

# Kapitel 1

## Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

### 1.1 Explizite Differentialgleichungen

Differentialgleichungen (DGLn) sind Gleichungen der Form

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{implizite Form}$$

oder

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{explizite Form}$$

für eine gesuchte Funktion  $y = y(t)$ ,  $t \in I$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  "Zeitintervall". Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung sind äquivalent zu speziellen Systemen DGL 1. Ordnung. Betrachte  $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  (sei  $y: I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ ). Definiere Hilfsvariablen:

$$\begin{aligned} x_1 &:= y \\ x_2 &:= y' \\ &\vdots \\ x_n &:= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

, also  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ein äquivalentes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung ist dann

$$x' = \tilde{f}(t, x), \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(t, x) \end{pmatrix}$$

Ein allgemeines System von Differentialgleichungen 1. Ordnung hat die Form

$$x' = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n$$

Notationen:  $x' = f(t, x)$ ,  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$  (Dynamischer Prozess, der sich mit der Zeit ändert.)

**Beispiel 1.1.** 1. einfache lineare Differentialgleichung

$$x' = \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

hat die Lösung  $x(t) = c \cdot e^{\alpha t}$ , da

$$\frac{df}{dt} = c \cdot e^{\alpha t} \cdot \alpha = \alpha \cdot x(t)$$

2. Newton: Kraft = Masse · Beschleunigung.

|                         |                                      |
|-------------------------|--------------------------------------|
| $y(t) \in \mathbb{R}$   | Ort eines Massenpunktes zur Zeit $t$ |
| $y'(t) \in \mathbb{R}$  | Geschwindigkeit                      |
| $y''(t) \in \mathbb{R}$ | Beschleunigung                       |

Kraftfunktion:  $f(t, y, y') \in \mathbb{R}$ .

$$my'' = f(t, y, y') \quad \text{DGL 2. Ordnung}$$

äquivalent zum System:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 & \text{mit } x_1 &= y, \\ x'_2 &= \frac{1}{m} f(t, x_1, x_2) & x_2 &= y' \end{aligned}$$

3. Räuber-Beute-Gleichungen (Lotka-Volterra-Gleichungen)

|                                       |                                                                    |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $N_1 = N_1(t)$                        | Anzahl von Beute                                                   |
| $N_2 = N_2(t)$                        | Anzahl von Räuber                                                  |
| $N'_1 = \alpha N_1 - \beta N_1 N_2$   | $\alpha > 0$ Reproduktionsrate der Beute                           |
|                                       | $\beta > 0$ Fressrate der Räuber pro Beute                         |
| $N'_2 = -\gamma N_2 + \delta N_1 N_2$ | $\gamma > 0$ Sterberate der Räuber, wenn keine Beute vorhanden ist |
|                                       | $\delta > 0$ Reproduktionsrate der Räuber pro Beute                |

4. SIR - Modell aus Epidemiologie (z.B. Corona):

|    |             |          |         |
|----|-------------|----------|---------|
| 5. | succeptible | infected | removed |
|    | $S(t)$      | $I(t)$   | $R(t)$  |

$$\begin{aligned} N &= I + S + R \\ \frac{dS}{dt} &= \nu N - \beta \frac{SI}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \end{aligned}$$

Dabei sei

$\gamma$  die Rate, mit der Infizierte genesen oder sterben,

$\mu$  die allgemeine Sterberate pro Person,

$\nu$  die Geburtsrate pro Person,

$\beta$  die Anzahl neuer Infektionen, die ein erster infektiöser Fall pro Zeit verursacht und

$\frac{\beta}{N}$  die Transmissionsrate.

**Definition 1.2** (System erster Ordnung). Sei  $D = I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann heißt

$$y' = f(t, y) \quad (\star)$$

ein System von  $n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Eine Lösung von  $(\star)$  ist eine differenzierbare Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

(a)  $\text{Graph}(y) := \{(t, y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \in I\} \subset D$  und

(b)  $y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I$ .

