0.1 Fourier-Entwicklung

Definition 0.1 (Periodische Funktionen). $f : \mathbb{R} \to \mathrm{K}$ heißt L-periodisch $(L > 0)$ falls $f(x+L) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}(\implies f(x+kL) = f(x),\ \forall k \in \mathbb{Z})$. Sei f periodisch und $p > 0$. Für $\tilde{f}(x) := f\underbrace{\left(\frac{L}{p}x\right)}_{\text{Variablentransformation}}$ gilt dann $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathrm{K}$ ist p-periodisch

Beispiel 0.2. $p = 2\pi$

$$\tilde{f}(x) := f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \implies f(x) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

$$\tilde{f}(x+2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) \overset{f\ L\text{-per}}{=} f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = \tilde{f}$$

Hier betrachten wir deshalb nur 2π-periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathrm{K}$. Weiterhin betrachen wir Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathrm{K}$, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π-periodisch.

Beispiel 0.3 (<u>Trigonometrische Polynome</u>). Für $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ betrachte

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - ib_k)e^{ikx} + (a_k + ib_k)e^{-ikx}\right) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \text{ mit } c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k \geq 0 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(*) : \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),\ \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Für $a_k, b_k, k > 0$ ergibt sich $a_k = c_k + c_{-k},\ b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Bemerkung 0.4. Ist f ein trigonometrisches Polynom, so kann man die Koeffizienten a_k, b_k, c_k durch Integration ausrechen, d.h. a_k, b_k, c_k sind eindeutig.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k > 0 \\ c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2\pi}(f, e^{ikx}), \quad L_2\text{-Skalarprodukt} \end{aligned}$$

Beweis. Sei zuerst $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x &= \int_a^b \cos(\lambda x)\, \mathrm{d}x + i \int_a^b \sin(\lambda x)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x)\Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} i \cos(\lambda x)\Big|_a^b \\
&\overset{\frac{1}{i}=-i}{=} \frac{1}{\lambda i}(\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x))\Big|_a^b \\
&= \frac{1}{\lambda i} e^{i\lambda x}\Big|_a^b
\end{aligned}$$

$$\implies \int_0^{2\pi} e^{ikx}\, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_1 x} e^{-ik_2 x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{i(k_1-k_2)x}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{falls } k_1 \neq k_2 \\ 2\pi, & \text{falls } k_1 = k_2 \ (\implies k_1 - k_2 = 0) \end{cases}$$

$\implies$ Behauptung für c_k. Für a_k, b_k gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)\, \mathrm{d}x = c_{-k} + c_k = b_k \cdot i$$

□

Bemerkung 0.5. Obige Formel gilt auch für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ixk}$$

falls die Reihen gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ konvergieren.

Frage: Hat jede 2π-periodische Funktion die Form $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ixk}$ oder kann man sie durch trigonometrische Polynome approximieren? $\implies$ Motivation für Fourier-Reihen.

Definition 0.6 (<u>Fourier-Reihe</u>)**.** Sei $f \in R[a, b]$ 2π-periodisch. Die <u>Fourier-Koeffizienten</u> von f sind gegeben durch

$$c_k \coloneqq c_k(f) \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ixk}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}(f, e^{ixk})$$

Die (formale) <u>Fourier-Reihe</u> von f ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit der n-ten Partialsumme

$$s_n(x) = s_n(f,x) \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Die Fourier-Reihe läßt sich in der Form schreiben

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x$$

Satz 0.7. Sei $f \in R[a,b]$ eine 2π-periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten $c_k,\ k \in \mathbb{Z}$ und $s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

Beweis. Notation $e_k(x) \coloneqq e^{ikx}$

$$(e_k, e_l) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ikx} \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} (f, e_k) \qquad \Longrightarrow (f, e_k) = 2\pi c_k$$

$$(f, s_n) = \sum_{k=-n}^{n} (f, c_k e_k) = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} (f, e_k) = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} 2\pi c_k = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

$$(s_n, s_n) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{l=-n}^{n} \underbrace{c_k \overline{c_k}}_{|c_k|^2} \cdot \underbrace{(e_k, e_l)}_{= \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l \end{cases}}$$

Dann

$$\begin{aligned} \|f - s_n\|^2 &= (f - s_n, f - s_n) \\ &= (f,f) - (f, s_n) - (s_n, f) + (s_n, s_n) \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \end{aligned}$$

□

Satz 0.8 (Besselsche Umgebung)**.** Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π-periodische Funktion mit Fourier-Koeffizienten $c_k,\ k \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2\pi}$$

