

Satz 0.1 (Charakterisierung abgeschlossener Mengen). Sei $A \subset \mathbb{K}^n$. Dann gilt

A abgeschlossen $\iff$ Ist $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in A mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$, dann $a \in A$.

Beweis. • „ $\implies$ “: Sei A abgeschlossen und $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in A mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x.$$

Ang.: $x \notin A$, d.h. $x \in A^C$. Da A^C offen, folgt, es ex. ein $\epsilon > 0$, s.d. $K_\epsilon(x) \subset A^C$. Mit $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ folgt, dass fast alle Folgelemente $x^{(k)}$ in $K_\epsilon(x) \subset A^C$ liegen.

Widerspruch zu: $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset A$. Damit folgt $x \in A$.

• „ $\impliedby$ “: Sei $A \subset \mathbb{K}^n$ s.d. alle konvergenten Folgen in A einen Grenzwert in A haben.

Zu zeigen: A^C offen. Sei $x \in A^C$ beliebig. Dann g.z.z.: $\exists \epsilon > 0$ s.d. $K_\epsilon(x) \subset A^C$.

Ang.: A^C nicht offen. Dann ex. $\forall k \in \mathbb{N}$ ein Punkt $x^{(k)}$ mit $x^{(k)} \in A \cap K_{\frac{1}{k}}(x)$. Dann ist $x^{(k)} \in A \forall k \in \mathbb{N}$ und $\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{k}$. Damit folgt

$$x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \xrightarrow{\text{Vorr.}} x \in A \quad \nRightarrow \quad A^C \text{ offen} \implies A \text{ abgeschlossen.}$$

□

Definition 0.2 (Randpunkt). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Ein Punkt $a \in \mathbb{K}^n$ heißt Randpunkt von M , falls in jeder Umgebung von a sowohl ein Punkt von M , als auch ein Punkt von $M^C = \mathbb{K}^n \setminus M$ liegt.

Die Menge aller Randpunkte von M heißt der Rand von M , bezeichnet mit ∂M .

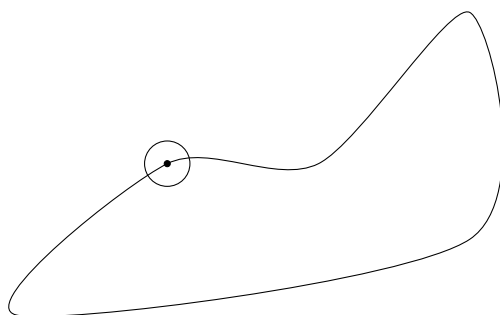


Abbildung 1: Randpunkt einer Menge $M \subset \mathbb{K}^n$

Beispiel 0.3. (1) Für $I \in \{[a, b[, [a, b],]a, b],]a, b[\}$ gilt $\partial I = \{a, b\}$.

$$\partial[a, \infty[= \{a\}$$

$$\partial]a, \infty[= \{a\}$$

(2) Für $K_1(0)$ gilt

$$\begin{aligned}\partial K_1(0) &= \partial\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \\ &\quad \text{„Einheitssphäre“}.\end{aligned}$$

(3) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, weil in jeder Umgebung eines Punktes in $\mathbb{Q}$, gibt es rationale und irrationale Zahlen. Der Rand von $\mathbb{R}$ ist leer.

Definition 0.4 (Inneres, Abschluss). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$

- Die Menge $M^\circ := M \setminus \partial M$ heißt das Innere von M .
- Die Menge $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt der Abschluss von M .

Satz 0.5 (Inneres ist Offen, Abschluss ist abgeschlossen). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$.

- (i) Die Menge $M^\circ = M \setminus \partial M$ ist offen. M° ist die größte offene Menge in M .
- (ii) Die Menge $\overline{M} = M \cup \partial M$ ist abgeschlossen. $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst.
- (iii) Der Rand ∂M ist abgeschlossen.

Beweis. (i) Z.z.: $M \setminus \partial M$ offen.

Sei $x \in M \setminus \partial M$ beliebig, dann ex. $\epsilon > 0$, s.d. $K_\epsilon(x) \subset M$ ($\implies K_\epsilon(x) \cap M^C = \emptyset$), sonst wäre $x \in \partial M$.