**Bemerkung 1.3.**  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  und  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$  Dann ist

$$(\star) \Leftrightarrow y'_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$y'_n = f_n(t, y_1, \dots, y_n)$$

**Definition 1.4** (Anfangswertaufgabe/Anfangswertproblem). AWA zu  $(\star)$  ist:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \quad t \in I \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad \text{Anfangsbedingung}$$

Gesucht wird eine differenzierbare Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  derart, dass

1.  $\text{Graph}(y) \subset D$
2.  $y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I$
3.  $y(t_0) = y_0$

**Satz 1.5** (DGL  $\leftrightarrow$  Integralgleichung). Sei  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, y_0) \in D$  und  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig mit  $\text{Graph}(y) \subset D$ ,  $t_0 \in I$ . Dann gilt

$$y \text{ löst AWA } y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in I$$

*Beweis.* " $\Rightarrow$ ". Sei  $y$  eine Lösung von AWA. Dann ist  $y$  diffbar mit  $y'(t) = f(t, y(t))$ .

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds = \int_{t_0}^t y'(s) \, ds \stackrel{\text{HDI}}{=} y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0.$$

" $\Leftarrow$ ". Sei die Integralgleichung erfüllt. Falls  $t = t_0 \Rightarrow y(t_0) = y_0 \Rightarrow$  c). Aus dem HDI folgt komponentenweise  $y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow y$  löst AWA.  $\square$

## 1.2 AWA: Existenz von Lösungen

**Satz 1.6** (Existenzsatz von Peano).

Die Funktion  $f(t, x)$  sei stetig auf dem  $(n + 1)$ -dimensionalen Zylinder

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq \alpha, \|x - y_0\| \leq \beta\}$$

Dann existiert eine Lösung  $y(t)$  von AWA auf dem Intervall  $I := [t_0 - T, t_0 + T]$  mit

$$T := \min_{y(t)} \left\{ \alpha, \frac{\beta}{M} \right\}, \quad M := \max_{(t, x) \in D} \|f(t, x)\|$$

Reminder:

1. Gleichmäßige Stetigkeit:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

ist gleichmäßig stetig in  $D$ , falls  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , sodass  $\forall x, x_0 \in D$  gilt

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

2. Gleichgradige Stetigkeit: Sei  $\mathcal{F} \subset C[a, b]$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  gleichgradig stetig, falls  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , sodass  $\forall f \in \mathcal{F}$  gilt

$$\forall t, t' \in [a, b], |t - t'| < \delta \implies \|f(t) - f(t')\| < \varepsilon$$

3. Satz von Arzela-Ascoli: Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C[a, b]$ , die gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist, d.h.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$$

und

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}: \max_{\substack{t, t' \in [a, b] \\ |t - t'| \leq \delta}} \|f_n(t) - f_n(t')\| < \varepsilon.$$

Dann existiert eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , welche gegen  $f \in C[a, b]$  konvergiert, d.h.

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty \rightarrow 0$$

4. Dreiecksungleichung für Integrale. Sei  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $\|\cdot\|$  irgendeine Norm auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann

$$\left\| \int_a^b y(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|y(t)\| \, dt,$$

hier:

$$\int_a^b y(t) \, dt := \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(t) \, dt \\ \vdots \\ \int_a^b y_n(t) \, dt \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

*Beweis.* (Satz von Peano)

Idee: Konstruiere eine Folge stetiger Funktionen (Eulersches Polygonzugverfahren). Aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt dann, dass es eine Teilfolge gibt, die gegen eine Lösung von AWA konvergiert.

O.b.d.A. betrachte Halbointervall  $I = [t_0, t_0 + T]$ . Sei  $h > 0$  Schrittweitenparameter ( $h \rightarrow 0$ ). Wähle eine äquidistante Unterteilung des Intervalls  $I$ .

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T, \quad h = |t_k - t_{k-1}|$$

Eulersches Polygonzugverfahren:

- Starte mit  $y_0^h := y_0$ .
- Für  $n \geq 1$ , berechne  $y_n^h = y_{n-1}^h + hf(t_{n-1}, y_{n-1}^h)$ .

Definiere die stückweise lineare Funktion  $y^h(t)$

$$y^h(t) := y_{n-1}^h + (t - t_{n-1})f(t_{n-1}, y_{n-1}^h), \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad \forall n \geq 1$$

1. **z.Z.** dass dieses Verfahren durchführbar ist, d.h.  $\text{Graph}(y^h) \subset D$ . Sei  $(t, y^h(t)) \subset D$  für  $t_0 \leq t \leq t_{k-1}$ . Dann gilt

$$\underbrace{(y^h(t))'}_{:= \frac{dy^h(t)}{dt}} \equiv f(t_{k-1}, y_{k-1}^h), \quad t \in [t_{k-1}, t_k]$$

