## 0.1 Geometrie in $K^n$

**Definition 0.1** (Skalarprodukt)**.** Sei $V$ irgendein Raum über dem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

S1 (Definitheit) $(x,x) \in \mathbb{R}$ und $(x,x) \geq 0, \quad (x,x) = 0 \iff x = 0$

S2 (Symmetrie) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

S3 (Linearität im ersten Argument) $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1,y) + \beta(x_2,y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

**Bemerkung 0.2.** (1) Falls nur $(x,x) \in \mathbb{R}, (x,x) \geq 0$ gilt (es ist möglich, dass $(x,x) = 0$ und $x \neq 0$), dann ist $(\cdot,\cdot)$ ein „semi-skalarprodukt“.

(2) Aus S2 und S3 folgt die Linearität im zweiten Argument und damit sog. Bilinearität des Skalarprodukts als eine Sesquilinearform in $\mathbb{C}$ bzw. eine Bilinearform in $\mathbb{R}$

(3) S3 $\implies \begin{cases} \text{Additivität} & (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \\ \text{Homogenität} & (\alpha x, y) = \alpha(x,y), \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$

**Lemma 0.3** (Schwarz-Ungleichung)**.** Für ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf $V$ über $\mathbb{K}$ gilt die Schwarz-Ungleichung

$$\left|(x,y)^2\right| \leq (x,x) \cdot (y,y), \quad x, y \in V$$

*Beweis.* $y = 0 \implies$ trivial. Sei $y \neq 0$, und sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig.

$$0 \overset{S1}{\leq} (x + \alpha y, x + \alpha y) \overset{S2,S3}{=} (x,x) + \alpha(y,x) + \overline{\alpha}(x,y) + \alpha\overline{\alpha}(y,y)$$

Setze $\alpha = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x,x) - \frac{(x,y)(y,x)}{(y,y)} - \frac{\overline{(x,y)}(x,y)}{(y,y)} + \frac{(x,y)}{(y,y)} \cdot \frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)} \cdot (y,y) \\ &= (x,x) - \frac{\left|(x,y)^2\right|}{(y,y)} \\ \implies\ & 0 \leq (x,x) \cdot (y.y) - \left|(x,y)^2\right| \end{aligned}$$

□

**Korollar 0.4.** a) Ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf $V$ über $\mathbb{K}$ erzeugt eine Norm durch $\|x\| := \sqrt{(x,x)},\ x \in V$. Falls ein normierter Raum $(V, (\cdot,\cdot))$ vollständig ist, so heißt das Paar $(V, (\cdot,\cdot))$ Hilbert-Raum.

b) Das euklidische Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_2$ auf $\mathbb{K}^n$

$$(x,y)_2 := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

erzeugt die euklidische Norm

$$\|x\|_2 \coloneqq \sqrt{(x,x)_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

$(\mathbb{K}^n, (\cdot,\cdot)_2)$ ist ein Hilbert-Raum.

*Beweis.* Normeigenschaften Definitheit und Homogenität folgen aus S1-S3. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Schwarz-Ungleichung.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \\
&\leq \|x\|^2 + 2\,|(x,y)| + \|y\|^2 \\
&\overset{\text{Schwarz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 \\
\implies \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

□

Wichtige Ungleichungen

**Lemma 0.5** (Ungleichung von Young)**.** Seien $p, q \in \mathbb{R}, p > 1,\ q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$|x \cdot y| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

*Beweis.* Übung □

**Lemma 0.6** (Ungleichung von Hölder)**.** Seien $p, q \in \mathbb{R}, p > 1,\ q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\underbrace{|(x,y)_2|}_{\substack{\text{euklidisches}\\ \text{Skalarprodukt}}} \quad \leq \quad \underbrace{\|x\|_p}_{\substack{\ell_p\text{-Norm}\\ \text{von } x}} \quad \cdot \quad \underbrace{\|y\|_q}_{\substack{\ell_q\text{-Norm}\\ \text{von } y}}$$

*Beweis.* Falls $x = 0$ oder $y = 0 \implies$ klar. Sei $\|x\|_p \neq 0,\ \|y\|_q \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{|(x,y)_2|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} &\overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \left| \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i \overline{y_i}|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \\
&\overset{\text{Young-Ungl.}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left( \frac{|x_i|^p}{p \cdot \|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \cdot \|x\|_q^q} \right) \\
&= \frac{1}{p \cdot \|x\|_p^p} \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}_{=\|x\|_p^p} + \frac{1}{q \cdot \|y\|_q^q} \underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}_{=\|y\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
\implies |(x,y)_2| &\leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q
\end{aligned}$$

□

**Lemma 0.7** (Ungleichung von Minkowski)**.** Sei $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$ oder $p = \infty$. Dann gilt

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\rightsquigarrow$ Dreicksungleichung für die $\ell_p$-Norm.