Für dieses ϵ gilt auch $K_\epsilon(x) \cap \partial M = \emptyset$, denn falls $z \in K_\epsilon(x) \cap \partial M$ existiert, dann ist $K_\epsilon(x)$ Umgebung von z und folglich $K_\epsilon(x) \cap M^C \neq \emptyset$.

Damit folgt:

$$K_\epsilon(x) \subset M \setminus \partial M \implies M \setminus \partial M \text{ offen.}$$

Sei $U \subset M$ offen, dann ist analog $U \cap \partial M = \emptyset$. Damit gilt $U \subset M \setminus \partial M$. Da U beliebig, folgt damit $M \setminus \partial M =: M^\circ$ ist größte offene Teilmenge von M .

(ii) Z.z.: $M \cup \partial M$ abgeschlossen.

Betrachte $M^C = \mathbb{K}^n \setminus M$. Nach Definition des Rands gilt $\partial M^C = \partial M$. Damit folgt mit (i), dass $M^C \setminus \underbrace{\partial M}_{=\partial M^C}$ offen ist. Dann

$$(M^C \setminus \partial M)^C = \mathbb{K}^n \setminus (M^C \setminus \partial M) = \underbrace{(\mathbb{K}^n \setminus M^C)}_{=M} \cup \partial M = M \cup \partial M.$$

D.h. $M \cup \partial M$ ist abgeschlossen.

Sei $V \in \mathcal{K}^n$ abgeschlossen mit $M \subset V$. Dann gilt V^C ist offen und $V^C \subset M^C$. Damit folgt mit (i):

$$\underbrace{V^C}_{\text{offen}} \subset M^C \setminus \underbrace{\partial M^C}_{=\partial M} = M^C \setminus \partial M \implies \mathbb{K}^n \setminus (M^C \setminus \partial M) = (M \cup \partial M) \subset V.$$

Da V beliebig, folgt damit $M \cup \partial M$ ist kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst.

(iii) Mit $\partial M = (M \cup \partial M) \setminus (M \setminus \partial M)$ folgt

$$\mathbb{K}^n \setminus \partial M = \underbrace{(\mathbb{K}^n \setminus (M \cup \partial M))}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(M \setminus \partial M)}_{\text{offen}}.$$

Damit ist $\mathbb{K}^n \setminus \partial M$ offen, also ∂M abgeschlossen.

□

Definition 0.6 (Kompaktheit). Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ heißt kompakt (bzw. folgenkompakt), wenn jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

Beispiel 0.7. (i) Sei

$$\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n, x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x.$$

Dann ist $A := \{x^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup x$ kompakt.

(ii) $]0, 1[$ ist nicht kompakt, denn $\left(\frac{1}{2k}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset]0, 1[, \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Auch: $\left(1 - \frac{2}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset]0, 1[, 1 - \frac{2}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$

Definition 0.8 (Überdeckung). Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Teilmengen $U_i \subset \mathbb{K}^n$ heißt Überdeckung von M , falls gilt

$$M \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Eine Überdeckung heißt offen bzw. abgeschlossen, wenn alle U_i offen bzw. abgeschlossen sind.

Satz 0.9 (Charakterisierung von Kompaktheit). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) M ist folgenkompakt
- (ii) M ist beschränkt und abgeschlossen
- (iii) Jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M enthält eine endliche Überdeckung von M , d.h. es existieren endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$, s.d. $M \subset (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k})$ (sogenannte Überdeckungseigenschaft von Heine und Borel).

Beweis. • (i) $\implies$ (ii): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ folgenkompakt. Dann existieren für alle konvergenten Folgen $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M . Damit liegt auch der Grenzwert von $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ in M . Also ist M abgeschlossen.

Ang.: M ist nicht beschränkt. Dann ex. eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Damit hat $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. Widerspruch zur Kompaktheit von M . Also ist M beschränkt.

- (ii) $\implies$ (i): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Dann folgt mit ??, dass alle Folgen $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ beschränkt sind und eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$ besitzen. Da M abgeschlossen ist, folgt $x \in M$.

Also ist M folgenkompakt.

- (iii) $\implies$ (i): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ und M besitze die Überdeckungseigenschaft. Sei weiter $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ beliebig.

Z.z.: Es ex. eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x \in M$.

Ang.: Solche Teilfolge existiert nicht. Dann gilt: $\forall x \in M$ existiert eine offene Umgebung U_x von x , die nur endlich viele Folgelemente von $(x^{(k)})$ enthält (wären in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgelemente, dann existiert eine konvergente Teilfolge).

