

0.1 Mittelwertsatz

Bemerkung 0.1. Reminder:

(1) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt (HDI):

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x+sh) ds \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 f'(x+sh) \cdot h ds \\ &= \left(\int_0^1 f'(x+sh) ds \right) \cdot h. \end{aligned}$$

(2) Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \tau \in (0, 1)$ sodass:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\tau h) \cdot h.$$

(3) Sei $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann sei:

$$\int_a^b A(s) ds := \left(\int_a^b a_{i,j}(s) ds \right)_{i,j=1}^{m,n}$$

Satz 0.2 (Mittelwertsatz). Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$ sodass $x+sh \in D$, für $s \in [0, 1]$. Dann gilt:

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 \nabla f(x+sh) ds, h \right)_2 = \left(\int_0^1 \nabla f(x+sh) ds \right)^T \cdot h.$$

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, mit Jacobi-Matrix $J_f(x)$, dann gilt:

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x+sh) ds \right) h.$$

Beweis. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sei $g_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_j(s) := f_j(x+sh)$. Dann gilt:

$$f_j(x+h) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_0^1 g_j'(s) ds \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x+sh) \cdot h_i ds.$$

Ist $m = 1$, so gilt:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+sh) ds \cdot h_i = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+sh) ds \right) \cdot h_i \\ &= \left(\int_0^1 \nabla f(x+sh) ds, h \right)_2 \end{aligned}$$

Ist $m \geq 2$, so gilt analog zu oben:

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x+sh) ds \right) \cdot h.$$

□

Bemerkung 0.3. Für $m = 1$, d.h. $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ gilt sogar für ein bestimmtes $\tau \in (0, 1)$:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (\nabla^T f(x+sh) \cdot h) \, ds = \nabla^T f(x+\tau h) \cdot h.$$

Für $m \geq 2$ im Allgemeinen aber nicht (da $\tau \in [0, 1]$ nicht für alle Komponenten gleich gewählt werden kann):

$$f(x+h) - f(x) \neq J_f(x+\tau h) \cdot h.$$

Lemma 0.4. Seien $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ stetig. Dann gilt:

$$\left\| \int_a^b v(s) \, ds \right\|_2 \leq \int_a^b \|v(s)\|_2 \, ds, \quad \left\| \int_a^b A(s) \, ds \right\|_2 \leq \int_a^b \|A(s)\|_2 \, ds$$

Beweis. Sei $u \in \mathbb{R}^n$, $u = \int_a^b v(s) \, ds = \begin{pmatrix} \int_a^b v_1(s) \, ds \\ \vdots \\ \int_a^b v_n(s) \, ds \end{pmatrix}$ und $K = \|u\|_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} K^2 &\stackrel{\ell_2 \text{ Norm}}{=} (u, u)_2 = \left(\int_a^b v(s) \, ds, u \right)_2 = \int_a^b (v(s), u)_2 \, ds \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_a^b \|v(s)\|_2 \cdot \|u\|_2 \, ds = K \cdot \int_a^b \|v(s)\|_2 \, ds \\ \implies K &= \left\| \int_a^b v(s) \, ds \right\|_2 \leq \int_a^b \|v(s)\|_2 \, ds. \end{aligned}$$

Der Beweis für $A(s)$ folgt ganz analog mit $u = \int_a^b A(s) \, ds \in \mathbb{R}^{m \times n}$. □

Definition 0.5. $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, genau dann wenn: für alle $x, x' \in D$ und für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt $\lambda \cdot x + (1 - \lambda)x' \in D$.

Geometrisch: Für zwei Punkte in D liegt die Verbindungsstrecke der beiden Punkte stets ganz in D .

Korollar 0.6. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ sodass $K_\varepsilon(x) \subset D$. Dann gilt:

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq M \cdot \|y - x\|_2 \quad \forall y \in K_\varepsilon$$

mit $M := \sup_{z \in K_\varepsilon(x)} \|J_f(z)\|_2$, das heißt f ist lokal Lipschitz-stetig.
Sei D konvex, dann gilt

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq M \cdot \|y - x\|_2 \quad \forall x, y \in D$$

mit $M := \sup_{z \in D} \|J_f(z)\|_2$, das heißt f ist auf D Lipschitz-stetig.

