

0.1 Extremwertaufgaben

Definition 0.1 (lokales Maximum/Minimum). Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in D$ heißt lokales Minimum (Maximum) von f , falls eine Umgebung $K_\delta(x) \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$f(x) \leq f(y), \forall y \in K_\delta(x) \cap D$$

($f(x) \geq f(y), \forall y \in K_\delta(x) \cap D$). Falls

$$f(x) < f(y), \forall y \in K_\delta(x) \cap D \setminus \{x\}$$

($f(x) > f(y)$), dann heißt x striktes lokales Minimum (Maximum).

Satz 0.2 (Notwendige Bedingung für lokales Extremum (Min oder Max)). Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x \in D$ ein lokales Extremum von f . Dann gilt: $\nabla f(x) = 0$.

Beweis. Für $i = 1, \dots, n$, betrachte $g_i(t) := f(x + te_i)$. Da D offen sind alle g_i auf einem Intervall $(-\delta, \delta)$ definiert für ein $\delta > 0$, und differenzierbar. $g_i(t)$ hat in $t = 0$ ein lokales Minimum/Maximum $\implies \left. \frac{dg_i(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$. f total differenzierbar

$$\implies 0 = \left. \frac{dg_i(t)}{dt} \right|_{t=0} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \delta_{ij} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

□

Bemerkung 0.3. Die Umkehrung ist falsch, z.B. $f(x) = x^3$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, hat in $x = 0$ $\nabla f(x) = 0$, aber $x = 0$ ist kein Max/Min von $f(x) = x^3$.

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ hat in $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\nabla f(x) = 0$, aber $x = 0$ ist kein Max/Min von f .

Satz 0.4 (Hinreichende Bedingung für lokales Extremum). Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $x \in D$ mit $\nabla f(x) = 0$. Dann gilt:

1. $H_f(x)$ positiv definit $\implies x$ striktes lokales Minimum von f .
2. $H_f(x)$ negativ definit $\implies x$ striktes lokales Maximum von f .
3. $H_f(x)$ indefinit $\implies x$ kein lokales Extremum.

Beweis. Nach Taylor gilt lokal um x :

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2}(H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x, h)$$

mit $\frac{\omega_2(x, h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

1. Sei $H_f(x)$ positiv definit. Betrachte $\min_{\|h\|=1} (H_f(x)h, h)_2$. Die Menge $\{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$ ist kompakt $\implies (H_f(x)h, h)_2$ nimmt ihr Minimum auf $\{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$ als stetige

Funktion an. $\implies \alpha := \min_{\|h\|=1} (H_f(x)h, h)_2 > 0$, da $H_f(x)$ positiv definit ist. Sei $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt

$$(H_f(x)h, h)_2 = \|h\|^2 \underbrace{\left(H_f(x) \cdot \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} \right)_2}_{\geq \alpha} \geq \alpha \|h\|^2 > 0$$

Wähle $\delta > 0$ klein, sodass $\forall \|h\| < \delta$ gilt $|\omega_2(x, h)| \leq \frac{\alpha}{4} \|h\|^2$ (weil $\omega_2(x, h) = o(\|h\|^2)$).
Damit gilt $\forall h, \|h\| < \delta$

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{(\nabla f(x), h)_2}_{=0} + \frac{1}{2} (H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x, h) \geq f(x) + \frac{\alpha}{2} \|h\|^2 - \frac{\alpha}{4} \|h\|^2 > f(x)$$

$\implies x$ striktes lokales Minimum von f .

2. Ersetze f durch $-f$, dann 1)

3. $\exists h \in \mathbb{R}^n$ mit $(H_f(x)h, h)_2 = \alpha > 0$, sodass

$$f(x+th) \stackrel{\text{Taylor}}{=} f(x) + \frac{1}{2} t^2 \cdot \alpha + \omega_2(x, th) = f(x) + t^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \underbrace{\frac{\omega_2(x, th)}{t^2}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0} \right) \text{ für } 0 < t \ll 1$$

Außerdem $\exists \eta \in \mathbb{R}^n$ mit $(H_f(x)\eta, \eta)_2 = \beta < 0$. Analog $\implies f(x+t\eta) \leq f(x) + \beta \frac{t^2}{4} < f(x)$
für $0 < t \ll 1$. $\implies f(x)$ kein Maximum/Minimum.

□

Beispiel 0.5. 1. $f(x, y) := x^2 + 2y^2 \implies \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} = 0$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ positiv definit. $\implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ striktes lokales Minimum (sogar global).

$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in D$ globales Minimum
 $f(x) < f(y) \quad \forall y \in D \setminus \{x\}$ striktes globales Minimum

2. $f(x, y) := x^2 - y^2 \implies \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = 0$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
indefinit. $\implies 0 \in \mathbb{R}^2$ kein lokales Extremum.

