

Analysis II

Prof. Dr. Ekaterina Kostina

SoSe 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Folgen und Reihen von Funktionen	3
1.1	Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz	3
1.2	Der Funktionenraum $C[a, b]$	5
1.3	Integration und Grenzübergänge	7
1.4	Der Funktionen-Raum $R[a, b]$	9
1.5	Fourier-Entwicklung	14
2	Der n-dimensionale Zahlenraum K^n	26
2.1	Der euklidische Raum K^n	26
2.2	Teilmengen in K^n (Topologische Grundbegriffe)	29

Kapitel 1

Folgen und Reihen von Funktionen

1.1 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Definition 1.1. Sei für $n \in \mathbb{N}$, $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ falls $\forall x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon, x) > 0 \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Beispiel 1.2. (a)

$$f_n(x): [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, 2]$.

$$x = 0: f_n(0) = 0 = f(0)$$

$$0 < x \leq 2: \forall n \geq \frac{2}{x}, f_n(x) = 0 = f(x)$$

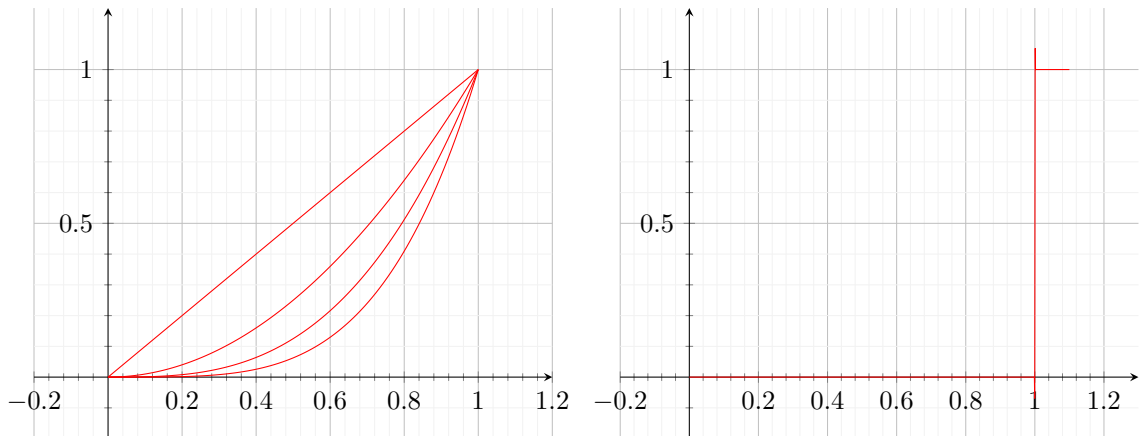
(b) $f_n(x) = x^n$, $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\text{punktweise}]{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Bemerkung 1.3. Punktweiser Limes stetiger Funktionen muss nicht stetig sein.

Definition 1.4. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ falls gilt

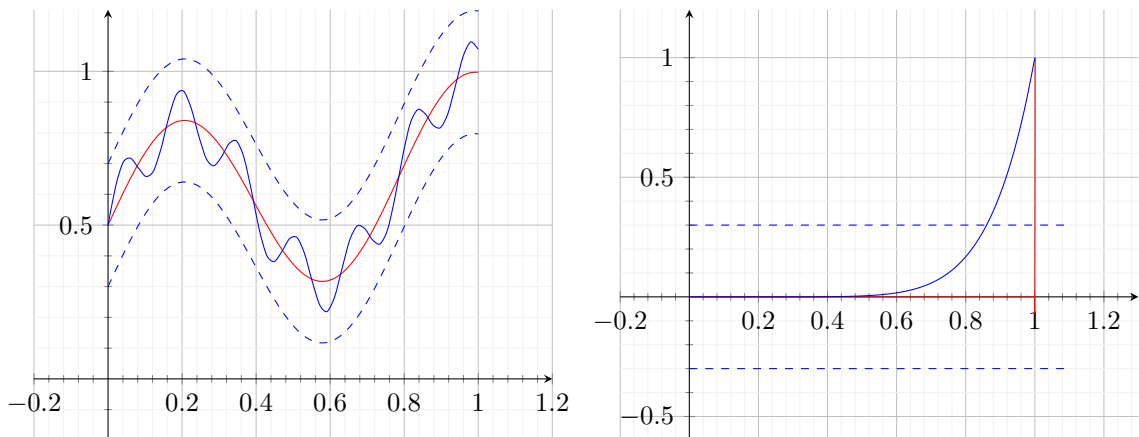
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ und } n \geq N.$$

Abbildung 1.1: $f_n(x) = x^n$ und ihre Grenzfunktion

Bemerkung 1.5. $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \forall n \geq N$ gilt

$$\text{graph}(f_n) \subset \epsilon\text{-Umgebung von Graphen von } f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid |y - f(x)| < \epsilon\}.$$

Beispiele 1.2 (a) und (b) nicht gleichmäßig konvergent, zu (a): Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ gilt $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| =$

Abbildung 1.2: Links: „ ϵ -Schlauch“, Rechts: 1.2 (b) nicht gleichmäßig konvergent

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

Beispiel 1.6. $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(2\pi n \cdot x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = 0$.

$$|\sin(2\pi n \cdot x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in [0, 2] \implies \text{punktweise Konvergenz.}$$

Sei nun $\epsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \epsilon$. Damit folgt

$$\forall n \geq N \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{N} < \epsilon \quad \forall x \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

Bemerkung 1.7. Konvergiert $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, dann konvergiert f_n punktweise gegen f . Die Umkehrung gilt nicht, siehe 1.2 (a) und (b).

Satz 1.8 (Gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ stetig in D . Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt: f ist stetig in D .

Beweis. Seien $x_0 \in D$ und $\epsilon > 0$. Zu zeigen: $\exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n \rightarrow \infty} f \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \geq N \quad \forall x \in D \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$f_n \text{ stetig in } x_0 \implies \exists \delta \text{ s.d. } \forall x \in D \text{ gilt } |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Zusammen: $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

1.2 Der Funktionenraum $C[a, b]$

Definition 1.9 (Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$). Es sei D ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) stetig. Dann

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Das Maximum existiert wegen der Stetigkeit des Absolutbetrags und weil $[a, b]$ beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz 1.10 ($\|\cdot\|_\infty$ und gleichmäßige Konvergenz). Es sei $D = [a, b]$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

- (i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \iff \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$
- (ii) Cauchy-Kriterium: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b] \iff \forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n, m \geq N_0$ gilt $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$

Beweis. (i) „ $\implies$ “: Sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \forall x \in [a, b]$ und $\forall n \geq N$. Damit folgt:

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \implies \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

„ $\impliedby$ “: Sei $\epsilon > 0$. Wegen $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon \forall n \geq N$. Damit folgt $\forall n \geq N$ und $\forall x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

(ii) „ $\implies$ “ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$, d.h. $\exists f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.d. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{gleichmäßig}} f$.

Sei $\epsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall n \geq N_0$ und $\forall x \in [a, b]$.

Damit gilt $\forall n, m \geq N_0$ und $\forall x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} \\ \implies \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| &= \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_0. \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei $\epsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N_0 \quad \forall x \in [a, b].$$

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\implies$ Definiere $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in [a, b]$.

Dann gilt $\forall n \geq N_0$, $\forall x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} \implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f.$$

□

Bemerkung 1.11. $\|\cdot\|_\infty$ erfüllt s.g. Normeigenschaften:

(N1) $\|f\|_\infty = 0 \implies f(x) = 0, x \in [a, b]$ (Definitheit)

(N2) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (Homogenität)

(N3) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (Dreiecksungleichung)

folgen direkt aus den Eigenschaften des Absolutbetrags.

