

# Analysis II

Prof. Dr. Ekaterina Kostina

SoSe 2020

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                        |          |
|----------|--------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Folgen und Reihen von Funktionen</b>                | <b>3</b> |
| 1.1      | Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz . . . . . | 3        |
| 1.2      | Der Funktionenraum $C[a, b]$ . . . . .                 | 5        |
| 1.3      | Integration und Grenzübergänge . . . . .               | 7        |
| 1.4      | Der Funktionen-Raum $R[a, b]$ . . . . .                | 9        |
| 1.5      | Fourier-Entwicklung . . . . .                          | 14       |

# Kapitel 1

## Folgen und Reihen von Funktionen

### 1.1 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

**Definition 1.1.** Sei für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  eine Funktion. Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  falls  $\forall x \in D$  die Folge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(x)$  konvergiert, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon, x) > 0 \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

**Beispiel 1.2.** (a)

$$f_n(x): [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise gegen  $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, 2]$ .

$$x = 0: f_n(0) = 0 = f(0)$$

$$0 < x \leq 2: \forall n \geq \frac{2}{x}, f_n(x) = 0 = f(x)$$

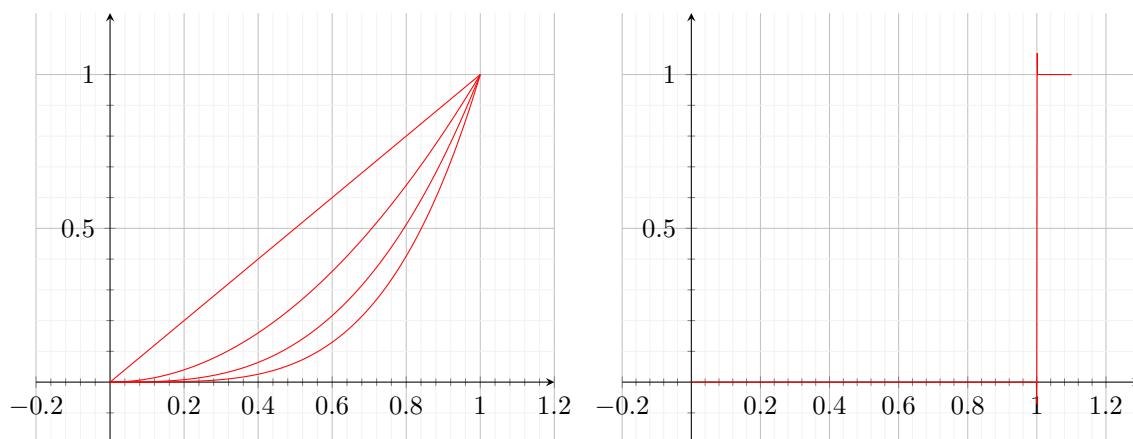
(b)  $f_n(x) = x^n$ ,  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\text{punktweise}]{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

**Bemerkung 1.3.** Punktweiser Limes stetiger Funktionen muss nicht stetig sein.

**Definition 1.4.** Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  falls gilt

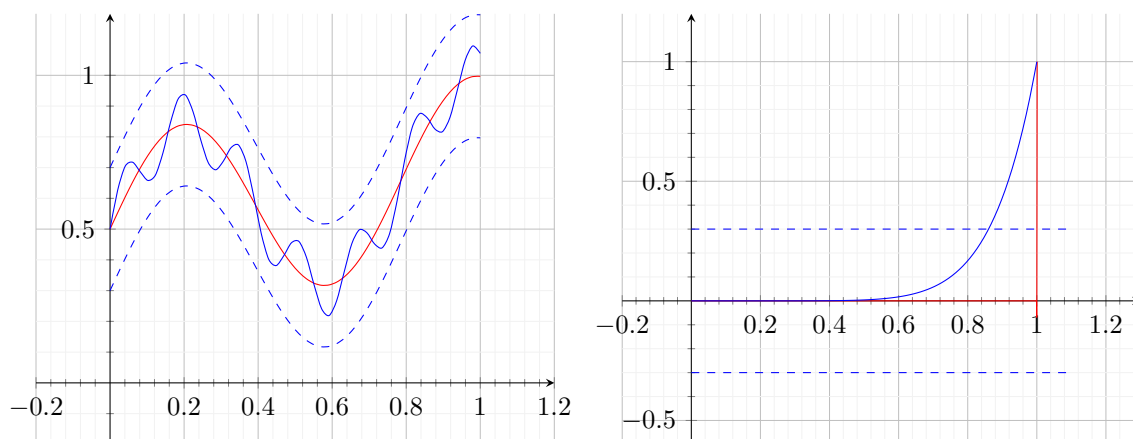
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ und } n \geq N.$$

Abbildung 1.1:  $f_n(x) = x^n$  und ihre Grenzfunktion

**Bemerkung 1.5.**  $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \forall n \geq N$  gilt

$$\text{graph}(f_n) \subset \epsilon\text{-Umgebung von Graphen von } f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid |y - f(x)| < \epsilon\}.$$