3. $f_1(x, y) := x^2 + y^4$, $f_2(x, y) := x^2$, $f_3(x, y) := x^2 + y^3$ Es gilt

$$\nabla f_i(0) = 0 \in \mathbb{R}^2, \quad H_{f_i}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Die Hesse-Matrix ist positiv semidefinit. Es gilt

für f_1 : Punkt 0 ist ein striktes lokales Maximum,
für f_2 : Punkt 0 ist ein lokales Minimum, aber nicht strikt,
für f_3 : Punkt 0 ist ein Sattelpunkt.

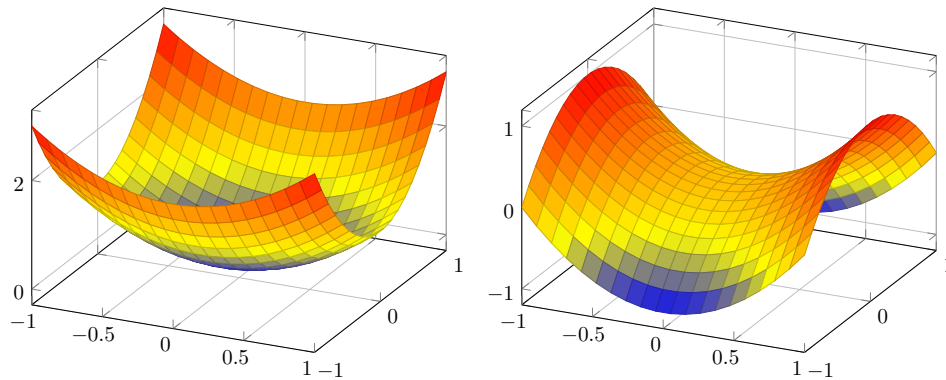


Abbildung 1: Links: $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ ist ein Paraboloid, Rechts: $f(x, y) = x^2 - y^2$ ist eine Sattelfläche

0.2 Implizite Funktionen und Umkehrabbildung.

Frage: Umkehrabbildung: Auflösen von $x = g(y)$, d.h.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, \dots, y_n) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = x_1 - g_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ 0 = x_n - g_n(y_1, \dots, y_n) \end{array} \right\} \quad (*)$$

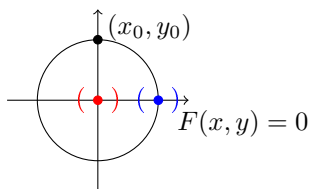
n Gleichungen, n Unbekannte $y_1, \dots, y_n$. Gesucht: Abbildung f mit $y = f(x)$ ($f = g^{-1}$), s.d. $(x, f(x))$ Gleichung (*) löst (lokal um $(x_0, y_0 = f(x_0))$).

Implizite Funktion m Gleichungen, m Unbekannte $y_1, \dots, y_m$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ 0 = F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{array} \right\} \quad (**)$$

$0 = F(x, y)$ Auflösen nach y , d.h. Gesucht: Abbildung f , s.d. $y = f(x)$ mit $(x, f(x))$ löst (**) (lokal um eine Lösung $(x_0, y_0) : F(x_0, y_0) = 0$)

Beispiel 0.6. $m = 1, n = 1, F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$



An der Stelle $x_0 = 0, y_0 = 1$ gilt $F(0, 1) = 0$,
also $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$.

$$\Rightarrow \underline{f(x) := \sqrt{1 - x^2}} \text{ für } |x| < 1$$

erfüllt $F(x, f(x)) = 0, |x| < 1$.

Für $x_0 = 1, y_0 = 0$ hingegen gibt es keine Umgebung von $x_0 = 1$, sodass

$$\underline{\exists f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } F(x, f(x)) = 0.}$$

Satz 0.7 (Satz über implizite Funktionen). Sei $D^x \subset \mathbb{R}^n$ offen, $D^y \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F^1 \in C^1(D^x \times D^y, \mathbb{R}^m)$ (stetig differenzierbar) und $(\hat{x}, \hat{y}) \in D^x \times D^y$ mit $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$. Die $m \times m$ Matrix

$$D_y F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

sei im Punkt $(\hat{x}, \hat{y})$ invertierbar. Dann gilt:

1. $\exists$ offene Umgebungen $U(\hat{x}) \subset D^x$, $U(\hat{y}) \subset D^y$ um $\hat{x}$ und $\hat{y}$ und $\exists$ eine stetige Funktion $f: U(\hat{x}) \rightarrow U(\hat{y})$, s.d.