Definition 1.12. Der Funktionenraum $C[a, b]$ definiert durch

$$C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \},$$

ist mit $\|f\|_\infty$ ein normierter Vektorraum.

Satz 1.13 (Vollständigkeit). Der Raum $C[a, b]$ ist vollständig bezüglich gleichmäßiger Konvergenz, d.h. jede Cauchy-Folge von Funktionen aus $C[a, b]$ besitzt einen Limes in $C[a, b]$

Beweis. Rannacher

□

1.3 Integration und Grenzübergänge

Wichtige Frage: Wenn $f_n \rightarrow f$, gilt dann auch $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$?

Satz 1.14. Seien $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Riemann-integrierbare Funktionen und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (gleichmäßige Konvergenz). Dann gilt f stetig und Riemann-integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Beweis. $f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n \rightarrow \infty} f \implies f \text{ stetig} \implies f \text{ Riemann-integrierbar.}$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \underbrace{\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|}_{= \|f_n - f\|_\infty} \underbrace{(b - a)}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \text{beschränkt}}} \\ &\quad \underbrace{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}_{\text{beschränkt}} \end{aligned}$$

□

Satz 1.15. Seien $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen ($n \in \mathbb{N}$) und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig auf $[a, b]$, d.h. die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=0}^N f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gleichmäßig konvergent. Dann gilt:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

ist stetig und Riemann-integrierbar und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx \\ \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx, \end{aligned}$$

d.h. die Reihe wird gliedweise integriert.

Beweis. f_n sind stetig $\implies \sum_{n=0}^N f_n(x)$ stetig und Riemann-integrierbar.

Die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=0}^N f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ stetig} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N f_n(x) \right) \text{ gleichmäßiger Limes.}$$

Es gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx + \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig, d.h. $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall N \geq N_\epsilon$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) dx \right| \leq \epsilon \cdot (b-a) \\ \Rightarrow & \left| \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx - \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \epsilon \\ \Rightarrow & \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \end{aligned}$$

□

Korrolar 1.16 (Integration von Potenzreihen). Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in jedem Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ für $0 < r < \rho$ gleichmäßig und für $[a, b] \subset]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \Big|_a^b.$$

Beweis. Nur die gleichmäßige Konvergenz für $|x-x_0| \leq r$ ist zu beweisen: Für $|x-x_0| \leq r$, $r < \rho$ gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} \\ &\stackrel{|x-x_0| < r}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho-\epsilon} \right)^n \cdot r^n \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{r}{\rho-\epsilon} \right)^n}_{<1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{geometrische Reihe}} 0. \end{aligned}$$

$$(*): \rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}, r < \rho - \epsilon \text{ für ein } \epsilon > 0 \implies \exists N_0 \in \mathbb{N}, \text{ s.d. } \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho-\epsilon} \quad \forall n \geq N_0$$

□

Jetzt: Fourier Analysis!

1.4 Der Funktionen-Raum $R[a, b]$

Definition 1.17. Eine $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, falls $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx.$$

Bemerkung 1.18. 1. Analog: Definitionen von uneigentlichen Riemann-integralen für komplexwertige Funktionen

2. Die Rechenregeln f+r das reelle Riemann-integral übertragen sich auf komplexwertige Integrale, insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{f(x)} \, dx &= \int_a^b (\operatorname{Re} f(x) - i \cdot \operatorname{Im} f(x)) \, dx \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx - i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx \\ &= \overline{\int_a^b f(x) \, dx}. \end{aligned}$$

Definition 1.19. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt stückweise stetig, falls

- 1) f in $[a, b]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig und beschränkt ist.
- 2) in jeder dieser Unstetigkeitsstellen $\xi \in [a, b]$ die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte

$$f(\xi_{\pm}) := \lim_{h \searrow 0} f(\xi \pm h).$$

existieren. Für $\xi \in (a, b)$ wird

$$f(\xi) := \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2}.$$

gesetzt.

Bemerkung 1.20. Stückweise stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Die Menge der in diesem Sinne auf $[a, b]$ stückweise stetigen (Riemann-integrierbaren) Funktionen bilden einen Vektorraum $R[a, b]$.

Definition 1.21. Wir definieren

$$(f, g) := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad (\text{„Sesquilinearform“}).$$

Dies ist wohldefiniert da für $f, g \in R[a, b]$ das Produkt $f(x) \cdot \overline{g(x)} \in R[a, b]$ ist.

Definition 1.22 (Skalarprodukt). Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt auf V , falls $\forall u, v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(S1) \quad \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} \quad (\text{Symmetrie, hermitesch falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ symmetrisch falls } \mathbb{K} = \mathbb{R})$$

$$(S2) \quad \begin{aligned} \langle \alpha v, u \rangle &= \alpha \langle v, u \rangle \\ \langle v, \alpha u \rangle &= \overline{\alpha} \langle v, u \rangle \\ \langle v, u + w \rangle &= \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle \\ \langle v + u, w \rangle &= \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

$$(S3) \quad \begin{aligned} &\text{Positivdefinitheit: } \langle v, v \rangle \geq 0 \\ &\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0 \end{aligned}$$

Bemerkung 1.23. Auf $R[a, b]$ besitzt $(\cdot, \cdot)$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts, denn es gilt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in R[a, b], f_1, f_2 \in R[a, b], g_1, g_2 \in R[a, b]$:

$$(1) \quad (\alpha f_1 + \beta f_2, g) = (\alpha f_1, g) + (\beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$$

$$(2) \quad (f, \alpha g_1 + \beta g_2) = (f, \alpha g_1) + (f, \beta g_2) = \overline{\alpha}(f, g_1) + \overline{\beta}(f, g_2)$$

$$(3) \quad (f, g) = \int_a^b f \cdot \overline{g} \, dx = \int_a^b \overline{\overline{f}g} \, dx = \overline{\int_a^b \overline{f}g \, dx} = \overline{\int_a^b g \overline{f} \, dx} = \overline{(g, f)}$$

$$(4) \quad (f, f) = \int_a^b f \overline{f} \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \geq 0$$

$$(5) \quad \text{Aus (4) und der Definition von } R[a, b] \text{ folgt: } (f, f) = 0 \implies f \equiv 0 \text{ auf } [a, b].$$

$(\cdot, \cdot)$ wird auf $R[a, b]$ L^2 -Skalarprodukt genannt.