Beispiele 1.2 (a) und (b) nicht gleichmäßig konvergent, zu (a): Für  $\epsilon = \frac{1}{2}$  gilt  $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| =$

Abbildung 1.2: Links: „ $\epsilon$ -Schlauch“, Rechts: 1.2 (b) nicht gleichmäßig konvergent

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

**Beispiel 1.6.**  $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(2\pi n \cdot x)$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f(x) = 0$ .

$$|\sin(2\pi n \cdot x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in [0, 2] \implies \text{punktweise Konvergenz.}$$

Sei nun  $\epsilon > 0$ , dann  $\exists N \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{N} < \epsilon$ . Damit folgt

$$\forall n \geq N \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{N} < \epsilon \quad \forall x \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

**Bemerkung 1.7.** Konvergiert  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , dann konvergiert  $f_n$  punktweise gegen  $f$ . Die Umkehrung gilt nicht, siehe 1.2 (a) und (b).

**Satz 1.8** (Gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig). Es sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$   $\forall n \in \mathbb{N}$  stetig in  $D$ . Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig konvergent gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:  $f$  ist stetig in  $D$ .

*Beweis.* Seien  $x_0 \in D$  und  $\epsilon > 0$ . Zu zeigen:  $\exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n \rightarrow \infty} f \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \geq N \quad \forall x \in D \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$f_n \text{ stetig in } x_0 \implies \exists \delta \text{ s.d. } \forall x \in D \text{ gilt } |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Zusammen:  $\forall x$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

## 1.2 Der Funktionenraum $C[a, b]$

**Definition 1.9** (Maximumnorm  $\|\cdot\|_\infty$ ). Es sei  $D$  ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall  $I = [a, b]$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) stetig. Dann

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Das Maximum existiert wegen der Stetigkeit des Absolutbetrags und weil  $[a, b]$  beschränkt und abgeschlossen ist.

**Satz 1.10** ( $\|\cdot\|_\infty$  und gleichmäßige Konvergenz). Es sei  $D = [a, b]$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

- (i)  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \iff \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$
- (ii) Cauchy-Kriterium:  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig auf  $[a, b] \iff \forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$ , s.d.  $\forall n, m \geq N_0$  gilt  $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$

*Beweis.* (i) „ $\implies$ “: Sei  $\epsilon > 0$ . Dann  $\exists N \in \mathbb{N}$  s.d.  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \forall x \in [a, b]$  und  $\forall n \geq N$ . Damit folgt:

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \implies \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

„ $\impliedby$ “: Sei  $\epsilon > 0$ . Wegen  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \exists N \in \mathbb{N}$  s.d.  $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon \forall n \geq N$ . Damit folgt  $\forall n \geq N$  und  $\forall x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

(ii) „ $\implies$ “  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig auf  $[a, b]$ , d.h.  $\exists f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  s.d.  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{gleichmäßig}} f$ .

Sei  $\epsilon > 0$ , dann  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  s.d.  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall n \geq N_0$  und  $\forall x \in [a, b]$ .

Damit gilt  $\forall n, m \geq N_0$  und  $\forall x \in [a, b]$ :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} \\ \implies \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| &= \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_0. \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\epsilon > 0$ , dann  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ , s.d.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N_0 \quad \forall x \in [a, b].$$

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$ .

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert

$\implies$  Definiere  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Dann gilt  $\forall n \geq N_0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ :

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} \implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f.$$

□

**Bemerkung 1.11.**  $\|\cdot\|_\infty$  erfüllt s.g. Normeigenschaften:

(N1)  $\|f\|_\infty = 0 \implies f(x) = 0, x \in [a, b]$  (Definitheit)

(N2)  $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  (Homogenität)

(N3)  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$  (Dreiecksungleichung)

folgen direkt aus den Eigenschaften des Absolutbetrags.

**Definition 1.12.** Der Funktionenraum  $C[a, b]$  definiert durch

$$C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \},$$

ist mit  $\|f\|_\infty$  ein normierter Vektorraum.

**Satz 1.13** (Vollständigkeit). Der Raum  $C[a, b]$  ist vollständig bezüglich gleichmäßiger Konvergenz, d.h. jede Cauchy-Folge von Funktionen aus  $C[a, b]$  besitzt einen Limes in  $C[a, b]$

*Beweis.* Rannacher

□

## 1.3 Integration und Grenzübergänge

Wichtige Frage: Wenn  $f_n \rightarrow f$ , gilt dann auch  $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$ ?

**Satz 1.14.** Seien  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Riemann-integrierbare Funktionen und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (gleichmäßige Konvergenz). Dann gilt  $f$  stetig und Riemann-integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

*Beweis.*  $f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n \rightarrow \infty} f \implies f \text{ stetig} \implies f \text{ Riemann-integrierbar}.$

Es gilt

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \underbrace{\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|}_{= \|f_n - f\|_\infty} \underbrace{(b - a)}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \text{beschränkt}}}.$$

□

**Satz 1.15.** Seien  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen ( $n \in \mathbb{N}$ ) und die Reihe  $\sum_{n=0}^\infty f_n$  konvergiere gleichmäßig auf  $[a, b]$ , d.h. die Folge der Partialsummen  $(\sum_{n=0}^N f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei gleichmäßig konvergent. Dann gilt:

$$f(x) := \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

ist stetig und Riemann-integrierbar und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x) dx \\ \int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x) dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x) dx, \end{aligned}$$

d.h. die Reihe wird gliedweise integriert.