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U(\hat{x})$$

2. f ist eindeutig bestimmt, d.h. $F(x, y) = 0$ für $(x, y) \in U(\hat{x}) \times U(\hat{y}) \Leftrightarrow y = f(x)$
3. f ist in $\hat{x}$ stetig differenzierbar und $J_f(\hat{x}) = D_x f(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist

$$D_x f(\hat{x}) = -(D_y F(\hat{x}, \hat{y}))^{-1} D_x F(\hat{x}, \hat{y}).$$

Beweis. 1. O.B.d.A. sei $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$ (sonst betrachte $F(x, y) - F(\hat{x}, \hat{y})$). Die Matrix $J_y := D_y F(0, 0)$ ist regulär. Definiere $G: D^x \times D^y \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G(x, y) := y - J_y^{-1} F(x, y)$. G ist stetig differenzierbar und erfüllt: $G(0, 0) = 0$ und $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow G(x, y) = y$. Jacobi-Matrix von $G(x, y)$ bzgl. y :

$$D_y G(x, y) = \mathbb{I} - J_y^{-1} D_y F(x, y) \text{ und insb. } D_y G(0, 0) = \mathbb{I} - J_y^{-1} J_y = 0.$$

F stetig differenzierbar $\implies D_y G(x, y)$ stetig $\implies \exists K_r^x(0) \times K_r^y(0) \subset D^x \times D^y$ mit Radius r , sodass $\|D_y G(x, y)\|_2 \leq \frac{1}{2}$, $(x, y) \in K_r^x(0) \times K_r^y(0)$. $G(0, 0) = 0 \implies \exists K_s^x(0) \subset K_r^x(0)$ mit Radius $0 < s \leq r$ sodass

$$\|G(x, 0)\|_2 \leq \frac{1}{2}r, \quad x \in K_s^x(0)$$

Ziel: Konstruiere $f: K_s^x(0) \rightarrow K_r^y(0)$ stetig mit $G(x, f(x)) = f(x)$ ($\Leftrightarrow F(x, f(x)) = 0$). Betrachte Fixpunktgleichung

$$G(x, y) = y, \quad x \in K_s^x(0).$$

Für $(x, y_1), (x, y_2) \in K_s^x(0) \times K_r^y(0)$ gilt

$$\|G(x, y_1) - G(x, y_2)\|_2 \stackrel{\text{MWS}}{\leq} \sup_{(x, y) \in K_s^x(0) \times K_r^y(0)} \|D_y G(x, y)\|_2 \cdot \|y_1 - y_2\|_2 \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_2.$$

Sei $y \in \overline{K_r^y(0)}$

$$\|G(x, y)\|_2 \leq \|G(x, y) - G(x, 0)\|_2 + \|G(x, 0)\|_2 \leq \frac{1}{2} \|y\|_2 + \frac{1}{2}r \leq r$$

d.h. $G(x, \cdot)$ ist eine Selbstabbildung der abgeschlossenen Kugler $\overline{K_r^y(0)}$.

Außerdem, $\|G(x, y_1) - G(x, y_2)\|_2 \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_2 \implies G(x, \cdot)$ ist eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $L = \frac{1}{2}$. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt $\forall x \in K_s^x(0) \exists!$ ein Fixpunkt $y(x) \in K_r^y(0)$ von $G(x, \cdot)$:

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)}(x), \quad y^{(k)}(x) = G(x, y^{(k-1)}(x)), \quad k \in \mathbb{N}$$

mit Startpunkt $y^{(0)}(x) := 0$. Es gilt die Fehlerabschätzung $\forall x \in K_s^x(0)$:

$$\left\| y(x) - y^{(k)}(x) \right\|_2 \leq 2^{-k} \left\| y^1(x) - y^{(0)}(x) \right\|_2 = 2^{-k} \|G(x, 0) - 0\|_2 \leq 2^{-k} \frac{1}{2} r$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$y^{(k)}(x) = G(x, y^{(k-1)}(x)) = y^{(k-1)}(x) - J_y^{-1} \underbrace{F(x, y^{(k-1)}(x))}_{\text{stetig}}$$

Induktiv folgt $y^{(k)}(x)$ stetig in $x \in K_s^x(0)$. Definiere $f(x) = y(x)$, $f: K_s^x(0) \rightarrow K_r^y(0)$ und nach Konstruktion gilt

$$G(x, f(x)) = f(x), \quad x \in K_s^x(0).$$

Aus der Abschätzung $\|y(x) - y^{(k)}(x)\| \leq 2^{-k-1} \cdot r$, $x \in K_s^x(0)$ folgt, dass $y^{(k)}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y(x)$ gleichmäßig auf $K_s^x(0)$ konvergiert $\implies y(x)$ stetig. $\implies$ 1. Behauptung für $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$ mit $U(\hat{x}) := K_s^x(0)$ und $U(\hat{y}) := K_r^y(0)$.

2. Die Eindeutigkeit von $y = f(x)$ folgt nun aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Für $x \in K_s(\hat{x})$ ist der Fixpunkt der Gleichung $G(x, y) = y$ eindeutig bestimmt.

□