Lemma 1.24. Für ein L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf $R[a, b]$ gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Beweis. 1) Falls $g \equiv 0$ gilt trivialerweise

$$|(f, g)|^2 = 0 = (f, f) \cdot (g, g).$$

2) Falls $g \not\equiv 0$, sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig

$$0 \leq (f + \alpha g, f + \alpha g) = (f, f) + \alpha(g, f) + \overline{\alpha}(f, g) + \alpha \cdot \overline{\alpha}(g, g).$$

Setze $\alpha := -\frac{(f, g)}{(g, g)} = -\frac{\overline{(g, f)}}{(g, g)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 0 &\leq (f, f) - \frac{(f, g) \cdot (g, f)}{(g, g)} - \frac{(g, f) \cdot (f, g)}{(g, g)} + \frac{(f, g)(g, f)(g, g)}{(g, g)(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{(f, g)(g, f)}{(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{\overline{(f, g)}(f, g)}{(g, g)} \\
 &= (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \\
 \implies 0 &\leq (f, f)(g, g) - |(f, g)|^2.
 \end{aligned}$$

□

Definition 1.25 (L^2 -Norm). Das L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ induziert die L^2 -Norm auf $R[a, b]$ mit

$$\|f\| = \|f\|_{L^2} := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f \cdot \bar{f} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bemerkung 1.26. Normeigenschaften von L^2 auf $R[a, b]$ sind erfüllt:

(N1) Definitheit: $\|f\| = 0 \implies (f, f) = 0 \implies f = 0$ auf $[a, b]$

(N2) Homogenität: $\|\alpha f\| = (\alpha f, \alpha f)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 (f, f))^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|f\|$

(N3) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
 \|f + g\| &= (f + g, f + g)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (\|f\|^2 + (f, g) + (g, f) + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} (\|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|f\| + \|g\|.
 \end{aligned}$$

Definition 1.27 (Konvergenz im Quadratischen Mittel (L^2 -Konvergenz)). Seien $f_n \in R[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in R[a, b]$. f_n konvergiert gegen f im Quadratischen Mittel $f_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty}$, wenn gilt

$$\|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Das heißt, dass die quadratische Abweichung zwischen f_n und f gegen Null konvergiert:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

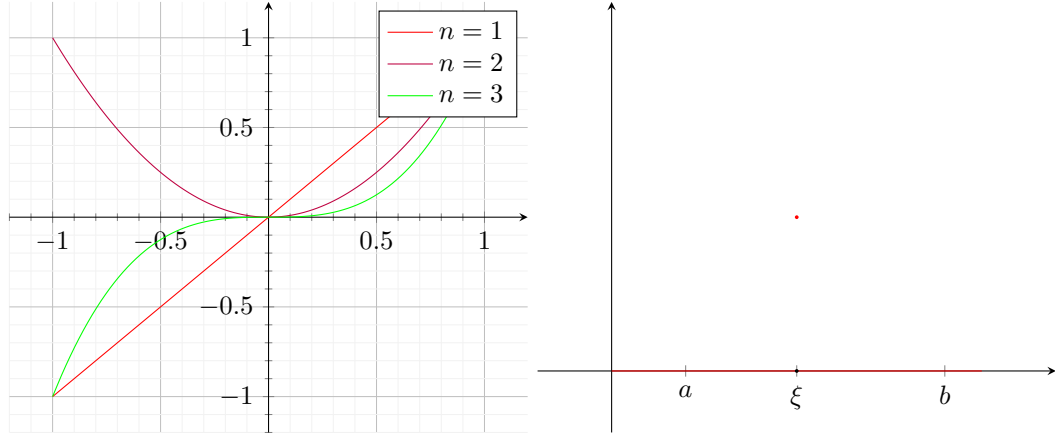
Bemerkung 1.28. (1) Es gilt:

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \leq \|f_n - f\|_{\infty}^2 (b - a).$$

Damit folgt

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Umkehrung gilt i.A. nicht! Beispiel: $f_n(x) := x^n$, $x \in [-1, 1]$



Abbildungung 1.3: Links: $f_n(x) = x^n$, Rechts: $f(x) \not\equiv 0$

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 x^{2n} dx = 2 \int_0^1 x^{2n} dx = 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f \equiv 0$.

Aber wegen $f_n(1) = 1$ für $x = 1$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert f_n nicht punktweise gegen $f \equiv 0$ und wegen $f_n(-1) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x = -1$ konvergiert f_n nicht.

- (2) Der Raum $R[a, b]$ mit L^2 -Norm $\|\cdot\|$ ist **nicht vollständig**, d.h. es existieren Cauchy-Folgen in $R[a, b]$, die keinen Grenzwert in $R[a, b]$ haben. Beispiel: siehe Abb. 1.3 (Rechts). Hier ist $f(x) \not\equiv 0$, $x \in [a, b]$.

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 = \|f\|_{L^2},$$

aber $f(x) \notin R[a, b]$, denn

$$f(\xi) \neq 0 = \frac{\lim_{h \searrow 0} f(\xi + h) - \lim_{h \searrow 0} f(\xi - h)}{2}.$$

Definition 1.29 (Orthogonalität). $f, g \in R[a, b]$ heißen orthogonal, wenn gilt $(f, g) = 0$.

Eine Teilmenge $S \subset R[a, b]$ heißt Orthogonalsystem, wenn alle Elemente aus S paarweise orthogonal sind, d.h.

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} \|f_i\|^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall f_i, f_j \in S.$$

Satz 1.30. Die trigonometrischen Funktionen, für $k, l \in \mathbb{N}$

$$c_k(x) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \cos(kx) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_l(x) := \sin(lx)$$

bilden auf $R[a, b]$ bezüglich des L^2 -Skalarprodukts ein Orthogonalsystem und es gilt

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} s_l(x) \, dx = \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

Hier sei

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad \text{Kroneckersymbol.}$$

Beweis.

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \, dx = \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \, dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k} (1 - 1) = 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(lx)}_v \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx) \cdot \sin(lx)}_{\substack{u \\ =0}} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx)}_u \underbrace{l \cos(lx)}_{v'} \, dx \\ &= -\frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) c_l(x) \, dx \end{aligned}$$

Für $l = k$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= - \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx \\ \implies 2 \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx \\ &\stackrel{l=k}{=} \int_0^{2\pi} c_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} s_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - c_k^2(x)) \, dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx = \pi = \int_0^{2\pi} s_k^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Wenn $k \neq l$, dann folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{l^2}{k^2} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx &= 0. \end{aligned}$$

□

1.5 Fourier-Entwicklung

Definition 1.31 (Periodische Funktionen). $f : \mathbb{R} \rightarrow K$ heißt L -periodisch ($L > 0$) falls $f(x + L) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow f(x + kL) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$). Sei f periodisch und $p > 0$. Für $\tilde{f}(x) := f\left(\underbrace{\frac{L}{p}x}_{\text{Variablentransformation}}\right)$ gilt dann $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow K$ ist p -periodisch

Beispiel 1.32. $p = 2\pi$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &:= f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \Rightarrow f(x) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \\ \tilde{f}(x + 2\pi) &= f\left(\frac{L}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) \stackrel{f \text{ } L\text{-per}}{=} f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = \tilde{f} \end{aligned}$$

Hier betrachten wir deshalb nur 2π -periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow K$. Weiterhin betrachten wir Funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow K$, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π -periodisch.

Beispiel 1.33 (Trigonometrische Polynome). Für $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ betrachte

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) e^{ikx} + (a_k + ib_k) e^{-ikx} \right) \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \text{ mit } c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k \geq 0 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0 \end{cases} \\ (*) : \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

Für $a_k, b_k, k > 0$ ergibt sich $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Bemerkung 1.34. Ist f ein trigonometrisches Polynom, so kann man die Koeffizienten a_k, b_k, c_k durch Integration ausrechnen, d.h. a_k, b_k, c_k sind eindeutig.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \quad k > 0 \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx}), \quad L_2\text{-Skalarprodukt} \end{aligned}$$

Beweis. Sei zuerst $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\lambda x} \, dx &= \int_a^b \cos(\lambda x) \, dx + i \int_a^b \sin(\lambda x) \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} i \cos(\lambda x) \Big|_a^b \\ &\stackrel{\frac{1}{i} = -i}{=} \frac{1}{\lambda i} (\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{\lambda i} e^{i\lambda x} \Big|_a^b \\ \implies \int_0^{2\pi} e^{ikx} \, dx &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_1 x} e^{-ik_2 x} \, dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k_1 - k_2)x} \, dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k_1 \neq k_2 \\ 2\pi, & \text{falls } k_1 = k_2 \quad (\implies k_1 - k_2 = 0) \end{cases}$$

$\implies$ Behauptung für c_k . Für a_k, b_k gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \, dx = c_{-k} + c_k = b_k \cdot i$$

□

Bemerkung 1.35. Obige Formel gilt auch für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

falls die Reihen gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ konvergieren.