*Beweis.*  $f_n$  sind stetig  $\implies \sum_{n=0}^N f_n(x)$  stetig und Riemann-integrierbar.

Die Folge der Partialsummen  $(\sum_{n=0}^N f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \text{ stetig} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^N f_n(x) \right) \text{ gleichmäßiger Limes.}$$

Es gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx + \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig, d.h.  $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ , s.d.  $\forall N \geq N_\epsilon$  gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) dx \right| \leq \epsilon \cdot (b-a) \\ \Rightarrow & \left| \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx - \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \epsilon \\ \Rightarrow & \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \end{aligned}$$

□

**Korollar 1.16** (Integration von Potenzreihen). Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  in jedem Intervall  $[x_0 - r, x_0 + r]$  für  $0 < r < \rho$  gleichmäßig und für  $[a, b] \subset ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \Big|_a^b.$$

*Beweis.* Nur die gleichmäßige Konvergenz für  $|x-x_0| \leq r$  ist zu beweisen: Für  $|x-x_0| \leq r$ ,  $r < \rho$  gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} \\ &\stackrel{|x-x_0| < r}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( \frac{1}{\rho-\epsilon} \right)^n \cdot r^n \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{r}{\rho-\epsilon} \right)^n}_{<1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{geometrische Reihe}} 0. \end{aligned}$$

(\*) :  $\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ ,  $r < \rho - \epsilon$  für ein  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}$ , s.d.  $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho-\epsilon} \forall n \geq N_0$

□

Jetzt: Fourier Analysis!

## 1.4 Der Funktionen-Raum $R[a, b]$

**Definition 1.17.** Eine  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  heißt Riemann-integrierbar auf  $[a, b]$ , falls  $\operatorname{Re}(f)$  und  $\operatorname{Im}(f)$  Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx.$$

**Bemerkung 1.18.** 1. Analog: Definitionen von uneigentlichen Riemann-integralen für komplexwertige Funktionen

2. Die Rechenregeln f+r das reelle Riemann-integral übertragen sich auf komplexwertige Integrale, insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{f(x)} \, dx &= \int_a^b (\operatorname{Re} f(x) - i \cdot \operatorname{Im} f(x)) \, dx \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx - i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx \\ &= \overline{\int_a^b f(x) \, dx}. \end{aligned}$$

**Definition 1.19.** Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) heißt stückweise stetig, falls

- 1)  $f$  in  $[a, b]$  bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig und beschränkt ist.
- 2) in jeder dieser Unstetigkeitsstellen  $\xi \in [a, b]$  die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte

$$f(\xi_{\pm}) := \lim_{h \searrow 0} f(\xi \pm h).$$

existieren. Für  $\xi \in (a, b)$  wird

$$f(\xi) := \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2}.$$

gesetzt.

**Bemerkung 1.20.** Stückweise stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Die Menge der in diesem Sinne auf  $[a, b]$  stückweise stetigen (Riemann-integrierbaren) Funktionen bilden einen Vektorraum  $R[a, b]$ .

**Definition 1.21.** Wir definieren

$$(f, g) := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad (\text{„Sesquilinearform“}).$$

Dies ist wohldefiniert da für  $f, g \in R[a, b]$  das Produkt  $f(x) \cdot \overline{g(x)} \in R[a, b]$  ist.

**Definition 1.22** (Skalarprodukt). Sei  $V$  Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  heißt Skalarprodukt auf  $V$ , falls  $\forall u, v, w \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$  gilt:

(S1)  $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$  (Symmetrie, hermitesch falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  symmetrisch falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )

(S2)  $\langle \alpha v, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle$   
 $\langle v, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle$   
 $\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$   
 $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$

(S3) Positivdefinitheit:  $\langle v, v \rangle \geq 0$   
 $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

**Bemerkung 1.23.** Auf  $R[a, b]$  besitzt  $(\cdot, \cdot)$  die Eigenschaften eines Skalarprodukts, denn es gilt  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in R[a, b], f_1, f_2 \in R[a, b], g_1, g_2 \in R[a, b]$ :

(1)  $(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = (\alpha f_1, g) + (\beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$

(2)  $(f, \alpha g_1 + \beta g_2) = (f, \alpha g_1) + (f, \beta g_2) = \overline{\alpha}(f, g_1) + \overline{\beta}(f, g_2)$

(3)  $(f, g) = \int_a^b f \cdot \overline{g} \, dx = \int_a^b \overline{\overline{f}g} \, dx = \overline{\int_a^b \overline{f}g \, dx} = \overline{\int_a^b g \overline{f} \, dx} = \overline{(g, f)}$

(4)  $(f, f) = \int_a^b f \overline{f} \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \geq 0$

(5) Aus (4) und der Definition von  $R[a, b]$  folgt:  $(f, f) = 0 \implies f \equiv 0$  auf  $[a, b]$ .

