0.0.1 Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme

Motivation: Es sei ein quadratisches Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= b_1 \\ \vdots \qquad\quad & \quad \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= b_n, \end{aligned}$$

eine Vektorform $f(x) = b$ und ein $b \in \mathbb{K}^n$ gegeben, s.d.

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : D \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n.$$

Ziel: $x = f^{-1}(b)$ finden als Grenzwert einer Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

Ansatz: Definiere $g(x) := x - \sigma(f(x) - b)$ für ein $\sigma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und suche Fixpunkt von $g\colon D \to \mathbb{K}^n$ $(x = g(x))$.

Fixpunktiteration: Startwert $x^{(0)}$. Iterationsschritt

$$x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Falls f stetig, dann ist auch g stetig. Damit folgt, falls $x^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} x$, dann $g\left(x^{(k-1)}\right) \xrightarrow{k \to \infty} g(x)$. Damit folgt

$$\underbrace{x^{(k)}}_{\xrightarrow{k\to\infty} x} = \underbrace{g\left(x^{(k-1)}\right)}_{\xrightarrow{k\to\infty} g(x)}.$$

Für $k \to \infty$, folgt also $x = g(x)$, also ist x Fixpunkt. Damit folgt $x = g(x) = x - \sigma(f(x) - b) \implies f(x) = b$.

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Fixpunktiteration?

Definition 0.1 (Lipschitz-Stetigkeit)**.** Eine Funktion $g\colon D \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante $L < \infty$ existiert, s.d.

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in D.$$

Falls $L < 1$ heißt g Kontraktion (bezügl. Norm $\|\cdot\|$).

Satz 0.2 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** Sei $g\colon D \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine Funktion mit den Eigenschaften

1) $g(M) = M$ für ein $M \subseteq D$, M abgeschlossen
2) g ist Kontraktion auf M, d.h. $\exists L < 1$, s.d. $\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|$, $\forall x, y \in M$.

Dann gilt

(i) Es existiert genau ein Fixpunkt $x^* \in M$ von g.

(ii) $\forall x^{(0)} \in M$ ist die Iterationsfolge $x^{(k)} = g\left(x^{(k-1)}\right)$ wohldefiniert $(x^{(k)} \in M)$ und $x^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} x^*$.

(iii) Es gilt die Abschätzung:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Beweis. (i) Seien $x, x' \in M$ zwei Fixpunkte. Dann

$$\|x - x'\| = \|g(x) - g(x')\| \leq L\|x - x'\|.$$

Damit folgt

$$\underbrace{(1-L)}_{>0}\underbrace{\|x - x'\|}_{\geq 0} \leq 0 \implies \|x - x'\| = 0 \implies x = x'.$$

(ii) $g(M) = M \implies x^{(k)} = g\left(x^{(k-1)}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ ist wohldefiniert, d.h. $x^{(k)} \in M$, $\forall k \in \mathbb{N}$, falls $x^{(0)} \in M$.

Z.z.: $x^{(k)}$ konvergiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} \in M$, also g.z.z.: $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

$$\begin{aligned}
\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| &= \left\|g\left(x^{(k)}\right) - g\left(x^{(k-1)}\right)\right\| \\
&\leq L\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \\
&= L\left\|g\left(x^{(k-1)}\right) - g\left(x^{(k-2)}\right)\right\| \\
&\leq L \cdot L \cdot \|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\| \\
&\leq \underbrace{L \cdot \ldots \cdot L}_{k}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\
&= L^k\|x^{(1)} - x^{(0)}\|
\end{aligned}$$

Seien k, m beliebig. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| &= \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)} + x^{(k+m-1)} - \ldots x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&\leq \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}\| + \ldots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&= L^{m-1}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + L^{m-2}\|x^{k+1} - x^k\| + \ldots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&= \left(L^{m-1} + L^{m-2} + \ldots + 1\right)\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&= \frac{1-L^m}{1-L}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&\leq \frac{1-L^m}{1-L}L^k\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\
&\leq \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\
&\overset{L<1}{<} \varepsilon \qquad \text{für } k \text{ groß genug.}
\end{aligned}$$

Also ist $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M und es existiert ein $x^* \in M$, s.d. $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x^* konvergiert. x^* ist ein Fixpunkt von g, weil

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} g\left(x^{(k-1)}\right) \overset{g \text{ stetig}}{=} g\left(\lim_{k\to\infty} x^{(k-1)}\right) = g(x^*).$$

(iii) Für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|\underbrace{x^{(k+m)}}_{\xrightarrow{m\to\infty} x^*} - x^{(k)}\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \implies \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

$\square$

Bemerkung 0.3. Für den Beweis ist wichtig, dass der grundlegende Raum vollständig ist, d.h. dass alle Cauchy-Folgen in diesem Raum konvergieren.