Beweis. Aus Lemma 0.4 folgt:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^1 J_f(x+sh)h \, ds \right\|_2 &\leq \int_0^1 \|J_f(x+sh)h\|_2 \, ds \\
&\leq \int_0^1 \|J_f(x+sh)\|_2 \|h\|_2 \, ds \\
&\leq \sup_{0 < s < 1} \|J_f(x+sh)\|_2 \cdot \|h\|_2 \\
\implies \|f(x+h) - f(x)\|_2 &= \left\| \int_0^1 J_f(x+sh)h \, ds \right\|_2 \leq M \cdot \|x+h - x\|_2.
\end{aligned}$$

Sei D nun konvex. Für $x, y \in D$ gilt dann:

$$z = ty + (1-t)x = x + t(y-x) \in D, \quad t \in [0, 1].$$

Sei $g(t) := f(x + t(y-x))$ für $t \in [0, 1]$. Dann gilt für $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$f_i(y) - f_i(x) = g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g'_i(s) \, ds = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x + s(y-x))}{\partial x_j} (y_j - x_j) \, ds.$$

Und damit in Vektorform:

$$\begin{aligned}
\|f(y) - f(x)\|_2 &= \left\| \int_0^1 J_f(x + s(y-x)) \cdot (y-x) \, ds \right\|_2 \\
&\stackrel{\text{Lemma 0.4}}{\leq} \int_0^1 \|J_f(x + s(y-x)) \cdot (y-x)\|_2 \, ds \\
&\leq \int_0^1 \|J_f(x + s(y-x))\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \, ds \\
&\leq \sup_{0 < s < 1} \|J_f(x + s(y-x))\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \\
&\stackrel{D \text{ konvex}}{\leq} \sup_{z \in D} \|J_f(z)\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \\
&= M \cdot \|y-x\|_2.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 0.7. Obige Lipschitz-Konstante liefert eine Abschätzung für die Ableitungen/Jacobi-Matrix von f .

0.2 Taylor-Entwicklung

Bemerkung 0.8. Reminder - Höhere Ableitungen:

(1) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Seien alle partiellen Ableitungen

$$\partial_i f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \partial_i f = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_m \end{pmatrix}, \quad \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

wieder partiell differenzierbar. Dann ist f zweimal differenzierbar auf D (mit Ableitungen $\partial_j \partial_i f$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$).

Allgemein: (induktiv) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist $(k+1)$ -mal partiell differenzierbar, wenn f k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung $\partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f$ ($i_k, \dots, i_1 \in \{1, \dots, n\}$) partiell differenzierbar sind.

- (2) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist k -mal stetig partiell differenzierbar, wenn f k -mal differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der k -ten Ordnung stetig sind ($f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$).

- (3) Es gilt:

$$\begin{aligned} f \in C^1(D, \mathbb{R}^m) &\iff \partial_i f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ ist stetig } \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff \partial_i f_k : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig } \forall i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, m\} \\ &\iff f \text{ ist total differenzierbar in } D \text{ und } x \mapsto J_f(x) = (\partial_i f_k)_{i,k} \text{ stetig} \end{aligned}$$

- (4) Ist $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$, dann sind die Ableitungen der $k-1$ -ten Ordnung $\partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ total differenzierbar, weil stetig partiell differenzierbar. Also ist $\partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f$ stetig und damit sind alle Ableitungen $k-1$ -ter Ordnung stetig. Analog folgt induktiv, dass alle Ableitungen j -ter Ordnung mit $j \leq k$ stetig auf D sind.

- (5) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Existieren $\partial_i f, \partial_j f$ und $\partial_j \partial_i f$ auf D ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) und $\partial_j \partial_i f$ stetig in $a \in D$. Dann existiert $\partial_i \partial_j f$ und es gilt

$$\partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a).$$

- (6) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$. Sei $\pi \in \mathcal{S}_k$ eine Permutation, dann gilt:

$$\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f = \partial_{i_{\pi(k)}} \dots \partial_{i_{\pi(1)}} f, \quad \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}.$$

Reminder - Taylor-Entwicklung in $\mathbb{R}$:

- (1) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $(r+1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + R_{r+1}^f(x, h).$$

- (2) Für das Restglied in Lagrange-Form gilt ($\theta \in (0, 1)$):

$$R_{r+1}^f(x, h) = \frac{f^{(r+1)}(x + \theta h)}{(r+1)!} h^{r+1}.$$

- (3) Für das Restglied in Integral-Form:

$$R_{r+1}^f(x, h) = \frac{h^{r+1}}{r!} \int_0^1 f^{(r+1)}(x + th) (1-t)^r dt$$

Satz 0.9 (Taylor-Formel). Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\{x + th \mid t \in [0, 1]\} \subset D$

und $f \in C^{r+1}(D, \mathbb{R})$. Dann existiert ein $\theta \in [0, 1]$ sodass gilt:

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x) \cdot h_{i_1} \dots h_{i_k}}_{\text{Taylor-Polynom}} + \underbrace{\frac{1}{(r+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{r+1}=1}^n \partial_{i_{r+1}} \dots \partial_{i_1} f(x+\theta h) \cdot h_{i_1} \dots h_{i_{r+1}}}_{\text{Restglied}}$$

Beweis. Sei $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(t) := f(x+th)$. Es gilt $g \in C^{r+1}([0, 1], \mathbb{R})$ und

$$\frac{d^k g}{dt^k} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(x+th) \cdot h_{i_1} \dots h_{i_k}. \quad (1)$$

Wir zeigen (1) durch Induktion nach k .

(IA) $k=1$ Es ist $g \in C^1$ und nach Kettenregel gilt:

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{d}{dt} f(x+th) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x+th)}{\partial x_i} \cdot h_i.$$

(IV) Für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt (1).

(IS) $k \mapsto k+1$ Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\frac{d^k g(t)}{dt^k} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f(x+th)}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} \cdot h_{i_1} \dots h_{i_k}.$$

Aus $f \in C^{k+1}(D, \mathbb{R})$ folgt, dass $\frac{d^k g}{dt^k} \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, womit nach Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1} g(t)}{dt^{k+1}} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f(x+th)}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} \cdot h_{i_1} \dots h_{i_k} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f(x+th)}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} \cdot h_{i_1} \dots h_{i_k} \right) \cdot h_j \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n \frac{\partial^{k+1} f(x+th)}{\partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}} \cdot h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}}. \end{aligned}$$

Ferner liefert die Taylor-Formel in $\mathbb{R}$ für g die Existenz eines $\theta \in [0, 1]$ sodass gilt:

$$g(1) - g(0) = f(x+h) - f(x) = \left(\sum_{k=1}^r \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \right) + \frac{g^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}.$$

Einsetzen von (1) liefert die Behauptung. □

Bemerkung 0.10. Um die Notation vieler, verschieden indizierter partieller Ableitungen zu erleichtern, führen wir die Multiindex-Notation ein:

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ seien:

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_n \in \mathbb{N}_0 \\ \partial^\alpha f &:= \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, & \text{für } f \in C^{|\alpha|}(D, \mathbb{R}), \\ \alpha! &:= \alpha_1! \dots \alpha_n! \in \mathbb{N}_0, \\ h^\alpha &:= h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}, & \text{für } h = (h_1, \dots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Beispiel 0.11. Seien $n = 3$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Multiindizes der Ordnung $|\alpha| = 2$ sind:

α	$(2, 0, 0)$	$(0, 2, 0)$	$(0, 0, 2)$	$(1, 1, 0)$	$(1, 0, 1)$	$(0, 1, 1)$
$\alpha!$	$2! \cdot 0! \cdot 0! = 2$	2	2	1	1	1
$\partial^\alpha f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$

Summennotation für partielle Ableitungen 2-ter Ordnung:

$$\sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

Bemerkung 0.12. Mit dieser Notation lässt sich die Taylor-Formel kompakt schreiben als:

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Beweis. Die Reihenfolge der Differenzierung kann vertauscht werden. Daraus folgt für alle k -Tupel $(i_1, \dots, i_k)$ mit $i_j \in \{1, \dots, n\}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$:

$$\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(y) \cdot h_{i_1} \dots h_{i_k} = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(y) \cdot h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} = \partial^\alpha f(y) \cdot h^\alpha$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_s := \#\{i_j \mid i_j = s \text{ für } j \in \{1, \dots, k\}\}$ (Anzahl wie oft Index s in $(i_1, \dots, i_k)$ vorkommt).