$(\cdot, \cdot)$  wird auf  $R[a, b]$   $L^2$ -Skalarprodukt genannt.

**Lemma 1.24.** Für ein  $L^2$ -Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  auf  $R[a, b]$  gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

*Beweis.* 1) Falls  $g \equiv 0$  gilt trivialerweise

$$|(f, g)|^2 = 0 = (f, f) \cdot (g, g).$$

2) Falls  $g \not\equiv 0$ , sei  $\alpha \in \mathbb{K}$  beliebig

$$0 \leq (f + \alpha g, f + \alpha g) = (f, f) + \alpha(g, f) + \overline{\alpha}(f, g) + \alpha \cdot \overline{\alpha}(g, g).$$

Setze  $\alpha := -\frac{(f, g)}{(g, g)} = -\frac{\overline{(g, f)}}{(g, g)}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 0 &\leq (f, f) - \frac{(f, g) \cdot (g, f)}{(g, g)} - \frac{(g, f) \cdot (f, g)}{(g, g)} + \frac{(f, g)(g, f)(g, g)}{(g, g)(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{(f, g)(g, f)}{(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{\overline{(f, g)}(f, g)}{(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \\
 \implies 0 &\leq (f, f)(g, g) - |(f, g)|^2.
 \end{aligned}$$

□

**Definition 1.25** ( $L^2$ -Norm). Das  $L^2$ -Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  induziert die  $L^2$ -Norm auf  $R[a, b]$  mit

$$\|f\| = \|f\|_{L^2} := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_a^b f \cdot \bar{f} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Bemerkung 1.26.** Normeigenschaften von  $L^2$  auf  $R[a, b]$  sind erfüllt:

(N1) Definitheit:  $\|f\| = 0 \implies (f, f) = 0 \implies f = 0$  auf  $[a, b]$

(N2) Homogenität:  $\|\alpha f\| = (\alpha f, \alpha f)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 (f, f))^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|f\|$

(N3) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
 \|f + g\| &= (f + g, f + g)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (\|f\|^2 + (f, g) + (g, f) + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} (\|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|f\| + \|g\|.
 \end{aligned}$$

**Definition 1.27** (Konvergenz im Quadratischen Mittel ( $L^2$ -Konvergenz)). Seien  $f_n \in R[a, b], n \in \mathbb{N}, f \in R[a, b]$ .  $f_n$  konvergiert gegen  $f$  im Quadratischen Mittel  $f_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty}$ , wenn gilt

$$\|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Das heißt, dass die quadratische Abweichung zwischen  $f_n$  und  $f$  gegen Null konvergiert:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

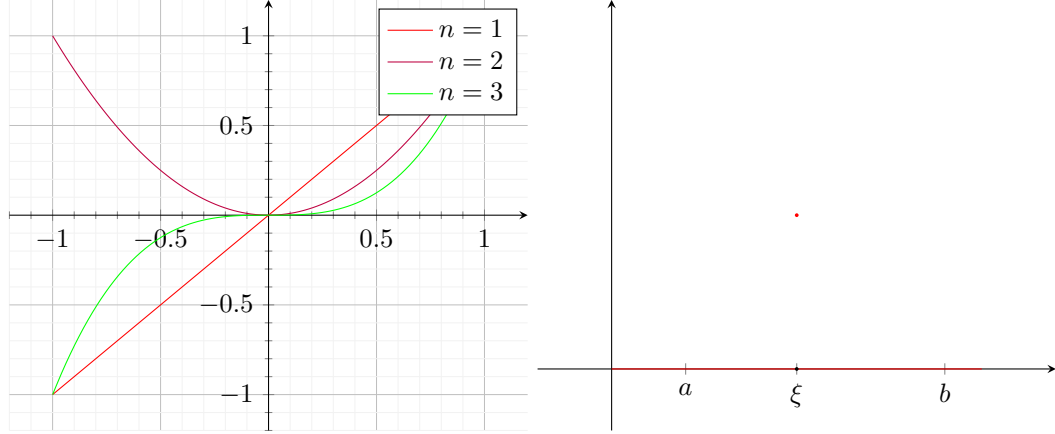
**Bemerkung 1.28.** (1) Es gilt:

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \leq \|f_n - f\|_{\infty}^2 (b - a).$$

Damit folgt

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Umkehrung gilt i.A. nicht! Beispiel:  $f_n(x) := x^n$ ,  $x \in [-1, 1]$



Abbildungung 1.3: Links:  $f_n(x) = x^n$ , Rechts:  $f(x) \not\equiv 0$

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 x^{2n} dx = 2 \int_0^1 x^{2n} dx = 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f \equiv 0$ .

Aber wegen  $f_n(1) = 1$  für  $x = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , konvergiert  $f_n$  nicht punktweise gegen  $f \equiv 0$  und wegen  $f_n(-1) = (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x = -1$  konvergiert  $f_n$  nicht.

