha}(g, g).$$

Setze $\alpha := -\frac{(f, g)}{(g, g)} = -\frac{\overline{(g, f)}}{(g, g)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (f, f) - \frac{(f, g) \cdot (g, f)}{(g, g)} - \frac{(g, f) \cdot (f, g)}{(g, g)} + \frac{(f, g)(g, f)(g, g)}{(g, g)(g, g)} \\ &= (f, f) - \frac{(f, g)(g, f)}{(g, g)} \\ &= (f, f) - \frac{\overline{(f, g)}(f, g)}{(g, g)} \\ &= (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \\ &\implies 0 \leq (f, f)(g, g) - |(f, g)|^2. \end{aligned}$$

□

Definition 0.9 (L^2 -Norm). Das L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ induziert die L^2 -Norm auf $R[a, b]$ mit

$$\|f\| = \|f\|_{L^2} := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f \cdot \overline{f} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bemerkung 0.10. Normeigenschaften von L^2 auf $R[a, b]$ sind erfüllt:

$$(N1) \text{ Definitheit: } \|f\| = 0 \implies (f, f) = 0 \implies f = 0 \text{ auf } [a, b]$$

$$(N2) \text{ Homogenität: } \|\alpha f\| = (\alpha f, \alpha f)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 (f, f))^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|f\|$$

(N3) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= (f + g, f + g)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|f\|^2 + (f, g) + (g, f) + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} (\|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

Definition 0.11 (Konvergenz im Quadratischen Mittel (L^2 -Konvergenz)). Seien $f_n \in R[a, b], n \in \mathbb{N}, f \in R[a, b]$. f_n konvergiert gegen f im Quadratischen Mittel $f_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty} f$, wenn gilt

$$\|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Das heißt, dass die quadratische Abweichung zwischen f_n und f gegen Null konvergiert:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Bemerkung 0.12. (1) Es gilt:

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \|f_n - f\|_{\infty}^2 (b - a).$$

Damit folgt

$$\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Umkehrung gilt i.A. nicht! Beispiel: $f_n(x) := x^n, x \in [-1, 1]$

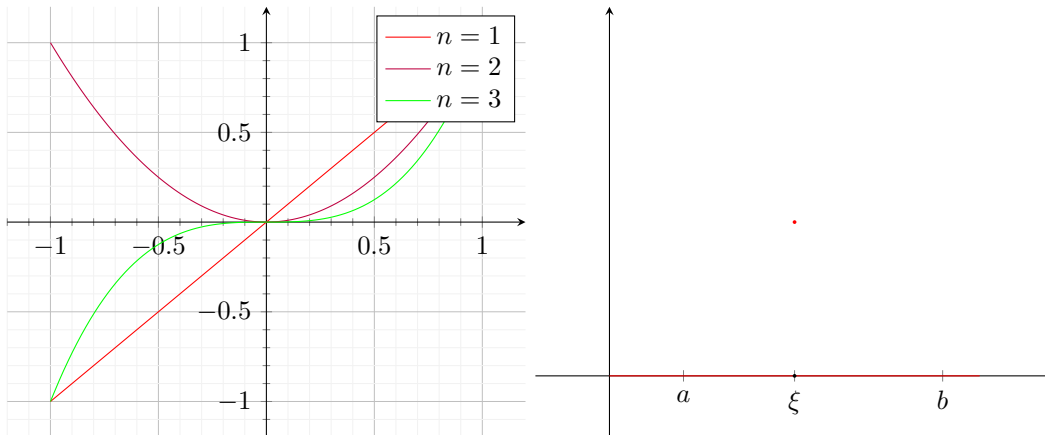


Abbildung 1: Links: $f_n(x) = x^n$, Rechts: $f(x) \neq 0$

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 x^{2n} dx = 2 \int_0^1 x^{2n} dx = 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt $f_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty} f \equiv 0$.

Aber wegen $f_n(1) = 1$ für $x = 1, n \in \mathbb{N}$, konvergiert f_n nicht punktweise gegen $f \equiv 0$ und wegen $f_n(-1) = (-1)^n, n \in \mathbb{N}, x = -1$ konvergiert f_n nicht.

- (2) Der Raum $R[a, b]$ mit L^2 -Norm $\|\cdot\|$ ist **nicht vollständig**, d.h. es existieren Cauchy-Folgen in $R[a, b]$, die keinen Grenzwert in $R[a, b]$ haben. Beispiel: siehe Abb. 1 (Rechts). Hier ist $f(x) \neq 0, x \in [a, b]$.

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 = \|f\|_{L^2},$$

aber $f(x) \notin R[a, b]$, denn

$$f(\xi) \neq 0 = \frac{\lim_{h \searrow 0} f(\xi + h) - \lim_{h \searrow 0} f(\xi - h)}{2}.$$

Definition 0.13 (Orthogonalität). $f, g \in R[a, b]$ heißen orthogonal, wenn gilt $(f, g) = 0$.

Eine Teilmenge $S \subset R[a, b]$ heißt Orthogonalsystem, wenn alle Elemente aus S paarweise orthogonal sind, d.h.

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} \|f_i\|^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall f_i, f_j \in S.$$

Satz 0.14. Die trigonometrischen Funktionen, für $k, l \in \mathbb{N}$

$$c_k(x) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \cos(kx) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_l(x) := \sin(lx)$$

bilden auf $R[a, b]$ bezüglich des L^2 -Skalarprodukts ein Orthogonalsystem und es gilt

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} s_l(x) \, dx = \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

Hier sei

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad \text{Kroneckersymbol.}$$

Beweis.

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \, dx = \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \, dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k} (1 - 1) = 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(lx)}_v \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx) \cdot \sin(lx) \Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx)}_u \underbrace{l \cos(lx)}_{v'} \, dx \\ &= -\frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) c_l(x) \, dx \end{aligned}$$

Für $l = k$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= - \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx \\ \implies 2 \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx \\
&\stackrel{l=k}{\implies} \int_0^{2\pi} c_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} s_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - c_k^2(x)) \, dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx \\
&\implies \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx = \pi = \int_0^{2\pi} s_k^2(x) \, dx
\end{aligned}$$

Wenn $k \neq l$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx \\
&\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{l^2}{k^2} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx \\
\implies \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= 0
\end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx &= 0 \\
\int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx &= 0.
\end{aligned}$$

□