Frage: Hat jede 2π -periodische Funktion die Form $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ oder kann man sie durch trigonometrische Polynome approximieren? $\implies$ Motivation für Fourier-Reihen.

Definition 1.36 (Fourier-Reihe). Sei $f \in R[a, b]$ 2π -periodisch. Die Fourier-Koeffizienten von f sind gegeben durch

$$c_k := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx = \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx})$$

Die (formale) Fourier-Reihe von f ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit der n -ten Partialsumme

$$s_n(x) = s_n(f, x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Die Fourier-Reihe läßt sich in der Form schreiben

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx$$

Satz 1.37. Sei $f \in R[a, b]$ eine 2π -periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten

c_k , $k \in \mathbb{Z}$ und $s_n = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Beweis. Notation $e_k(x) := e^{ikx}$

$$(e_k, e_l) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} (f, e_k) \implies (f, e_k) = 2\pi c_k$$

$$(f, s_n) = \sum_{k=-n}^n (f, c_k e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} (f, e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} 2\pi c_k = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

$$(s_n, s_n) = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n \underbrace{c_k \overline{c_l}}_{|c_k|^2} \cdot \underbrace{(e_k, e_l)}_{= \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l \end{cases}}$$

Dann

$$\begin{aligned} \|f - s_n\|^2 &= (f - s_n, f - s_n) \\ &= (f, f) - (f, s_n) - (s_n, f) + (s_n, s_n) \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \end{aligned}$$

□

Satz 1.38 (Besselsche Umgebung). Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Funktion mit Fourier-Koeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2\pi}$$

Beweis. Aus Satz 1.37

$$2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \|f\|^2 - \underbrace{\|f - s_n\|^2}_{\geq 0} \leq \|f\|^2$$

Die Konvergenz folgt unter Beachtung der Monotonie und Beschränktheit der Folge

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

□

Bemerkung 1.39. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ 2π -periodisch und $\|f - s_n\|^2 \xrightarrow{L^2} 0$, $n \rightarrow \infty$, d.h. die Fourier-Reihe konvergiert gegen f in L^2 . Das ist nach Satz 1.37 äquivalent zu

$$\|f\|^2 = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \Leftrightarrow \|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Frage: Unter welchen Bedingungen für f gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

mit den Fourier-Koeffizienten c_k .

Ziel: Zeige die Parsevalsche Gleichung für die Fourier-Koeffizienten c_k , $\{e_k = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$, $f \in R[a, b] \Rightarrow$ Konvergenz der Fourier-Reihe in L^2 .

Lemma 1.40. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)} - \frac{1}{2}$$

Beweis. $\cos(kt) = \frac{1}{2} (e^{ikt} + e^{-ikt})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2} e^{-int} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}}_{\text{geometrische Summenformel}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-int} \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-int} - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}} \\ &\stackrel{\text{Erweitern}}{=} \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \end{aligned}$$

□

Lemma 1.41. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es gilt für $x \in [a, b]$ und $s \in \mathbb{R}$

$$F_s(x) := \int_a^x f(y) \sin(sy) \, dy$$

konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $|s| \rightarrow \infty$ und $x \in [a, b]$.

Beweis. Sei $s \neq 0$.

$$F_s(x) = \int_a^x f(y) \sin(sy) \, dy \stackrel{\text{part. Integr.}}{=} -f(y) \frac{1}{s} \cos(sy) \Big|_a^x + \int_a^x \frac{1}{s} \cos(sy) f'(y) \, dy.$$

f, f' stetig auf $[a, b] \implies \exists M > 0$, s.d. $|f(y)| \leq M, |f'(y)| \leq M$ mit $y \in [a, b]$. Dann gilt $|F_s(x)| \leq \frac{2M}{|s|} + \frac{M}{|s|} \cdot (b-a), \forall x \in [a, b]$. Also konvergiert $|F_s(x)|$ gleichmäßig gegen 0 für $|s| \rightarrow \infty$ und $x \in [a, b]$. $\square$

Lemma 1.42. Es gilt $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ für $0 < x < 2\pi$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen Intervallen $[\delta, 2\pi - \delta]$ für $\delta > 0$.

Beweis. Aus Hilfslemma 1.40 folgt für $0 < x < 2\pi$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^n \int_{\pi}^x \cos(ky) \, dy \\ &= \int_{\pi}^x \left(\sum_{k=1}^n \cos(ky) \right) \, dy \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.40}}{=} \int_{\pi}^x \left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})y\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}y\right)} - \frac{1}{2} \right) \, dy \\ &= \underbrace{\int_{\pi}^x \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})y\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}y\right)} \, dy}_{=: F_n(x)} - \frac{1}{2}(x - \pi) \end{aligned}$$

Z.Z.: $F_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. Die Funktion $f(y) = \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2})}$ ist auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ stetig differenzierbar, weil $\frac{y}{2} \neq 0$ auf $[\delta, 2\pi - \delta]$, sodass aus Hilfslemma 1.41 folgt

$$F_n(x) = \int_{\pi}^x \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2})} \cdot \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) \, dy \xrightarrow{\text{glm.}} 0$$

für $n \rightarrow \infty$ und $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$. $\square$

Lemma 1.43. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

konvergiert gleichmäßig $\forall x, 0 \leq x \leq 2\pi$. Insbesondere gilt für $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis. Lemma 1.42 $\implies \forall x, y \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{(y-\pi)^2}{4} &= \int_y^x \frac{t-\pi}{2} dt \\ &\stackrel{1.42}{=} - \int_y^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k} dt \\ &\stackrel{\text{glm. Konv. Satz 1.15}}{=} - \sum_{k=1}^{\infty} \int_y^x \frac{\sin(kt)}{k} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ky)}{k^2} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{y \text{ fest}} \frac{(x-\pi)^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \quad \forall x \in (0, 2\pi), C \text{ konst}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ mit Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Bestimme die Konstante C :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} dx &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \right) dx \\ \frac{\pi^3}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx}_{=0} + \int_0^{2\pi} C dx \\ \frac{\pi^3}{6} &= C \cdot 2\pi \\ C &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

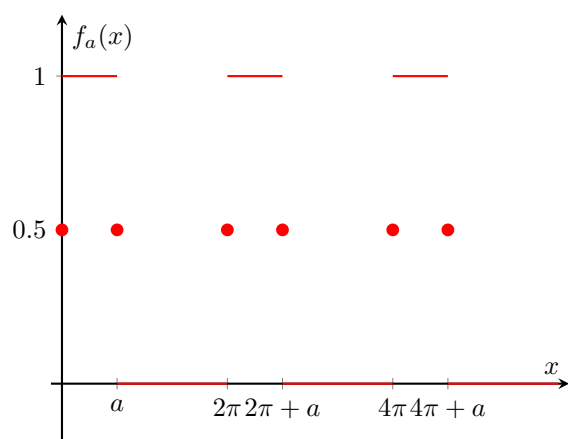
Für $x = 0$ oder $x = 2\pi$ folgt die Behauptung durch Grenzübergang, da beide Seiten stetig sind auf $[0, 2\pi]$ $\square$

Lemma 1.44. Sei f Treppenfunktion, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π periodisch. Dann $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in $L^2[0, 2\pi]$, d.h. Fourier-Reihe von f konvergiert im quadratischen Mittel gegen f .