Ohne Beweis (siehe S.72 Skript Ana2 Rolf Rannacher): für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ gilt: die Anzahl von k -Tupeln $(i_1, \dots, i_k)$ bei denen der Index s genau α_s -mal vorkommt ist

$$\frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^k g}{dt^k}(t) &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f(x+th)}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} \cdot h_{i_1} \dots h_{i_k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(x+th) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+th) h^\alpha, \end{aligned}$$

womit insbesondere auch gilt

$$\sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x+th)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Und können ferner festhalten:

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= g(1) \stackrel{\text{Taylor in } \mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k g}{dt^k}(0) + \frac{1}{(r+1)!} \frac{d^{r+1} g(\theta)}{dt^{r+1}} \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{(r+1)! \cdot \partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha}_{\text{Restglied in Lagrange-Form}}
 \end{aligned}$$

und analog:

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= g(1) \stackrel{\text{Taylor in } \mathbb{R}}{=} \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \frac{1}{r!} \int_0^1 \frac{d^{r+1} g(t)}{dt^{r+1}} (1-t)^r dt \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \frac{1}{r!} \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{(r+1)! \cdot \partial^\alpha f(x+th)}{\alpha!} h^\alpha (1-t)^r dt \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \underbrace{(r+1) \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+th)}{\alpha!} h^\alpha (1-t)^r dt}_{\text{Restglied in Integral-Form}}
 \end{aligned}$$

□

Korollar 0.13. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{r+1}(D, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$, für die $x+th \in D$ (für alle $t \in [0, 1]$)

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq r+1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_{r+1}(x, h),$$

sodass

$$\frac{\omega_{r+1}(x, h)}{\|h\|^{r+1}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

also $\omega_{r+1}(x, h) = o(\|h\|^{r+1})$.

Beweis. Da D offen ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(x) \subset D$. Nach Taylor-Formel existiert für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \delta$ ein $\theta \in [0, 1]$ sodass

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq r+1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h) - \partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha}_{=: \omega_{r+1}(x, h)}
 \end{aligned}$$

Nun gilt noch zu zeigen, dass: $\frac{\omega_{r+1}(x, h)}{\|h\|^{r+1}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Es gilt:

$$|h^\alpha| = |h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}| \leq \|h\|^{\alpha_1} \cdots \|h\|^{\alpha_n} = \|h\|^{|\alpha|}.$$

Womit wir abschätzen können:

$$\begin{aligned}
\frac{|\omega_{r+1}(x, h)|}{\|h\|^{r+1}} &= \frac{1}{\|h\|^{r+1}} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(x + \theta h) - \partial^\alpha f(x)| \cdot |h_1^{\alpha_1}| \cdots |h_n^{\alpha_n}| \\
&= \frac{|h^{r+1}|}{\|h\|^{r+1}} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(x + \theta h) - \partial^\alpha f(x)| \\
&\stackrel{|h^{r+1}| \leq \|h\|^{r+1}}{\leq} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{|\partial^\alpha f(x + \theta h) - \partial^\alpha f(x)|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \text{ weil alle } \partial^\alpha f \text{ stetig sind}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

□

Korollar 0.14. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$, sodass $x + th \in D$ (für alle $t \in [0, 1]$):

$$f(x + h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2} (H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x, h), \quad \text{mit } \frac{\omega_2(x, h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Dabei ist $H_f(x)$ die Hesse-Matrix von f . Das heißt das Taylor-Polynom 2. Ordnung ist eine quadratische Approximation von f . Für $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ gilt:

$$f(x + h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \omega_1(x, h), \quad \text{mit } \frac{\omega_1(x, h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Das heißt das Taylor-Polynom 1. Ordnung ist eine lineare Approximation von f .

Beweis. Folgt aus 0.13 mit $r + 1 = 2$ bzw. $r + 1 = 1$ sowie:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=0} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha &= f(x), \\
\sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha &= \frac{1}{1!} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot h_i = (\nabla f(x), h)_2, \\
\sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha &= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i \cdot h_j = \frac{1}{2} (H_f(x)h, h)_2.
\end{aligned}$$

□

Definition 0.15. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft partiell differenzierbar, $x \in D$. Dann heißt die Taylor-Reihe von f in x :

$$T_\infty^f(x + h) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Korollar 0.16. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$T_r^f(x + h) = \sum_{|\alpha|=0}^r \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f(x + h),$$

wenn

$$R_{r+1}^f(x, h) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad x \in D. \quad (2)$$

Eine hinreichende Bedingung für (2) ist

$$\sup_{|\alpha| \geq 0} \sup_{x \in D} |\partial^\alpha f(x)| \leq M_f < \infty,$$

das heißt alle partiellen Ableitungen von f sind gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Siehe Skript Ana2 Rolf Rannacher, Seite 74, Übungsaufgabe 3.23. $\square$

Bemerkung 0.17. Die Taylor Reihe von f konvergiert gegen f , wenn die Funktion f durch eine Potenzreihe beschrieben wird (also wenn f analytisch ist).