- (2) Der Raum  $R[a, b]$  mit  $L^2$ -Norm  $\|\cdot\|$  ist **nicht vollständig**, d.h. es existieren Cauchy-Folgen in  $R[a, b]$ , die keinen Grenzwert in  $R[a, b]$  haben. Beispiel: siehe Abb. 1.3 (Rechts). Hier ist  $f(x) \not\equiv 0$ ,  $x \in [a, b]$ .

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 = \|f\|_{L^2},$$

aber  $f(x) \notin R[a, b]$ , denn

$$f(\xi) \neq 0 = \frac{\lim_{h \searrow 0} f(\xi + h) - \lim_{h \searrow 0} f(\xi - h)}{2}.$$

**Definition 1.29** (Orthogonalität).  $f, g \in R[a, b]$  heißen orthogonal, wenn gilt  $(f, g) = 0$ .

Eine Teilmenge  $S \subset R[a, b]$  heißt Orthogonalsystem, wenn alle Elemente aus  $S$  paarweise orthogonal sind, d.h.

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} \|f_i\|^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall f_i, f_j \in S.$$

**Satz 1.30.** Die trigonometrischen Funktionen, für  $k, l \in \mathbb{N}$

$$c_k(x) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \cos(kx) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_l(x) := \sin(lx)$$

bilden auf  $R[a, b]$  bezüglich des  $L^2$ -Skalarprodukts ein Orthogonalsystem und es gilt

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} s_l(x) \, dx = \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

Hier sei

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad \text{Kroneckersymbol.}$$

*Beweis.*

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \, dx = \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \, dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k} (1 - 1) = 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(lx)}_v \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx) \cdot \sin(lx)}_{\substack{u \\ =0}} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx)}_u \underbrace{l \cos(lx)}_{v'} \, dx \\ &= -\frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) c_l(x) \, dx \end{aligned}$$

Für  $l = k$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= - \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx \\ \implies 2 \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx \\ &\stackrel{l=k}{=} \int_0^{2\pi} c_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} s_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - c_k^2(x)) \, dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx &= \pi = \int_0^{2\pi} s_k^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Wenn  $k \neq l$ , dann folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{l^2}{k^2} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx &= 0. \end{aligned}$$

□

## 1.5 Fourier-Entwicklung

**Definition 1.31** (Periodische Funktionen).  $f : \mathbb{R} \rightarrow K$  heißt  $L$ -periodisch ( $L > 0$ ) falls  $f(x + L) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  ( $\Rightarrow f(x + kL) = f(x)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ). Sei  $f$  periodisch und  $p > 0$ . Für  $\tilde{f}(x) := f\left(\underbrace{\frac{L}{p}x}_{\text{Variablentransformation}}\right)$  gilt dann  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow K$  ist  $p$ -periodisch

**Beispiel 1.32.**  $p = 2\pi$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &:= f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \Rightarrow f(x) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \\ \tilde{f}(x + 2\pi) &= f\left(\frac{L}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) \stackrel{f \text{ } L\text{-per}}{=} f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = \tilde{f} \end{aligned}$$

Hier betrachten wir deshalb nur  $2\pi$ -periodische Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow K$ . Weiterhin betrachten wir Funktionen  $f : [0, 2\pi] \rightarrow K$ ,  $f \in R[0, 2\pi]$ ,  $2\pi$ -periodisch.

**Beispiel 1.33** (Trigonometrische Polynome). Für  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$  betrachte

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \left( a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) e^{ikx} + (a_k + ib_k) e^{-ikx} \right) \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \text{ mit } c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k \geq 0 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0 \end{cases} \\ (*) : \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

Für  $a_k, b_k, k > 0$  ergibt sich  $a_k = c_k + c_{-k}$ ,  $b_k = i(c_k - c_{-k})$ .

**Bemerkung 1.34.** Ist  $f$  ein trigonometrisches Polynom, so kann man die Koeffizienten  $a_k, b_k, c_k$  durch Integration ausrechnen, d.h.  $a_k, b_k, c_k$  sind eindeutig.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \quad k > 0 \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx}), \quad L_2\text{-Skalarprodukt} \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei zuerst  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\lambda x} \, dx &= \int_a^b \cos(\lambda x) \, dx + i \int_a^b \sin(\lambda x) \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} i \cos(\lambda x) \Big|_a^b \\ &\stackrel{=}{=} \frac{1}{i} = -i \frac{1}{\lambda i} (\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{\lambda i} e^{i\lambda x} \Big|_a^b \\ \implies \int_0^{2\pi} e^{ikx} \, dx &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_1 x} e^{-ik_2 x} \, dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k_1 - k_2)x} \, dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k_1 \neq k_2 \\ 2\pi, & \text{falls } k_1 = k_2 \quad (\implies k_1 - k_2 = 0) \end{cases}$$

$\implies$  Behauptung für  $c_k$ . Für  $a_k, b_k$  gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \, dx = c_{-k} + c_k = b_k \cdot i$$

□

**Bemerkung 1.35.** Obige Formel gilt auch für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

falls die Reihen gleichmäßig auf  $[0, 2\pi]$  konvergieren.