Nach Konstruktion gilt für  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ :

$$\begin{aligned} y^h(t) - y_0 &= y^h(t) - y_{k-1}^h + y_{k-1}^h - y_{k-2}^h + \dots + y_1^h - y_0^h \\ &= y^h(t) - y_{k-1}^h + \sum_{i=1}^{k-1} (y_i^h - y_{i-1}^h) \\ &= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) + \sum_{i=1}^{k-1} h \cdot f(t_{i-1}, y_{i-1}^h) \\ \implies \|y^h(t) - y_0\| &\leq (t - t_{k-1}) \|f(t_{k-1}, y_{k-1}^h)\| + h \sum_{i=1}^{k-1} \|f(t_{i-1}, y_{i-1}^h)\| \\ &\leq (t - t_{k-1}) \cdot M + \underbrace{h(k-1)}_{=t_{k-1}-t_0} \cdot M \\ &= (t - t_0) \cdot M \\ &\leq T \cdot M \\ &= \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\} \cdot M \\ &\leq \beta \end{aligned}$$

Also ist  $(t, y^h(t)) \in D$  für  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ . Mit Annahme folgt  $(t, y^h(t)) \in D$  für  $t_0 \leq t \leq t_k \implies \text{Graph}(y^h) \subset D$ .

2. (a) **z.Z.** dass die Funktionenfamilie  $\{y^h\}_{h>0}$  gleichgradig stetig ist. Seien dafür  $t, t' \in I$ ,  $t' \leq t$  beliebig mit  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ ,  $t' \in [t_{j-1}, t_j]$  für ein  $t_j \leq t_k$ .
- $t, t' \in [t_{k-1}, t_k]$ :

$$\begin{aligned} y^h(t) - y^h(t') &= y_{k-1}^h + (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) \\ &\quad - (y_{k-1}^h + (t' - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h)) \\ &= (t - t')f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) \\ \implies \|y^h(t) - y^h(t')\| &\leq |t - t'| \cdot M \end{aligned}$$

- $t_j < t_k$ :

$$\begin{aligned}
y^h(t) - y^h(t') &= y^h(t) - y_{k-1}^h + y_{k-2}^h - \cdots - y_{j-1}^h + y_{j-1}^h - y^h(t') \\
&= y^h(t) - y_{k-1}^h + \sum_{i=j}^{k-1} (y_i^h - y_{i-1}^h) + y_{j-1}^h - y^h(t') \\
&= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) + \sum_{i=j}^{k-1} hf(t_{i-1}, y_{i-1}^h) \\
&\quad + (t_{j-1} - t')f(t_{j-1}, y_{j-1}^h) \\
&= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) + \sum_{i=j+1}^{k-1} hf(t_{i-1}, y_{i-1}^h) \\
&\quad + hf(t_{j-1}, y_{j-1}^h) + (t_{j-1} - t')f(t_{j-1}, y_{j-1}^h) \\
&= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) + h \sum_{i=j+1}^{k-1} f(t_{i-1}, y_{i-1}^h) \\
&\quad + \underbrace{(h + t_{j-1} - t')}_{z_j} f(t_{j-1}, y_{j-1}^h)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|y^h(t) - y^h(t')\| \leq (t - t_{k-1})M + (t_{k-1} - t_j)M + (t_j - t')M = |t - t'|M$$

Wählt man also für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$   $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , so gilt  $\forall h$

$$|t - t'| < \delta \implies \|y^h(t) - y^h(t')\| < \varepsilon$$

Daher ist  $\{y^h\}_{h>0}$  gleichgradig stetig (sogar gleichgradig Lipschitz-stetig).

- (b) **z.Z.**  $y^h$  ist gleichmäßig beschränkt. Es gilt  $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned}
\|y^h(t)\| &= \left\| y^h(t) - \underbrace{y_0}_{y^h(t_0)=y_0} + y_0 \right\| \\
&\leq \underbrace{\|y^h(t) - y_0\|}_{\text{siehe 1)}} + \|y_0\| \\
&\leq M \cdot T + \|y_0\|
\end{aligned}$$

Also ist  $y^h$  gleichmäßig beschränkt.

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert eine Nullfolge  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  und eine stetige Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  so dass

$$\max_{t \in I} \|y^{h_i} - y(t)\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

Offenbar ist also  $\text{Graph}(y) \subset D$ .

3. **z.Z.**  $y(t)$  erfüllt die Differentialgleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$  oder äquivalent dazu:  $y(t)$  erfüllt die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds$$

□