Beweis. Aus Satz **??**

$$2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \|f\|^2 - \underbrace{\|f - s_n\|^2}_{\geq 0} \leq \|f\|^2$$

Die Konvergenz folgt unter Beachtung der Monotonie und Beschränktheit der Folge

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

□

Bemerkung 0.9. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ 2π-periodisch und $\|f - s_n\|^2 \xrightarrow{L^2} 0,\ n \to \infty$, d.h. die Fourier-Reihe konvergiert gegen f in L^2. Das ist nach Satz **??** äquivalent zu

$$\|f\|^2 = 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \Leftrightarrow \|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Frage: Unter welchen Bedingungen für f gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

mit den Fourier-Koeffizienten c_k.
Ziel: Zeige die Parsevalsche Gleichung für die Fourier-Koeffizienten c_k, $\{e_k = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$, $f \in R[a, b] \implies$ Konvergenz der Fourier-Reihe in L^2.

Lemma 0.10. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} - \frac{1}{2}$$

Beweis. $\cos(kt) = \frac{1}{2}\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right)$

$$\begin{aligned}
\implies \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \\
&= \frac{1}{2} e^{-int} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}}_{\text{geometrische Summenformel}} \\
&= \frac{1}{2} e^{-int} \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{-int} - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}} \\
&\overset{\text{Erweitern}}{=} \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} t\right)}
\end{aligned}$$

□

Lemma 0.11. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es gilt für $x \in [a, b]$ und $s \in \mathbb{R}$

$$F_s(x) := \int_a^x f(y) \sin(sy) \, \mathrm{d}y$$

konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $|s| \to \infty$ und $x \in [a, b]$.

Beweis. Sei $s \neq 0$.

$$F_s(x) = \int_a^x f(y) \sin(sy) \, \mathrm{d}y \overset{\text{part. Integr.}}{=} -f(y) \frac{1}{s} \cos(sy) \Big|_a^x + \int_a^x \frac{1}{s} \cos(sy) f'(y) \, \mathrm{d}y.$$

f, f' stetig auf $[a, b] \implies \exists M > 0,$ s.d. $|f(y)| \leq M, |f'(y)| \leq M$ mit $y \in [a, b]$. Dann gilt $|F_s(x)| \leq \frac{2M}{|s|} + \frac{M}{|s|} \cdot (b - a)$, $\forall x \in [a, b]$. Also konvergiert $|F_s(x)|$ gleichmäßig gegen 0 für $|s| \to \infty$ und $x \in [a, b]$. □

Lemma 0.12. Es gilt $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ für $0 < x < 2\pi$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen Intervallen $[\delta, 2\pi - \delta]$ für $\delta > 0$.

Beweis. Aus Hilfslemma **??** folgt für $0 < x < 2\pi$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{x} \cos(ky)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\pi}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(ky) \right) \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Lemma ??}}{=} \int_{\pi}^{x} \left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})y\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}y\right)} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_{\pi}^{x} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})y\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}y\right)}\,\mathrm{d}y}_{=:F_n(x)} - \frac{1}{2}(x-\pi)
\end{aligned}$$

Z.Z.: $F_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $n \to \infty$. Die Funktion $f(y) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$ ist auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ stetig differenzierbar, weil $\frac{y}{2} \neq 0$ auf $[\delta, 2\pi-\delta]$, sodass aus Hilfslemma **??** folgt

$$F_n(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{1}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \cdot \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) y\right) \mathrm{d}y \overset{\text{glm.}}{\to} 0$$

für $n \to \infty$ und $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$. □

Lemma 0.13. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

konvergiert gleichmäßig $\forall x, 0 \leq x \leq 2\pi$. Insbesondere gilt für $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis. Lemma **??** $\implies \forall x, y \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned}
\frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{(y-\pi)^2}{4} &= \int_{y}^{x} \frac{t-\pi}{2}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{??}{=} -\int_{y}^{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\substack{\text{glm. Konv.} \\ \text{Satz ??}}}{=} -\sum_{k=1}^{\infty} \int_{y}^{x} \frac{\sin(kt)}{k}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ky)}{k^2}
\end{aligned}$$

$$\xRightarrow{y \text{ fest}} \frac{(x-\pi)^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \quad \forall x \in (0, 2\pi), C \text{ konst}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ mit Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Bestimme die Konstante C:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \right) \mathrm{d}x \\
\frac{\pi^3}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} \, \mathrm{d}x}_{=0} + \int_0^{2\pi} C \, \mathrm{d}x \\
\frac{\pi^3}{6} &= C \cdot 2\pi \\
C &= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