Frage: Hat jede  $2\pi$ -periodische Funktion die Form  $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  oder kann man sie durch trigonometrische Polynome approximieren?  $\implies$  Motivation für Fourier-Reihen.

**Definition 1.36** (Fourier-Reihe). Sei  $f \in R[a, b]$   $2\pi$ -periodisch. Die Fourier-Koeffizienten von  $f$  sind gegeben durch

$$c_k := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx = \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx})$$

Die (formale) Fourier-Reihe von  $f$  ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit der  $n$ -ten Partialsumme

$$s_n(x) = s_n(f, x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Die Fourier-Reihe läßt sich in der Form schreiben

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx$$

**Satz 1.37.** Sei  $f \in R[a, b]$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten

$c_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  und  $s_n = \sum_{k=1}^n c_k e^{ikx}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

*Beweis.* Notation  $e_n(x) := e^{ikx}$

$$(e_k, e_l) = \int_0^{2\pi} e_{ikx} e^{-ilx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} (f, e_k) \implies (f, e_k) = 2\pi c_k$$

$$(f, s_n) = \sum_{k=-n}^n (f, c_k e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} (f, e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} 2\pi c_k = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

$$(s_n, s_n) = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n \underbrace{c_k \overline{c_l}}_{|c_k|^2} \cdot \underbrace{(e_k, e_l)}_{= \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l \end{cases}}$$

Dann

$$\begin{aligned} \|f - s_n\|^2 &= (f - s_n, f - s_n) \\ &= (f, f) - (f, s_n) - (s_n, f) + (s_n, s_n) \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \end{aligned}$$

□

**Satz 1.38** (Besselsche Umgebung). Sei  $f \in R[0, 2\pi]$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion mit Fourier-Koeffizienten  $c_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \|f\|^2$$

*Beweis.* Aus Satz 1.37

$$2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \|f\|^2 - \underbrace{\|f - s_n\|^2}_{\geq 0} \leq \|f\|^2$$

Die Konvergenz folgt unter Beachtung der Monotonie und Beschränktheit der Folge

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

□

**Bemerkung 1.39.** Sei  $f \in R[0, 2\pi]$   $2\pi$ -periodisch und  $\|f - s_n\|_{L^2}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , d.h. die Fourier-Reihe konvergiert gegen  $f$  in  $L^2$ . Das ist nach Satz 1.37 äquivalent zu

$$\|f\|^2 = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \Leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Frage: Unter welchen Bedingungen für  $f$  gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

mit den Fourier-Koeffizienten  $c_k$ .

Ziel: Zeige die Parsevalsche Gleichung für die Fourier-Koeffizienten  $c_k$ ,  $\{e_k = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $f \in R[a, b] \Rightarrow$  Konvergenz der Fourier-Reihe in  $L^2$ .

**Lemma 1.40.**  $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$  gilt

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)} - \frac{1}{2}$$

*Beweis.*  $\cos(kt) = \frac{1}{2} (e^{ikt} + e^{-ikt})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2} e^{-int} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}}_{\text{geometrische Summenformel}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-int} \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-int} - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}} \\ &\stackrel{\text{Erweitern}}{=} \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \end{aligned}$$

□

**Lemma 1.41.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion. Es gilt für  $x \in [a, b]$  und  $s \in \mathbb{R}$

$$F_s(x) := \int_a^x f(y) \sin(sy) \, dy$$

konvergiert gleichmäßig gegen 0 für  $|s| \rightarrow \infty$  und  $x \in [a, b]$ .

*Beweis.* Sei  $s \neq 0$ .

$$F_s(x) = \int_a^x f(y) \sin(sy) \, dy \stackrel{\text{part. Integr.}}{=} f(y) \frac{1}{s} \cos(sy) \Big|_a^x + \int_a^x \frac{1}{s} \cos(sy) f'(y) \, dy.$$

$f, f'$  stetig auf  $[a, b] \implies \exists M > 0$ , s.d.  $|f(y)| \leq M, |f'(y)| \leq M$  mit  $y \in [a, b]$ . Dann gilt  $|F_s(x)| \leq \frac{2M}{|s|} + \frac{M}{|s|} \cdot (b-a), \forall x \in [a, b]$ . Also konvergiert  $|F_s(x)|$  gleichmäßig gegen 0 für  $|s| \rightarrow \infty$  und  $x \in [a, b]$ .  $\square$

**Lemma 1.42.** Es gilt  $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$  für  $0 < x < 2\pi$  mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen Intervallen  $[\delta, 2\pi - \delta]$  für  $\delta > 0$ .