Bemerkung 0.4 (Anwendung: Lineare Gleichungssysteme)**.** $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär und $b = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$. Da A regulär, hat das LGS $Ax = b$ genau eine Lösung $x^* = A^{-1}b$. Sei $g(x) := x - \sigma(Ax - b)$ mit $\sigma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Fixpunktiteration $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \sigma(Ax^{(k-1)} - b)$, $k \in \mathbb{N}$ konvergiert, wenn g kontraktiv ist. Zum Beispiel in ℓ_2:

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(y)\|_2 &= \|x - \sigma(Ax - b) - y + \sigma(Ay - b)\|_2 \\
&= \|x - y - \sigma A(x - y)\|_2 \\
&= \|(\mathbb{I} - \sigma A)(x - y)\|_2 \\
&\leq \|\mathbb{I} - \sigma A\|_2 \|x - y\|_2,
\end{aligned}$$

d.h. g kontraktiv, falls $|\mathbb{I} - \sigma A\|_2 < 1$.

Frage: Wahl von σ? Wähle $\sigma = \|A\|_\infty^{-1} = \frac{1}{\|A\|_\infty}$, falls A hermitesch und positiv definit (= „Richardson Iteration“). Zu überprüfen $\left\|\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty}\right\|_2 < 1$. Da A positiv definit und hermitesch, sind alle Eigenwerte $\lambda > 0$. Es gilt $\forall$ EW: $0 < \lambda \leq \|A\|_\infty$. Für EW von $\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty}$ gilt $\mu = 1 - \frac{\lambda}{\|A\|_\infty}$, λ Eigenwert von A. Also $0 \leq \underbrace{1 - \frac{\lambda}{\|A\|_\infty}}_{=\mu} < 1$, mit **??** folgt $\left\|\underbrace{\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty}}_{\text{hermitesch}}\right\|_2 < 1$. Falls A hermitesch und positiv definit, ist also die Richardson Iteration konvergent.

> **Definition 0.5** (Starke Monotonie)**.** Eine Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt stark monoton, wenn eine Konstante $m > 0$ existiert, s.d. $\forall x, y \in D$ gilt
>
> $$(f(x) - f(y), x - y)_2 \geq m\|x - y\|_2^2.$$

Bemerkung 0.6 (Anwendung: Nichtlineare Gleichungssysteme)**.** Sei $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig mit L und stark monoton mit $m > 0$. Betrachte $f(x) = b$, $g(x) := x - \theta(f(x) - b)$.

Frage: Wahl von θ, s.d. $\forall x^{(0)} \in D$ die Fixpunktiteration konvergiert? Es ist

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(y)\|_2^2 &= \|x - \theta(f(x) - b) - y + \theta(f(y) - b)\|_2^2 \\
&= \|x - y - \theta(f(x) - f(y)\|_2^2 \\
&= \|x - y\|_2^2 - 2\theta(x - y, f(x) - f(y))_2 + \theta^2\|f(x) - f(y)\|_2^2 \\
&\leq \|x - y\|_2^2 - 2\theta m\|x - y\|_2^2 + \theta^2 L^2\|x - y\|_2^2 \\
&= (1 - 2\theta m + \theta^2 L^2)\|x - y\|_2^2.
\end{aligned}$$

Die Fixpunktiteration konvergiert, falls $1 - 2\theta m + \theta^2 L^2 < 1$, d.h. für $\theta \in \left(0, \frac{2m}{L^2}\right)$. Dann existiert ein $x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ mit $g(x^*) = x^*$. Ist x^* eindeutig? Seien x, x' zwei Lösungen. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &= (\underbrace{f(x) - b + b - f(x')}_{=0}, x - x')_2 \\
&= (f(x) - f(x'), x - x')_2 \\
&\overset{f \text{ stark monoton}}{\geq} m\|x - x'\|_2^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Also $x = x'$, damit ist x^* eindeutig.