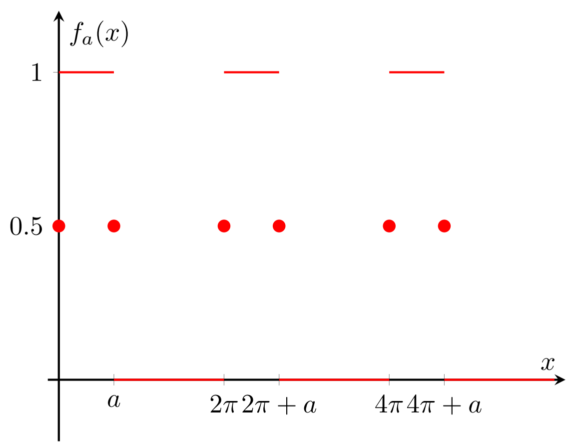
Für $x = 0$ oder $x = 2\pi$ folgt die Behauptung durch Grenzübergang, da beide Seiten stetig sind auf $[0, 2\pi]$ □

Lemma 0.14. Sei f Treppenfunktion, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π periodisch. Dann $s_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ in $L^2[0, 2\pi]$, d.h. Fourier-Reihe von f konvergiert im quadratischen Mittel gegen f.

Beweis. Zunächst Spezialfall

$$f_a(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0.5, & x \in \{0, a\} \\ 0, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Es gilt $\|f_a\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f_a|^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^a 1 \, \mathrm{d}x = a$.



Fourier-Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a}{2\pi} \\
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_a(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1}{ik}\right)e^{-ikx}\Big|_0^a \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{i}{iik}\right)\left(e^{-ika}-1\right) \\
&\overset{k\neq 0}{=} \frac{i}{2\pi k}\left(e^{-ika}-1\right)
\end{aligned}
$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
|c_k|^2 &= \frac{1}{4\pi^2k^2}\underbrace{\left(e^{-ika}-1\right)\left(e^{ika}-1\right)}_{=1-e^{ika}-e^{-ika}+1} \\
&= \frac{1}{2\pi^2k^2}\left(1-\frac{e^{ika}+e^{-ika}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi^2k^2}\left(1-\cos(ka)\right) \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 &= \underbrace{\frac{a^2}{4\pi^2}}_{a_0^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(|c_{-k}|^2+|c_k|^2\right) \\
&\overset{\cos(-ka)=\cos(ka)}{=} \frac{a^2}{4\pi^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2\pi^2k^2}\left(1-\cos(ka)\right) \\
&= \frac{a}{4\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}}-\frac{1}{\pi^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\cos(ka)}_{=\frac{(a-\pi)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2}+\frac{1}{6}-\frac{(a-\pi)^2}{4\pi^2}+\frac{1}{12} \\
&= \frac{a}{2\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\quad 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = a = ||f_a||_{L^2}
$$

$$
\xrightarrow{\text{Satz ??}} \|f_a - s_n(f_a)\|_{L^2}^2 = \|f_a\|^2 - 2\pi\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0
$$

Sei $f \in R[0,2\pi]$ eine beliebige 2π-periodische Treppenfunktion mit Sprungstellen

$$
a_j \in (0,2\pi) \quad j = 1,\dots,l
$$

Jede Treppenfunktion f läßt sich schreiben als

$$f(x) = \sum_{j=1}^{l} d_j \underbrace{f_{a_j}(x)}_{\text{Spezialfunktion (als } f_a(x))}, x \in [0, 2\pi]$$

f_{a_j} Spezielle Treppenfunktion mit Sprungstelle $a = a_j$ und $f_{a_j}(x) \in \{0, 1\}$ $\forall j, x \neq a_j$. Dann $\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\| \xrightarrow{L^2} 0, n \to \infty$. Betrachte

$$s_n(f) = \sum_{j=1}^{l} d_j s_n(f_{a_j})$$

und

$$\|f - s_n(f)\| = \left\| \sum_{j=1}^{l} d_j (f_{a_j} - s_n(f_{a_j})) \right\| \leq \sum_{j=1}^{l} |d_j| \underbrace{\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\|}_{\xrightarrow{L^2} 0} \xrightarrow{L^2} 0, \ n \to \infty$$

□

Satz 0.15. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π-periodische Funktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f und es gilt die Parsevalsche Gleichung (sog. Vollständigkeitsrelation)

