

0.1 Mittelwertsatz

Bemerkung 0.1. Reminder:

(1) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt (HDI):

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x+sh) \, ds \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 f'(x+sh) \cdot h \, ds \\ &= \left(\int_0^1 f'(x+sh) \, ds \right) \cdot h. \end{aligned}$$

(2) Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \tau \in (0, 1)$ sodass:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\tau h) \cdot h.$$

(3) Sei $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann sei:

$$\int_a^b A(s) \, ds := \left(\int_a^b a_{i,j}(s) \, ds \right)_{i,j=1}^{m,n}$$

Satz 0.2 (Mittelwertsatz). Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$ sodass $x+sh \in D$, für $s \in [0, 1]$. Dann gilt:

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 \nabla f(x+sh) \, ds, h \right)_2 = \left(\int_0^1 \nabla f(x+sh) \, ds \right)^T \cdot h.$$

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, mit Jacobi-Matrix $J_f(x)$, dann gilt:

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x+sh) \, ds \right) h.$$

Beweis. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sei $g_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_j(s) := f_j(x+sh)$. Dann gilt:

$$f_j(x+h) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_0^1 g_j'(s) \, ds \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x+sh) \cdot h_i \, ds.$$

Ist $m = 1$, so gilt:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+sh) \, ds \cdot h_i = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+sh) \, ds \right) \cdot h_i \\ &= \left(\int_0^1 \nabla f(x+sh) \, ds, h \right)_2 \end{aligned}$$

Ist $m \geq 2$, so gilt analog zu oben:

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x+sh) \, ds \right) \cdot h.$$

□

Bemerkung 0.3. Für $m = 1$, d.h. $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ gilt sogar für ein bestimmtes $\tau \in (0, 1)$:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (\nabla^T f(x+sh) \cdot h) \, ds = \nabla^T f(x+\tau h) \cdot h.$$

Für $m \geq 2$ im Allgemeinen aber nicht (da $\tau \in [0, 1]$ nicht für alle Komponenten gleich gewählt werden kann):

$$f(x+h) - f(x) \neq J_f(x+\tau h) \cdot h.$$

Lemma 0.4. Seien $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ stetig. Dann gilt:

$$\left\| \int_a^b v(s) \, ds \right\|_2 \leq \int_a^b \|v(s)\|_2 \, ds, \quad \left\| \int_a^b A(s) \, ds \right\|_2 \leq \int_a^b \|A(s)\|_2 \, ds$$

Beweis. Sei $u \in \mathbb{R}^n$, $u = \int_a^b v(s) \, ds = \begin{pmatrix} \int_a^b v_1(s) \, ds \\ \vdots \\ \int_a^b v_n(s) \, ds \end{pmatrix}$ und $K = \|u\|_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} K^2 &\stackrel{\ell_2 \text{ Norm}}{=} (u, u)_2 = \left(\int_a^b v(s) \, ds, u \right)_2 = \int_a^b (v(s), u)_2 \, ds \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_a^b \|v(s)\|_2 \cdot \|u\|_2 \, ds = K \cdot \int_a^b \|v(s)\|_2 \, ds \\ \implies K &= \left\| \int_a^b v(s) \, ds \right\|_2 \leq \int_a^b \|v(s)\|_2 \, ds. \end{aligned}$$

Der Beweis für $A(s)$ folgt ganz analog mit $u = \int_a^b A(s) \, ds \in \mathbb{R}^{m \times n}$. □

Definition 0.5. $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, genau dann wenn: für alle $x, x' \in D$ und für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt $\lambda \cdot x + (1 - \lambda)x' \in D$.

Geometrisch: Für zwei Punkte in D liegt die Verbindungsstrecke der beiden Punkte stets ganz in D .

Korollar 0.6. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ sodass $K_\varepsilon(x) \subset D$. Dann gilt:

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq M \cdot \|y - x\|_2 \quad \forall y \in K_\varepsilon$$

mit $M := \sup_{z \in K_\varepsilon(x)} \|J_f(z)\|_2$, das heißt f ist lokal Lipschitz-stetig.
Sei D konvex, dann gilt

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq M \cdot \|y - x\|_2 \quad \forall x, y \in D$$

mit $M := \sup_{z \in D} \|J_f(z)\|_2$, das heißt f ist auf D Lipschitz-stetig.