Damit ist $M = \bigcup_{x \in M} U_x$ eine offene Überdeckung, d.h. es existiert nach Vorr. eine endliche Überdeckung von M , d.h. eine endliche Menge I mit

$$\{x_i \mid x_i \in M, i \in I\} =: M_i \text{ s.d. } M \subset \bigcup_{x_i \in M_i} U_{x_i}.$$

Da $\forall i \in I$ U_{x_i} nur endlich viele Folgelemente enthält, enthält M endlich viele Folgelemente von $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, d.h. $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \not\subset M$ ∇ .

Also existiert eine Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in M$

- (ii) $\implies$ (iii): Sei M beschränkt und abgeschlossen und sei $\{U_i, i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M .

Zu zeigen: Es existiert eine endliche Überdeckung von M .

Ang.: Eine solche Überdeckung existiert nicht. Konstruiere induktiv eine Folge von beschränkten, abgeschlossenen Würfeln in $\mathbb{K}^n$:

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

mit

- (1) $M \cap Q_i$ wird nicht durch endlich viele U_{i_k} überdeckt.
- (2) Kantenlänge von $Q_m = 2^{-m}$ Kantenlänge von Q_0 .

Sei Q beschränkter abgeschlossener Würfel in $\mathbb{K}^n$ mit Kantenlänge L , s.d. $M \subset Q$. Setze

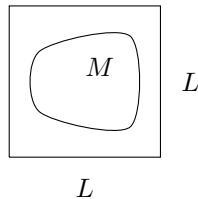


Abbildung 2: Abgeschlossener Würfel $Q \subset \mathbb{K}^n$ mit Kantenlänge L und $M \subset Q$

$Q_0 = Q$, Kantenlänge von $Q_0 = L$. Sei Q_m bereits konstruiert. Sei

$$Q_m = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n.$$

Länge $(I_k) = \text{Kantenlänge}(Q_m) \forall k = 2^{-m}L$

Wir zerlegen jedes I_i in 2 abgeschlossene Intervalle mit halber Länge $I_i^{(1)}$ und $I_i^{(2)}$ und setzen für $(s_1, \dots, s_n) \in \{1, 2\}^n$

$$Q_m^{s_1, \dots, s_n} := I_1^{(s_1)} \times \dots \times I_n^{(s_n)}.$$

Wir erhalten 2^n Würfel mit

$$Q_m := \bigcup_{(s_1, \dots, s_n) \in \{1, 2\}^n} Q_m^{(s_1, \dots, s_n)}.$$

Da $M \cap Q_m$ nicht von endlich vielen U_{i_k} überdeckt wird, gilt dies auch für einen Würfel

$$Q_{m+1} := Q_m^{(s_1, \dots, s_n)}.$$

Es gilt für die Kantenlänge $(Q_{m+1}) = \frac{1}{2}$ Kantenlänge $(Q_m) = 2^{-(m+1)}L$.

Für $k \in \mathbb{N}$ wähle $x^{(k)} \in Q_k \cap M$. Damit ist $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$, da nach Konstruktion von $Q_1, Q_2, \dots$

$$\|x^{(l)} - x^{(k)}\| \leq 2^{-n_0}L, \quad \forall l, k \geq n_0.$$

Damit folgt $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in M$ und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, weil $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Also existiert ein i_k , s.d. $x \in U_{i_k}$ liegt. Damit liegen fast alle Q_m in U_{i_k} . Das heißt fast alle $M \cap Q_m$ liegen in U_{i_k} . Widerspruch zur Annahme, dass eine endliche Überdeckung nicht existiert.

Also existiert eine endliche Überdeckung von M .

□

Bemerkung 0.10. Wichtige Voraussetzung für die Überdeckungseigenschaft von Heine und Borel ist, dass $\mathbb{K}^n$ endlich-dimensional ist.

In unendlich dimensionalen Banach-Räumen wie z.B.: $C[a, b]$ ist dies nicht möglich.

Korollar 0.11. Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge in $\mathbb{K}^n$ ist ebenfalls kompakt.

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ kompakt und $A \subset M$ abgeschlossen. Wegen 0.9 ist M beschränkt. Damit ist auch $A \subset M$ beschränkt und somit nach 0.9 kompakt. □