*Beweis.* Aus Hilfslemma 1.40 folgt für  $0 < x < 2\pi$  und  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^n \int_{\pi}^x \cos(ky) \, dy \\ &= \int_{\pi}^x \left( \sum_{k=1}^n \cos(ky) \right) \, dy \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.40}}{=} \int_{\pi}^x \left( \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})y\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}y\right)} - \frac{1}{2} \right) \, dy \\ &= \underbrace{\int_{\pi}^x \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})y\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}y\right)} \, dy}_{=: F_n(x)} - \frac{1}{2}(x - \pi) \end{aligned}$$

Z.Z.:  $F_n(x)$  konvergiert gleichmäßig gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$ . Die Funktion  $f(y) = \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2})}$  ist auf dem Intervall  $[\delta, 2\pi - \delta]$  stetig differenzierbar, weil  $\frac{y}{2} \neq 0$  auf  $[\delta, 2\pi - \delta]$ , sodass aus Hilfslemma 1.41 folgt

$$F_n(x) = \int_{\pi}^x \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2})} \cdot \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) \, dy \xrightarrow{\text{glm.}} 0$$

für  $n \rightarrow \infty$  und  $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ .  $\square$

**Lemma 1.43.** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

konvergiert gleichmäßig  $\forall x, 0 \leq x \leq 2\pi$ . Insbesondere gilt für  $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

*Beweis.* Lemma 1.42  $\implies \forall x, y \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{(y-\pi)^2}{4} &= \int_y^x \frac{t-\pi}{2} dt \\ &\stackrel{1.42}{=} - \int_y^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k} dt \\ &\stackrel{\text{glm. Konv. Satz 1.15}}{=} - \sum_{k=1}^{\infty} \int_y^x \frac{\sin(kt)}{k} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ky)}{k^2} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{y \text{ fest}} \frac{(x-\pi)^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \quad \forall x \in (0, 2\pi), C \text{ konst}$$

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$  konvergiert gleichmäßig auf  $[0, 2\pi]$  mit Majorante  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ . Bestimme die Konstante  $C$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} dx &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \right) dx \\ \frac{\pi^3}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx}_{=0} + \int_0^{2\pi} C dx \frac{\pi^3}{6} = C \cdot 2\pi \\ C &= \frac{\pi^2}{12} \\ \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} &= \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad x \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

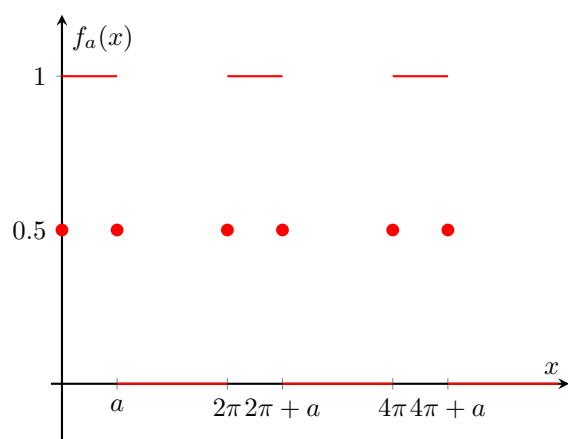
Für  $x = 0$  oder  $x = 2\pi$  folgt die Behauptung durch Grenzübergang, da beide Seiten stetig sind auf  $[0, 2\pi]$   $\square$

**Lemma 1.44.** Sei  $f$  Treppenfunktion,  $f \in R[0, 2\pi]$ ,  $2\pi$  periodisch. Dann  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  in  $L^2[0, 2\pi]$ , d.h. Fourier-Reihe von  $f$  konvergiert im quadratischen Mittel gegen  $f$ .

*Beweis.* Zunächst Spezialfall

$$f_a(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0.5, & x \in \{0, a\} \\ 0, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Es gilt  $\|f_a\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f_a|^2 \, dx = \int_0^a 1 \, dx = a$ .



Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{a}{2\pi} \\
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_a(x) e^{-ikx} \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-1}{ik} \right) e^{-ikx} \Big|_0^a \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{i}{ik} \right) (e^{-ika} - 1) \\
 &\stackrel{k \neq 0}{=} \frac{i}{2\pi k} (e^{-ika} - 1)
 \end{aligned}$$

Für  $k \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned}
 |c_k|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 k^2} \underbrace{(e^{-ika} - 1)(e^{ika} - 1)}_{=1 - e^{ika} - e^{-ika} + 1} \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left(1 - \frac{e^{ika} + e^{-ika}}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos(ka)) \\
 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \underbrace{\frac{a^2}{4\pi^2}}_{a_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_{-k}|^2 + |c_k|^2) \\
 &\stackrel{\cos(-ka)=\cos(ka)}{=} \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos(ka)) \\
 &= \frac{a}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}} - \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \cos(ka)}_{=\frac{(a-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}} \\
 &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{(a-\pi)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{12} \\
 &= \frac{a}{2\pi} \\
 \implies 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= a = \|f_a\|_{L^2}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{Satz 1.37}} \|f_a - s_n(f_a)\|_{L^2}^2 = \|f_a\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei  $f \in R[0, 2\pi]$  eine beliebige  $2\pi$ -periodische Treppenfunktion mit Sprungstellen

$$a_j \in (0, 2\pi) \quad j = 1, \dots, l$$

Jede Treppenfunktion  $f$  lässt sich schreiben als

$$f(x) = \sum_{j=1}^l d_j \underbrace{f_{a_j}(x)}_{\text{Spezialfunktion (als } f_a(x))}, x \in [0, 2\pi]$$