Beweis. Aus Lemma ?? folgt:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^1 J_f(x+sh)h \, ds \right\|_2 &\leq \int_0^1 \|J_f(x+sh)h\|_2 \, ds \\
&\leq \int_0^1 \|J_f(x+sh)\|_2 \|h\|_2 \, ds \\
&\leq \sup_{0 < s < 1} \|J_f(x+sh)\|_2 \cdot \|h\|_2 \\
\implies \|f(x+h) - f(x)\|_2 &= \left\| \int_0^1 J_f(x+sh)h \, ds \right\|_2 \leq M \cdot \|x+h-x\|_2.
\end{aligned}$$

Sei D nun konvex. Für $x, y \in D$ gilt dann:

$$z = ty + (1-t)x = x + t(y-x) \in D, \quad t \in [0, 1].$$

Sei $g(t) := f(x + t(y-x))$ für $t \in [0, 1]$. Dann gilt für $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$f_i(y) - f_i(x) = g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g'_i(s) \, ds = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x + s(y-x))}{\partial x_j} (y_j - x_j) \, ds.$$

Und damit in Vektorform:

$$\begin{aligned}
\|f(y) - f(x)\|_2 &= \left\| \int_0^1 J_f(x + s(y-x)) \cdot (y-x) \, ds \right\|_2 \\
&\stackrel{\text{Lemma ??}}{\leq} \int_0^1 \|J_f(x + s(y-x)) \cdot (y-x)\|_2 \, ds \\
&\leq \int_0^1 \|J_f(x + s(y-x))\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \, ds \\
&\leq \sup_{0 < s < 1} \|J_f(x + s(y-x))\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \\
&\stackrel{D \text{ konvex}}{\leq} \sup_{z \in D} \|J_f(z)\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \\
&= M \cdot \|y-x\|_2.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 0.7. Obige Lipschitz-Konstante liefert eine Abschätzung für die Ableitungen / Jacobi-Matrix von f .

0.2 Taylor-Entwicklung

Bemerkung 0.8. Reminder - Höhere Ableitungen:

(1) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Seien alle partiellen Ableitungen

$$\partial_i f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \partial_i f = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_m \end{pmatrix}, \quad \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

wieder partiell differenzierbar. Dann ist f zweimal differenzierbar auf D (mit Ableitungen $\partial_j \partial_i f$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$).

Allgemein: (induktiv) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist $(k+1)$ -mal partiell differenzierbar, wenn f k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung $\partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f$ ($i_k, \dots, i_1 \in \{1, \dots, n\}$) partiell differenzierbar sind.

- (2) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist k -mal stetig partiell differenzierbar, wenn f k -mal differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der k -ten Ordnung stetig sind ($f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$).

- (3) Es gilt:

$$\begin{aligned} f \in C^1(D, \mathbb{R}^m) &\iff \partial_i f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ ist stetig } \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff \partial_i f_k : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig } \forall i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, m\} \\ &\iff f \text{ ist total differenzierbar in } D \text{ und } x \mapsto J_f(x) = (\partial_i f_k)_{i,k} \text{ stetig} \end{aligned}$$

- (4) Ist $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$, dann sind die Ableitungen der $k-1$ -ten Ordnung $\partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ total differenzierbar, weil stetig partiell differenzierbar. Also ist $\partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f$ stetig und damit sind alle Ableitungen $k-1$ -ter Ordnung stetig. Ananolg folgt induktiv, dass alle Ableitungen j -ter Ordnung mit $j \leq k$ stetig auf D sind.

- (5) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Existieren $\partial_i f, \partial_j f$ und $\partial_j \partial_i f$ auf D ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) und $\partial_j \partial_i f$ stetig in $a \in D$. Dann existiert $\partial_i \partial_j f$ und es gilt

$$\partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a).$$

- (6) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$. Sei $\pi \in \mathcal{S}_k$ eine Permutation, dann gilt:

$$\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f = \partial_{i_{\pi(k)}} \dots \partial_{i_{\pi(1)}} f, \quad \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}.$$

Reminder - Taylor-Entwicklung in $\mathbb{R}$:

- (1) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $(r+1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + R_{r+1}^f(x, h).$$

- (2) Für das Restglied in Lagrange-Form gilt ($\theta \in (0, 1)$):

$$R_{r+1}^f(x, h) = \frac{f^{(r+1)}(x + \theta h)}{(r+1)!} h^{r+1}.$$

- (3) Für das Restglied in Integral-Form:

$$R_{r+1}^f(x, h) = \frac{h^{r+1}}{r!} \int_0^1 f^{(r+1)}(x + th) (1-t)^r dt$$