Beweis. Zunächst Spezialfall

$$f_a(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0.5, & x \in \{0, a\} \\ 0, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Es gilt $\|f_a\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f_a|^2 \, dx = \int_0^a 1 \, dx = a$.



Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a}{2\pi} \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_a(x) e^{-ikx} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{ik} \right) e^{-ikx} \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{i}{ik} \right) (e^{-ika} - 1) \\ &\stackrel{k \neq 0}{=} \frac{i}{2\pi k} (e^{-ika} - 1) \end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
|c_k|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 k^2} \underbrace{(e^{-ika} - 1)(e^{ika} - 1)}_{=1 - e^{ika} - e^{-ika} + 1} \\
&= \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left(1 - \frac{e^{ika} + e^{-ika}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos(ka)) \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \underbrace{\frac{a^2}{4\pi^2}}_{a_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_{-k}|^2 + |c_k|^2) \\
&\stackrel{\cos(-ka)=\cos(ka)}{=} \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos(ka)) \\
&= \frac{a}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}} - \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \cos(ka)}_{=\frac{(a-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{(a-\pi)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{a}{2\pi} \\
\implies 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= a = \|f_a\|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Satz 1.37}}{\implies} \|f_a - s_n(f_a)\|_{L^2}^2 = \|f_a\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine beliebige 2π -periodische Treppenfunktion mit Sprungstellen

$$a_j \in (0, 2\pi) \quad j = 1, \dots, l$$

Jede Treppenfunktion f lässt sich schreiben als

$$f(x) = \sum_{j=1}^l d_j \underbrace{f_{a_j}(x)}_{\text{Spezialfunktion (als } f_a(x))}, x \in [0, 2\pi]$$

f_{a_j} Spezielle Treppenfunktion mit Sprungstelle $a = a_j$ und $f_{a_j}(x) \in \{0, 1\} \quad \forall j, x \neq a_j$. Dann

$\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\| \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$. Betrachte

$$s_n(f) = \sum_{j=1}^l d_j s_n(f_{a_j})$$

und

$$\|f - s_n(f)\| = \left\| \sum_{j=1}^l d_j (f_{a_j} - s_n(f_{a_j})) \right\| \leq \sum_{j=1}^l |d_j| \underbrace{\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\|}_{\xrightarrow{L^2} 0} \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$$

□

Satz 1.45. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Funktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f und es gilt die Parsevalsche Gleichung (sog. Vollständigkeitsrelation)

$$\frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}_{=\|f\|^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Beweis. O.B.d.A. sei f reellwertig (sonst werden Real- und Imaginärteil getrennt behandelt) und $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 2\pi]$ (sonst betrachte $\bar{f}(x) := \frac{f(x)}{M}$, $M = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu ε 2π -periodische Treppenfunktionen $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

$$-1 \leq \varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \leq 1$$

und

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{16\pi} \varepsilon^2$$

Konstruktion von $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ siehe Rannacher. Dann,

$$|f - \varphi_\varepsilon|^2 \leq |\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon|^2 \leq (|\psi_\varepsilon| + |\varphi_\varepsilon|)(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \underset{\substack{|\psi_\varepsilon| < 1 \\ |\varphi_\varepsilon| < 1}}{\leq} 2(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)$$

und

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|^2 = \int_0^{2\pi} |f - \varphi_\varepsilon|^2 dx \leq 2 \int_0^{2\pi} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx \leq 2 \frac{\varepsilon^2}{16\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Weiter gilt: φ_ε Treppenfunktion $\xrightarrow{1.44}$ Fourier-Reihe von φ_ε konvergiert gegen φ_ε in L^2 , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \|s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Aus Satz 1.38 folgt

$$\|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\|^2 \leq \|f - \varphi_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\| &= \|f - s_n(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon\| \\ &\leq \|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\| + \|\varphi_\varepsilon - s_n(\varphi_\varepsilon)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\implies s_n(f) \xrightarrow{L^2} f, n \rightarrow \infty$$

□

Bemerkung 1.46. Konvergenz in L^2 ist „sehr schwach“. Für „glattere“ Funktionen konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig.

Satz 1.47. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar, d.h. $\exists$ Unterteilung von $[0, 2\pi]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 2\pi$$

mit $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar für $j = 1, \dots, m$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f .

Beweis. f stetig $\implies f \in R[0, 2\pi] \implies$ Fourier-Reihe von f konvergiert gegen f in L^2 , d.h. $\|s_n(f) - f\| \xrightarrow{L^2} 0$, $n \rightarrow \infty$. Betrachte $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi(x) = \phi_j(x)$, $x \in (t_{j-1}, t_j)$, $\phi_j : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Ableitung von $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$. Definiere ϕ in t_j entsprechend (möglich, da ϕ eine stückweise stetige Funktion ist). Definition von $R[0, 2\pi] \implies \phi \in R[0, 2\pi] \implies$ Für die Fourier-Koeffizienten von ϕ gilt: $\gamma_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\phi\|^2 < \infty$. Berechne Fourier-Koeffizienten c_k von f

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ &\stackrel{\text{part. Integr.}}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi} f(x) \frac{i}{k} e^{-ikx} \Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f'(x)}_{\phi(x)} \frac{i}{k} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-i}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-i}{k} \gamma_k \\ &\implies |c_k| = \frac{1}{k} |\gamma_k| \end{aligned}$$

Es gilt $|\alpha \cdot \beta| \leq \frac{1}{2} |\alpha|^2 + \frac{1}{2} |\beta|^2$, da Quadrate größer 0 sind

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + \frac{|\gamma_k|^2}{2} \\ &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty \\ &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \text{ absolut konvergent} \\ &\implies \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}}_{\text{Fourier-Reihe von } f} \end{aligned}$$

konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion g , die stetig ist. Also $s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} g$, $n \rightarrow \infty$, $\implies s_n(f) \xrightarrow{L^2} g$, $n \rightarrow \infty$. Andererseits $s_n(f) \xrightarrow{L^2} f$, $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\implies \|f - g\|_{L^2} = 0 \\ &\implies f \equiv g, \text{ weil } f \text{ und } g \text{ stetig sind} \\ &\implies s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} f, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$



Kapitel 2

Der n -dimensionale Zahlenraum K^n

2.1 Der euklidische Raum K^n

Bemerkung 2.1. K^n bezeichnet den Vektorraum der n -Tupel $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ mit Addition $x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ und skalarer Multiplikation $\alpha \cdot x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Definition 2.2. Sei X irgendeine Menge.

Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften:

M1 (Definitheit) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2 (Symmetrie) $\forall x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

M3 (Dreiecksungleichung) $\forall x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ein metrischer Raum (X, d) besteht aus einer Menge X mit einer Metrik d . Man nennt $d(x, y)$ auch den Abstand oder die Distanz von x und y .

Beispiel 2.3. (1) $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $d(x, y) := |x - y|$ ist ein metrischer Raum, denn:

M1 folgt aus $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|x| \geq 0$,

M2 folgt aus $|x - y| = |-(y - x)| = |y - x|$,

M3 folgt aus $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

(2) (induzierte Metrik) Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subseteq X$. Die induzierte Metrik d_A auf A ist definiert durch $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $d_A(x, y) := d(x, y)$, $\forall x, y \in A$. Dann wird (A, d_A) zu einem metrischen Raum.