$f_{a_j}$  Spezielle Treppenfunktion mit Sprungstelle  $a = a_j$  und  $f_{a_j}(x) \in \{0, 1\} \quad \forall j, x \neq a_j$ . Dann

$\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\| \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$ . Betrachte

$$s_n(f) = \sum_{j=1}^l d_j s_n(f_{a_j})$$

und

$$\|f - s_n(f)\| = \left\| \sum_{j=1}^l d_j (f_{a_j} - s_n(f_{a_j})) \right\| \leq \sum_{j=1}^l |d_j| \underbrace{\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\|}_{\xrightarrow{L^2} 0} \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$$

□

**Satz 1.45.** Sei  $f \in R[0, 2\pi]$  eine  $2\pi$ -periodische Treppenfunktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  im quadratischen Mittel gegen  $f$  und es gilt die Parsevalsche Gleichung (sog. Vollständigkeitsrelation)

$$\frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}_{=\|f\|^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $f$  reellwertig (sonst werden Real- und Imaginärteil getrennt behandelt) und  $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 2\pi]$  (sonst betrachte  $\bar{f}(x) := \frac{f(x)}{M}$ ,  $M = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$ ). Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon$   $2\pi$ -periodische Treppenfunktionen  $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Eigenschaften

$$-1 \leq \varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \leq 1$$

und

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon| \leq \frac{1}{16\pi} \varepsilon^2$$

Konstruktion von  $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$  siehe Rannacher. Dann,

$$|f - \varphi_\varepsilon|^2 \leq |\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon|^2 \leq (|\psi_\varepsilon| + |\varphi_\varepsilon|)(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \underset{\substack{|\psi_\varepsilon| < 1 \\ |\varphi_\varepsilon| < 1}}{\leq} 2(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)$$

und

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|^2 = \int_0^{2\pi} |f - \varphi_\varepsilon|^2 dx \leq 2 \int_0^{2\pi} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx \leq 2 \frac{\varepsilon^2}{16\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Weiter gilt:  $\varphi_\varepsilon$  Treppenfunktion  $\xrightarrow{1.44}$  Fourier-Reihe von  $\varphi_\varepsilon$  konvergiert gegen  $\varphi_\varepsilon$  in  $L^2$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \|s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Aus Satz 1.38 folgt

$$\|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\|^2 \leq \|f - \varphi_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Dann gilt  $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\| &= \|f - s_n(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon\| \\ &\leq \|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\| + \|\varphi_\varepsilon - s_n(\varphi_\varepsilon)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\implies s_n(f) \xrightarrow{L^2} f, n \rightarrow \infty$$

□

**Bemerkung 1.46.** Konvergenz in  $L^2$  ist „sehr schwach“ Für „glattere“ Funktionen konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig.

**Satz 1.47.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar, d.h.  $\exists$  Unterteilung von  $[0, 2\pi]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 2\pi$$

mit  $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$  stetig differenzierbar für  $j = 1, \dots, m$ . Dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$ .

*Beweis.*  $f$  stetig  $\implies f \in R[0, 2\pi] \implies$  Fourier-Reihe von  $f$  konvergiert gegen  $f$  in  $L^2$ , d.h.  $\|s_n(f) - f\| \xrightarrow{L^2} 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Betrachte  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi(x) = \phi_j(x)$ ,  $x \in (t_{j-1}, t_j)$ ,  $\phi_j : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{C}$  stetige Abbildung von  $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ . Definiere  $\phi$  in  $t_j$  entsprechend (möglich, da  $\phi$  eine stückweise stetige Funktion ist). Definition von  $R[0, 2\pi] \implies \phi \in [0, 2\pi] \implies$  Für die Fourier-Koeffizienten von  $\phi$  gilt:  $\gamma_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx$  und  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\phi\|^2 < \infty$ . Berechne Fourier-Koeffizienten  $c_k$  von  $f$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ &\stackrel{\text{part. Integr.}}{=} \frac{1}{2\pi} f(x) \underbrace{\frac{i}{k} e^{-ikx}}_{=0} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f'(x)}_{\phi(x)} \frac{i}{k} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-i}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-i}{k} \gamma_k \\ &\implies |c_k| = \frac{1}{k} |\gamma_k| \end{aligned}$$

Es gilt  $|\alpha \cdot \beta| \leq \frac{1}{2} |\alpha|^2 + \frac{1}{2} |\beta|^2$ , da Quadrate größer 0 sind

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + \frac{|\gamma_k|^2}{2} \\ &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty \\ &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \text{ absolut konvergent} \\ &\implies \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}}_{\text{Fourier-Reihe von } f} \end{aligned}$$

konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion  $g$ , die stetig ist. Also  $s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} g$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\implies s_n(f) \xrightarrow{L^2} g$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Andererseits  $s_n(f) \xrightarrow{L^2} f$ ,  $n \rightarrow \infty$

$$\implies \|f - g\|_{L^2} = 0$$

$$\implies f \equiv g, \text{ weil } f \text{ und } g \text{ stetig sind}$$

$$\implies s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} f, n \rightarrow \infty$$

□