*Beweis.* Für $p = 1$

$$\|x+y\|_1 \overset{\text{Def. } \ell_1}{=} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \overset{\triangle\text{-UG}}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \overset{\text{Def. } \ell_1}{=} \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Für $p = \infty$

$$\|x+y\|_\infty \overset{\text{Def. } \ell_\infty}{=} \max_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i| \overset{\triangle\text{-UG}}{\leq} \max_{i=1,\dots,n} |x_i| + \max_{i=1,\dots,n} |y_i| \overset{\text{Def. } \ell_\infty}{=} \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Sei $1 < p < \infty$. Definiere $q := \frac{p}{p-1}$ $\left( \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1 \right)$ und setze $\xi_i = |x_i + y_i|^{p-1},\ i = 1, \dots, n$ und $\xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\|\xi\|_q^q = \sum_{i=1}^n |\xi_i|^q = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(|x_i + y_i|^{p-1}\right)}_{\xi_i}{}^{q = \frac{p}{p-1}} = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \|x+y\|_p^p$$

Dann

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i+y_i|^p}_{=\underbrace{|x_i+y_i|^{p-1}}_{\xi_i}\cdot|x_i+y_i|} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|\cdot\xi_i \\
&\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|\cdot\xi_i}_{|(x,\xi)_2|} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |y_i|\cdot\xi_i}_{|(y,\xi)_2|} \\
&\overset{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq} \|x\|_p\cdot\|\xi\|_q + \|y\|_p\cdot\|\xi\|_q \\
&= \left(\|x\|_p+\|y\|_q\right)\cdot\|\xi\|_q \\
&\overset{\text{Def. }\xi}{=} \left(\|x\|_p+\|y\|_q\right)\cdot\|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&\overset{\text{Def. }q}{=} \left(\|x\|_p+\|y\|_q\right)\cdot\|x+y\|_p^{p-1}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p
$$

$\square$

**Definition 0.8** (Orthogonalität)**.** $x, y \in \mathbb{K}^n$ heißen orthogonal ($x \perp y$), falls $(x,y)_2 = 0$.

**Definition 0.9** (Orthogonalsystem/Orthogonalbasis)**.** Ein Satz von Vektoren $\{a^{(1)},\dots,a^{(m)}\}$, $a^{(i)} \neq 0$, $a^{(i)} \in \mathbb{K}^n$, $i = 1,\dots,m$ und $\underbrace{(a^{(k)},a^{(l)})_2 = 0}_{\text{paarweise orthogonal}}$ für $k \neq l$ heißt Orthogonalsystem bzw. falls $m = n$ Orthogonalbasis.
Falls $(a^{(k)},a^{(k)})_2 = 1$, dann heißen die Vektoren $\{a^{(1)},\dots,a^{(m)}\}$ ein Orthonormalsystem bzw. Orthonormalbasis.

**Bemerkung 0.10.** Die orthogonalen Vektoren (wie in Def.) sind linear unabhängig:

$$
\text{Sei } \sum_{k=1}^{m} c_k a^{(k)} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{m} c_k (a^{(k)},a^{(l)}) \overset{\substack{a^{(i)}\\ \text{paarweise}\\ \text{orthog.}}}{=} c_l \underbrace{(a^{(l)},a^{(l)})}_{\substack{\neq 0\\ \text{für } a^{(l)}\neq 0}} = 0 \Longleftrightarrow c_l = 0,\ l = 1,\dots,m
$$

**Beispiel 0.11.** $e^{(1)},\dots,e^{(n)}$ ist eine Orthogonalbasis in $\mathbb{R}^n$.

**Lemma 0.12.** Sei $\{a^{(k)},\ k = 1,\dots,n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$. Dann gibt es $\forall x \in \mathbb{K}^n$ eine Darstellung

$$
x = \sum_{k=1}^{n} (x,a^{(k)})_2 \cdot a^{(k)},\ x \in \mathbb{K}^n.
$$

$$
\left(\begin{array}{lll}
\sim & \text{Fourierentwicklung} & \\
 & a^{(k)} \sim e^{ixk} & f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \cdot e^{ixk} \\
 & x \sim f(x) & \\
 & c_k \sim (f, e^{ixk})_{L^2} &
\end{array}\right)
$$

und es gilt die Vollständigkeitsrelation (Gleichung von Parseval)

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|(x, a^{(k)})_2\right|^2$$

$$\left(\sim \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^2| \cdot 2\pi\right)$$

*Beweis.* $\exists\, \alpha_j,$ sodass $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a^{(j)}$

$$\Longrightarrow (x, a^{(k)})_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{(a^{(j)}, a^{(k)})_2}_{\delta_{jk}} = \alpha_k,\ k = 1, \ldots, n$$

$\Longrightarrow$ Darstellung von $x$

Außerdem gilt

$$\|x\|_2^2 = (x, x)_2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x, a^{(k)})_2 \cdot \overline{(x, a^{(j)})_2} \cdot \underbrace{(a^{(k)}, a^{(j)})_2}_{\delta_{jk}} = \sum_{k=1}^{n} \left|(x, a^{(k)})_2\right|^2$$

$\Longrightarrow$ Gleichung von Parseval

□

**Bemerkung 0.13.** Lemma 0.12 gilt in unendlichdimensionalen Skalarprodukträumen mit vollständigem Orthonormalsystem. Beispiel: Fourier-Reihen in $R[0, 2\pi]$, trigonometrische Funktionen $e^{ikx}$ als vollständiges Orthonormalsystem.

**Satz 0.14** (Gram-Schmidt-Verfahren)**.** Sei $\{a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\}$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$. Dann ist $\{b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}\}$ konstruirt durch das Orthogonalisierungsverfahren von Gram und Schmidt eine Orhonormalbasis.

$$b^{(1)} := \frac{a^{(1)}}{\left\|a^{(1)}\right\|_2}$$

$$\tilde{b}^{(k)} := a^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (a^{(k)}, b^{(j)})_2 \cdot b^{(j)}$$

$$b^{(k)} := \frac{\tilde{b}^{(k)}}{\left\|\tilde{b}^{(k)}\right\|_2}, \quad k = 2, \ldots, n$$

*Beweis.* Rannacher □