(3) (triviale Metrik) Sei X eine Menge. Die Triviale Metrik wird definiert durch:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = y \\ 1, & \text{für } x \neq y \end{cases}.$$

(4) Weiteres wichtiges Beispiel: metrische Räume entstehen aus normierten Vektorräumen.

Definition 2.4. (normierter Raum) Sei V irgendein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm (auf V), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

N1 (Definitheit) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

N2 (Homogenität) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

N3 (Dreiecksungleichung) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Bemerkung 2.5. (Norm $\leadsto$ Metrik) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d(x, y) := \|x - y\|$, $\forall x, y \in V$ eine Metrik auf V .

Beispiel 2.6. Normen in $\mathbb{R}^n$.

(1) Euklidische Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(2) Maximumsnorm oder ℓ^∞ -Norm: $\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

(3) ℓ^1 -Norm: $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$.

(4) ℓ^p -Norm: $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$.

Definition 2.7. Eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, $x^{(k)} \in \mathbb{K}^n$, heißt

i) beschränkt, falls $\forall k \in \mathbb{N} : x^{(k)} \in K_R(0)$, $K_R(0)$ eine Kugelumgebung von 0 mit Radius R .

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x - a\|_\infty < r\}.$$

ii) Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass $\forall k, l \geq N_\varepsilon$ gilt: $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon$.

iii) konvergent gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$, wenn $\|x^{(k)} - x\|_\infty \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.
geometrisch: jede Kugelumgebung $K_\varepsilon(x)$ enthält fast alle Folgeelemente $x^{(k)}$ (d.h. alle bis auf endlich viele).

Bemerkung 2.8. Offenbar:

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x\|_\infty &\rightarrow 0, k \rightarrow \infty && \Leftrightarrow \\ |x_i^{(k)} - x_i| &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Das heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$ (komponentenweise Konvergenz in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Satz 2.9 (Satz von Cauchy und Satz von Bolzano-Weierstraß). 1) Jede Cauchy-Folge in K^n konvergiert, d.h. der normierte Raum $(K^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig. Ein vollständiger normierter Raum wird Banach-Raum genannt.

2) Jede beschränkte Folge in K^n besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall k, l \geq N_\varepsilon$ gilt $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon$. Betrachte Komponentenfolge $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, i = 1, \dots, n$. Die Komponentenfolgen sind Cauchy-Folgen, weil

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon, \forall k, l \geq N_\varepsilon, \forall i = 1, \dots, n.$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} =: x_i \implies x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ in } \ell_\infty \text{ Norm.}$$

2) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\implies (x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, \forall i = 1, \dots, n$ auch beschränkt
 $\xrightarrow{\text{Bo.-We. in } \mathbb{K}} \implies$ es existiert eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(k_{1,j})})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_1^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_1^{(k_{1,j})} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_1$,
nach n Schritten haben wir Teilfolgen $(x_n^{(k_{n,j})})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ für die alle Komponentenfolgen konvergieren $(x_i^{(k_{i,j})})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_i, \forall i = 1, \dots, n$. Daraus folgt $(x^{(k_{n,j})})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$.

□

Satz 2.10 (Äquivalenz von Normen). Sei $\mathbb{K}^n$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann sind alle Normen äquivalent zur Maximumsnorm (ℓ_∞) , d.h. zu jeder Norm $\|\cdot\|, \exists m, M > 0$ sodass

$$m \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm. $\forall x \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{k=1}^n x_k e^{(k)}$, wobei $e^{(k)}, k = 1, \dots, n$ die sogenannte euklidische Basis ist: $e^{(k)} = \begin{pmatrix} \delta_{k,1} \\ \vdots \\ \delta_{k,n} \end{pmatrix}$.

Dann:

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|e^{(k)}\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \max_{i=1 \dots n} |x_i| \cdot \|e^{(k)}\| \leq M \cdot \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Wobei $M := \sum_{k=1}^n \|e^{(k)}\|$.

Setze

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}, \quad m := \inf\{\|x\| \mid x \in S_1\} \geq 0.$$

Es gzz.: $m > 0$. Annahme $m = 0$. Dann existiert eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, x^{(k)} \in S_1$, sodass $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Aus $x^{(k)} \in S_1$ folgt $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt in der ℓ_∞ -Norm. Dann impliziert der

Satz von Bolzano-Weierstraß: es existiert eine konvergente Teilfolge, o.B.d.A. $(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ in der ℓ_∞ -Norm, dann:

$$\left| \underbrace{\|x^{(k)}\|_\infty}_{=1} - \|x\|_\infty \right| \leq \underbrace{\|x^{(k)} - x\|_\infty}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \implies |1 - \|x\|_\infty| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \implies \|x\|_\infty = 1 \implies x \in S_1.$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)}\| \leq M \cdot \|x - x^{(k)}\|_\infty + \|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ \implies \|x\| &= 0 \implies x = 0. \end{aligned}$$

Widerspruch zu $x \in S_1$, also $m > 0$. Dann für $x \neq 0$ ist Vektor $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_1$ und $m \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty}$ (nach Definition von m) und $0 < m \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|$, $x \in \mathbb{K}^n$. $\square$

Korollar 2.11. Auf K^n sind alle Konvergenzen in irgendeiner Norm äquivalent zur Konvergenz in der ℓ_∞ -Norm. (= komponentenweiser Konvergenz)

Bemerkung 2.12. Obiger Satz gilt nicht für unendlich dimensionale Räume (wie z.B. $C[a, b]$ oder $R[a, b]$). Die endliche Dimension von K^n ist entscheidend.

2.2 Teilmengen in K^n (Topologische Grundbegriffe)

Bezeichnung: $\|\cdot\|$ irgendeine Norm.

Definition 2.13 (ε -Kugel, ε -Umgebung). Sei $a \in \mathbb{K}^n, r > 0$.

- (1) Dann heißt $K_r(a) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|a - x\| < r\}$ die offene Kugel um a mit Radius r bzgl. $\|\cdot\|$.
- (2) $U \subset K^n$ heißt Umgebung von $a \in \mathbb{K}^n$, falls $\exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(a) \subseteq U$. Insbesondere ist $K_\varepsilon(a)$ selbst eine Umgebung von a , eine sogenannte ε -Umgebung von a .

Definition 2.14 (offene Menge). Eine Menge $O \in \mathbb{K}^n$ heißt offen, falls O eine Umgebung jedes Punktes aus O ($x \in O$) ist, das heißt $\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq O$.

Beispiel 2.15. (1) $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ ist offen ($a < b, a, b \in \mathbb{R}$), weil: sei $x \in]a, b[$, definiere $\varepsilon := \min\{|a - x|, |b - x|\}$, $\varepsilon > 0$, da $a < x < b$ ist $K_\varepsilon(x) \subseteq]a, b[$

(2) $\emptyset$ leere Menge ist immer offen, $\mathbb{K}^n$ ist immer offen

(3) Die Kugel $K_r(a)$ ist immer offen: sei $x \in K_r(a)$, setze $\varepsilon := r - \|x - a\|$, dann $K_\varepsilon(x) \subseteq K_r(a)$, weil: sei $y \in K_\varepsilon(x)$. Dann gilt

$$\|y - a\| \leq \underbrace{\|y - x\|}_{< \varepsilon = r - \|x - a\|} + \|x - a\| < r - \|x - a\| + \|x - a\| = r.$$

Satz 2.16 (Eigenschaften offener Mengen). Es gilt:

- (1) Sind U und $V (\subseteq \mathbb{K}^n)$ offen, dann ist $U \cap V$ offen.
- (2) Sei $U_i \subset \mathbb{K}^n, i \in I$ eine Familie offener Teilmengen. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Beweis. (1) Sei $x \in U \cap V$. Dann $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $K_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U, K_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$. Damit gilt für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $K_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$. (Beachte: $\emptyset$ ist immer offen.)