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}_{=\|f\|^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Beweis. O.B.d.A. sei f reellwertig (sonst werden Real- und Imaginärteil getrennt behandelt) und $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 2\pi]$ (sonst betrachte $\overline{f}(x) := \frac{f(x)}{M}$, $M = \sup\limits_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu ε 2π-periodische Treppenfunktionen $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

$$-1 \leq \varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \leq 1$$

und

$$\max_{x \in [0,2\pi]} |\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{16\pi} \varepsilon^2$$

Konstruktion von $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ siehe Rannacher. Dann,

$$|f - \varphi_\varepsilon|^2 \leq |\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon|^2 \leq (|\psi_\varepsilon| + |\varphi_\varepsilon|)(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \underset{\substack{|\psi_\varepsilon|<1 \\ |\varphi_\varepsilon|<1}}{\leq} 2(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)$$

und

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|^2 = \int_0^{2\pi} |f - \varphi_\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}x \leq 2 \int_0^{2\pi} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \, \mathrm{d}x \leq 2 \frac{\varepsilon^2}{16\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Weiter gilt: φ_ε Treppenfunktion $\overset{??}{\Longrightarrow}$ Fourier-Reihe von φ_ε konvergiert gegen φ_ε in L^2, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \ \forall n \geq n_\varepsilon : \ \|s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Aus Satz **??** folgt

$$\|(f-\varphi_\varepsilon)-s_n(f-\varphi_\varepsilon)\|^2 \leq \|f-\varphi_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\|f-s_n(f)\| &= \|f-s_n(f-\varphi_\varepsilon)-s_n(\varphi_\varepsilon)-\varphi_\varepsilon+\varphi_\varepsilon\| \\ &\leq \|(f-\varphi_\varepsilon)-s_n(f-\varphi_\varepsilon)\|+\|\varphi_\varepsilon-s_n(\varphi_\varepsilon)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

$$\implies s_n(f) \xrightarrow{L^2} f,\ n\to\infty$$

□

Bemerkung 0.16. Konvergenz in L^2 ist „sehr schwach“. Für „glattere“ Funktionen konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig.

Satz 0.17. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar, d.h. $\exists$ Unterteilung von $[0,2\pi]$

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_m=2\pi$$

mit $f\big|_{[t_{j-1},t_j]}$ ist stetig differenzierbar für $j=1,\ldots,m$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f.

Beweis. f stetig $\implies f\in R[0,2\pi] \implies$ Fourier-Reihe von f konvergiert gegen f in L^2, d.h. $\|s_n(f)-f\| \xrightarrow{L^2} 0,\ n\to\infty$. Betrachte $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, \phi(x)=\phi_j(x),\ x\in(t_{j-1},t_j),\ \phi_j: [t_{j-1},t_j]\to\mathbb{C}$ stetige Ableitung von $f\big|_{[t_{j-1},t_j]}$. Definiere ϕ in t_j entsprechend (möglich, da ϕ eine stückweise stetige Funktion ist). Defininition von $R[0,2\pi] \implies \phi\in R[0,2\pi] \implies$ Für die Fourier-Koeffizienten von ϕ gilt: $\gamma_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\gamma_k|^2=\frac{1}{2\pi}\|\phi\|^2<\infty$. Berechne Fourier-Koeffizienten c_k von f

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{part.Integr.}}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi}f(x)\frac{i}{k}e^{-ikx}\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{f'(x)}_{\phi(x)}\frac{i}{k}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-i}{2\pi k}\int_0^{2\pi}\phi(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-i}{k}\gamma_k \\ &\implies |c_k| = \frac{1}{k}|\gamma_k|\end{aligned}$$

Es gilt $|\alpha \cdot \beta| \leq \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\beta|^2$, da Quadrate größer 0 sind

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}\frac{1}{k^2} + \frac{|\gamma_k|^2}{2} \\
&\Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty \\
&\Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \text{ absolut konvergent} \\
&\Longrightarrow \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}}_{\text{Fourier-Reihe von} f}
\end{aligned}
$$

konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion g, die stetig ist. Also $s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} g,\ n \to \infty,\ \Rightarrow$ $s_n(f) \xrightarrow{L^2} g,\ n \to \infty$. Andererseits $s_n(f) \xrightarrow{L^2} f,\ n \to \infty$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \|f - g\|_{L^2} = 0 \\
&\Longrightarrow f \equiv g,\ \text{weil } f \text{ und } g \text{ stetig sind} \\
&\Longrightarrow s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} f,\ n \to \infty
\end{aligned}
$$

$\square$