(2) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, dann $\exists j \in I$ mit $x \in U_j$.

U_j offen $\implies \exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq U_j \implies K_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

□

Korollar 2.17. 1) Endliche Schnitte und beliebige Vereinigung von offenen Mengen sind wieder offen.

2) (Beobachtung) Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen braucht nicht offen zu sein. Z.B.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right[= [0, 1]$$

ist nicht offen, da $K_\varepsilon(0) \not\subseteq [0, 1], \forall \varepsilon > 0$.

Definition 2.18 (Abgeschlossene Menge). Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{K}^n$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $A^c := \mathbb{K}^n \setminus A$ offen ist.

Beispiel 2.19. (1) Für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ ist $[a, b]$ abgeschlossen, denn $] -\infty, a[\cup]b, \infty[= \mathbb{R} \setminus [a, b]$ ist offen, denn:

$$]-\infty, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a - n, a[\text{ ist offen} \qquad]b, \infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]b, b + n[\text{ ist offen.}$$

Satz 2.20 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen). (1) Sind $V, U (V, U \subset \mathbb{K}^n)$ abgeschlossen, dann ist $U \cup V \subset \mathbb{K}^n$ auch abgeschlossen.

(2) Sind $U_i, (i \in I)$ abgeschlossene Mengen in $\mathbb{K}^n$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ auch abgeschlossen.

Beweis. (1) $(U \cup V)^c = \underbrace{U^c}_{\text{offen}} \cap \underbrace{V^c}_{\text{offen}}$ offen.

(2) $\left(\bigcap_{i \in I} U_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i^c}_{\text{offen}}$ offen.

□

Beispiel 2.21. (1) Beliebige Vereinigung abgeschlossener Mengen muss nicht abgeschlossen

sein. Z.B. $]0, 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]}_{\text{abgeschlossen}}$ ist offen.

(2) $\emptyset$ und K^n sind abgeschlossen.

(3) $A_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $A_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ abgeschlossen, dann ist auch $A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ abgeschlossen.

(4) Für $a < b \in \mathbb{R}$ ist $[a, b[$ weder offen noch abgeschlossen.

Satz 2.22 (Charakterisierung abgeschlossener Mengen). Sei $A \subset \mathbb{K}^n$. Dann gilt

A abgeschlossen $\iff$ Ist $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in A mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$, dann $a \in A$.

Beweis. • „ $\implies$ “: Sei A abgeschlossen und $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in A mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x.$$

Ang.: $x \notin A$, d.h. $x \in A^C$. Da A^C offen, folgt, es ex. ein $\epsilon > 0$, s.d. $K_\epsilon(x) \subset A^C$. Mit $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ folgt, dass fast alle Folgeelemente $x^{(k)}$ in $K_\epsilon(x) \subset A^C$ liegen.

Widerspruch zu: $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$. Damit folgt $x \in A$.

• „ $\impliedby$ “: Sei $A \subset \mathbb{K}^n$ s.d. alle konvergenten Folgen in A einen Grenzwert in A haben.

Zu zeigen: A^C offen. Sei $x \in A^C$ beliebig. Dann g.z.z.: $\exists \epsilon > 0$ s.d. $K_\epsilon(x) \subset A^C$.

Ang.: A^C nicht offen. Dann ex. $\forall k \in \mathbb{N}$ ein Punkt $x^{(k)}$ mit $x^{(k)} \in A \cap K_{\frac{1}{k}}(x)$. Dann ist $x^{(k)} \in A \forall k \in \mathbb{N}$ und $\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{k}$. Damit folgt

$$x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \xrightarrow{\text{Vorr.}} x \in A \quad \not\Rightarrow \implies A^C \text{ offen} \implies A \text{ abgeschlossen.}$$

□

Definition 2.23 (Randpunkt). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Ein Punkt $a \in \mathbb{K}^n$ heißt Randpunkt von M , falls in jeder Umgebung von a sowohl ein Punkt von M , als auch ein Punkt von $M^C = \mathbb{K}^n \setminus M$ liegt.

Die Menge aller Randpunkte von M heißt der Rand von M , bezeichnet mit ∂M .

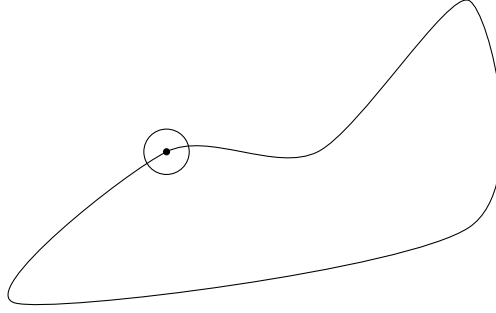
Beispiel 2.24. (1) Für $I \in \{[a, b[, [a, b],]a, b[,]a, b]\}$ gilt $\partial I = \{a, b\}$.

$$\partial[a, \infty[= \{a\}$$

$$\partial]a, \infty[= \{a\}$$

(2) Für $K_1(0)$ gilt

$$\begin{aligned} \partial K_1(0) &= \partial\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \\ &\text{„Einheitssphäre“}. \end{aligned}$$

Abbildung 2.1: Randpunkt einer Menge $M \subset \mathbb{K}^n$

- (3) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, weil in jeder Umgebung eines Punktes in $\mathbb{Q}$, gibt es rationale und irrationale Zahlen. Der Rand von $\mathbb{R}$ ist leer.

Definition 2.25 (Inneres, Abschluss). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$

- Die Menge $M^\circ := M \setminus \partial M$ heißt das Innere von M .
- Die Menge $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt der Abschluss von M .

Satz 2.26 (Inneres ist Offen, Abschluss ist abgeschlossen). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$.

- (i) Die Menge $M^\circ = M \setminus \partial M$ ist offen. M° ist die größte offene Menge in M .
- (ii) Die Menge $\overline{M} = M \cup \partial M$ ist abgeschlossen. $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst.
- (iii) Der Rand ∂M ist abgeschlossen.

Beweis. (i) Z.z.: $M \setminus \partial M$ offen.

Sei $x \in M \setminus \partial M$ beliebig, dann ex. $\epsilon > 0$, s.d. $K_\epsilon(x) \subset M$ ($\implies K_\epsilon(x) \cap M^C = \emptyset$), sonst wäre $x \in \partial M$.

Für dieses ϵ gilt auch $K_\epsilon(x) \cap \partial M = \emptyset$, denn falls $z \in K_\epsilon(x) \cap \partial M$ existiert, dann ist $K_\epsilon(x)$ Umgebung von z und folglich $K_\epsilon(x) \cap M^C \neq \emptyset$.

Damit folgt:

$$K_\epsilon(x) \subset M \setminus \partial M \implies M \setminus \partial M \text{ offen.}$$

Sei $U \subset M$ offen, dann ist analog $U \cap \partial M = \emptyset$. Damit gilt $U \subset M \setminus \partial M$. Da U beliebig, folgt damit $M \setminus \partial M =: M^\circ$ ist größte offene Teilmenge von M .

- (ii) Z.z.: $M \cup \partial M$ abgeschlossen.

Betrachte $M^C = \mathbb{K}^n \setminus M$. Nach Definition des Rands gilt $\partial M^C = \partial M$. Damit folgt mit (i), dass $M^C \setminus \underbrace{\partial M}_{=\partial M^C}$ offen ist. Dann

$$(M^C \setminus \partial M)^C = \mathbb{K}^n \setminus (M^C \setminus \partial M) = \underbrace{(\mathbb{K}^n \setminus M^C)}_{=M} \cup \partial M = M \cup \partial M.$$

D.h. $M \cup \partial M$ ist abgeschlossen.

Sei $V \in K^n$ abgeschlossen mit $M \subset V$. Dann gilt V^C ist offen und $V^C \subset M^C$. Damit folgt mit (i):

$$\underbrace{V^C}_{\text{offen}} \subset M^C \setminus \underbrace{\partial M^C}_{=\partial M} = M^C \setminus \partial M \implies \mathbb{K}^n \setminus (M^C \setminus \partial M) = (M \cup \partial M) \subset V.$$

Da V beliebig, folgt damit $M \cup \partial M$ ist kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst.

(iii) Mit $\partial M = (M \cup \partial M) \setminus (M \setminus \partial M)$ folgt

$$\mathbb{K}^n \setminus \partial M = \underbrace{(\mathbb{K}^n \setminus (M \cup \partial M))}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(M \setminus \partial M)}_{\text{offen}}.$$

Damit ist $\mathbb{K}^n \setminus \partial M$ offen, also ∂M abgeschlossen.

□

Definition 2.27 (Kompaktheit). Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ heißt kompakt (bzw. folgenkompakt), wenn jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

Beispiel 2.28. (i) Sei

$$\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n, x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x.$$

Dann ist $A := \{x^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup x$ kompakt.

(ii) $]0, 1[$ ist nicht kompakt, denn $\left(\frac{1}{2k}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset]0, 1[, \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Auch: $\left(1 - \frac{2}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset]0, 1[, 1 - \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$

Definition 2.29 (Überdeckung). Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Teilmengen $U_i \subset \mathbb{K}^n$ heißt Überdeckung von M , falls gilt

$$M \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Eine Überdeckung heißt offen bzw. abgeschlossen, wenn alle U_i offen bzw. abgeschlossen sind.

Satz 2.30 (Charakterisierung von Kompaktheit). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) M ist folgenkompakt
- (ii) M ist beschränkt und abgeschlossen
- (iii) Jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M enthält eine endliche Überdeckung von M , d.h. es existieren endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$, s.d. $M \subset (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k})$ (sogenannte Überdeckungseigenschaft von Heine und Borel).

Beweis. • (i) $\implies$ (ii): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ folgenkompakt. Dann existieren für alle konvergenten Folgen $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M . Damit liegt auch der Grenzwert von $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ in M . Also ist M abgeschlossen.

Ang.: M ist nicht beschränkt. Dann ex. eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Damit hat $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. Widerspruch zur Kompaktheit von M . Also ist M beschränkt.

- (ii) $\implies$ (i): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Dann folgt mit 2.9, dass alle Folgen $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ beschränkt sind und eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$ besitzen. Da M abgeschlossen ist, folgt $x \in M$.

Also ist M folgenkompakt.

- (iii) $\implies$ (i): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ und M besitze die Überdeckungseigenschaft. Sei weiter $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ beliebig.

Z.z.: Es ex. eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x \in M$.

Ang.: Solche Teilfolge existiert nicht. Dann gilt: $\forall x \in M$ existiert eine offene Umgebung U_x von x , die nur endlich viele Folgelemente von $(x^{(k)})$ enthält (wären in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgelemente, dann existiert eine konvergente Teilfolge).

Damit ist $M = \bigcup_{x \in M} U_x$ eine offene Überdeckung, d.h. es existiert nach Vorr. eine endliche Überdeckung von M , d.h. eine endliche Menge I mit

$$\{x_i \mid x_i \in M, i \in I\} =: M_i \text{ s.d. } M \subset \bigcup_{x_i \in M_i} U_{x_i}.$$

Da $\forall i \in I$ U_{x_i} nur endlich viele Folgelemente enthält, enthält M endlich viele Folgelemente von $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, d.h. $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \not\subset M \nabla$.

Also existiert eine Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in M$

- (ii) $\implies$ (iii): Sei M beschränkt und abgeschlossen und sei $\{U_i, i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M .

Zu zeigen: Es existiert eine endliche Überdeckung von M .

Ang.: Eine solche Überdeckung existiert nicht. Konstruiere induktiv eine Folge von beschränkten, abgeschlossenen Würfeln in $\mathbb{K}^n$:

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

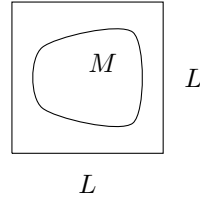
mit

- (1) $M \cap Q_i$ wird nicht durch endlich viele U_{i_k} überdeckt.
- (2) Kantenlänge von $Q_m = 2^{-m}$ Kantenlänge von Q_0 .

Sei Q beschränkter abgeschlossener Würfel in $\mathbb{K}^n$ mit Kantenlänge L , s.d. $M \subset Q$. Setze $Q_0 = Q$, Kantenlänge von $Q_0 = L$. Sei Q_m bereits konstruiert. Sei

$$Q_m = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n.$$

Länge $(I_k) = \text{Kantenlänge}(Q_m) \forall k = 2^{-m}L$

Abbildung 2.2: Abgeschlossener Würfel $Q \subset K^n$ mit Kantenlänge L und $M \subset Q$

Wir zerlegen jedes I_i in 2 abgeschlossene Intervalle mit halber Länge $I_i^{(1)}$ und $I_i^{(2)}$ und setzen für $(s_1, \dots, s_n) \in \{1, 2\}^n$

$$Q_m^{s_1, \dots, s_n} := I_1^{(s_1)} \times \dots \times I_n^{(s_n)}.$$

Wir erhalten 2^n Würfel mit

$$Q_m := \bigcup_{(s_1, \dots, s_n) \in \{1, 2\}^n} Q_m^{(s_1, \dots, s_n)}.$$

Da $M \cap Q_m$ nicht von endlich vielen U_{i_k} überdeckt wird, gilt dies auch für einen Würfel

$$Q_{m+1} := Q_m^{(s_1, \dots, s_n)}.$$

Es gilt für die Kantenlänge $(Q_{m+1}) = \frac{1}{2}$ Kantenlänge $(Q_m) = 2^{-(m+1)}L$.

Für $k \in \mathbb{N}$ wähle $x^{(k)} \in Q_k \cap M$. Damit ist $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$, da nach Konstruktion von $Q_1, Q_2, \dots$

$$\|x^{(l)} - x^{(k)}\| \leq 2^{-n_0}L, \quad \forall l, k \geq n_0.$$

Damit folgt $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in M$ und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, weil $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Also existiert ein i_k , s.d. $x \in U_{i_k}$ liegt. Damit liegen fast alle Q_m in U_{i_k} . Das heißt fast alle $M \cap Q_m$ liegen in U_{i_k} . Widerspruch zur Annahme, dass eine endliche Überdeckung nicht existiert.

Also existiert eine endliche Überdeckung von M .

□

Bemerkung 2.31. Wichtige Voraussetzung für die Überdeckungseigenschaft von Heine und Borel ist, dass $\mathbb{K}^n$ endlich-dimensional ist.

In unendlich dimensionalen Banach-Räumen wie z.B.: $C[a, b]$ ist dies nicht möglich.

Korollar 2.32. Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge in $\mathbb{K}^n$ ist ebenfalls kompakt.

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ kompakt und $A \subset M$ abgeschlossen. Wegen 2.30 ist M beschränkt. Damit ist auch $A \subset M$ beschränkt und somit nach 2.30 kompakt. □