

0.1 Geometrie in K^n

Definition 0.1 (Skalarprodukt). Sei V irgendein Raum über dem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

S1 (Definitheit) $(x, x) \in \mathbb{R}$ und $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \iff x = 0$

S2 (Symmetrie) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

S3 (Linearität im ersten Argument) $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Bemerkung 0.2. (1) Falls nur $(x, x) \in \mathbb{R}, (x, x) \geq 0$ gilt (es ist möglich, dass $(x, x) = 0$ und $x \neq 0$), dann ist $(\cdot, \cdot)$ ein „semi-skalarprodukt“.

(2) Aus S2 und S3 folgt die Linearität im zweiten Argument und damit sog. Bilinearität des Skalarprodukts als eine Sesquilinearform in $\mathbb{C}$ bzw. eine Bilinearform in $\mathbb{R}$

(3) S3 $\implies \begin{cases} \text{Additivität} & (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \\ \text{Homogenität} & (\alpha x, y) = \alpha(x, y), \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$

Lemma 0.3 (Schwarz-Ungleichung). Für ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf V über $\mathbb{K}$ gilt die Schwarz-Ungleichung

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y), \quad x, y \in V$$

Beweis. $y = 0 \implies$ trivial. Sei $y \neq 0$, und sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig.

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) \stackrel{S1}{=} (x, x) + \alpha(y, x) + \overline{\alpha}(x, y) + \alpha\overline{\alpha}(y, y)$$

Setze $\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x, x) - \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)} - \frac{\overline{(x, y)}(x, y)}{(y, y)} + \frac{(x, y)}{(y, y)} \cdot \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)} \cdot (y, y) \\ &= (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \\ &\implies 0 \leq (x, x) \cdot (y, y) - |(x, y)|^2 \end{aligned}$$

□

Korollar 0.4. a) Ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf V über $\mathbb{K}$ erzeugt eine Norm durch $\|x\| := \sqrt{(x, x)}, x \in V$. Falls ein normierter Raum $(V, (\cdot, \cdot))$ vollständig ist, so heißt das Paar $(V, (\cdot, \cdot))$ Hilbert-Raum.

b) Das euklidische Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_2$ auf $\mathbb{K}^n$

$$(x, y)_2 := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

erzeugt die euklidische Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{(x, x)_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

$(\mathbb{K}^n, (\cdot, \cdot)_2)$ ist ein Hilbert-Raum.

Beweis. Normeigenschaften Definitheit und Homogenität folgen aus S1-S3. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Schwarz-Ungleichung.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \implies \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

□

Wichtige Ungleichungen

Lemma 0.5 (Ungleichung von Young). Seien $p, q \in \mathbb{R}, p > 1, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$|x \cdot y| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Beweis. Übung

□

Lemma 0.6 (Ungleichung von Hölder). Seien $p, q \in \mathbb{R}, p > 1, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\underbrace{|(x, y)_2|}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}} \leq \underbrace{\|x\|_p}_{\ell_p\text{-Norm von } x} \cdot \underbrace{\|y\|_q}_{\ell_q\text{-Norm von } y}$$

Beweis. Falls $x = 0$ oder $y = 0 \implies$ klar. Sei $\|x\|_p \neq 0, \|y\|_q \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{|(x, y)_2|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \left| \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i \overline{y_i}|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \\ &\stackrel{\text{Young-Ungl.}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|^p}{p \cdot \|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \cdot \|x\|_q^q} \right) \\ &= \frac{1}{p \cdot \|x\|_p^p} \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}_{=\|x\|_p^p} + \frac{1}{q \cdot \|y\|_q^q} \underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}_{=\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \implies |(x, y)_2| &\leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \end{aligned}$$

□

Lemma 0.7 (Ungleichung von Minkowski). Sei $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$ oder $p = \infty$. Dann gilt

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\leadsto$ Dreiecksungleichung für die ℓ_p -Norm.

Beweis. Für $p = 1$

$$\|x + y\|_1 \stackrel{\text{Def. } \ell_1}{=} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \stackrel{\Delta\text{-UG}}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \stackrel{\text{Def. } \ell_1}{=} \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Für $p = \infty$

$$\|x + y\|_\infty \stackrel{\text{Def. } \ell_\infty}{=} \max_{i=1, \dots, n} |x_i + y_i| \stackrel{\Delta\text{-UG}}{\leq} \max_{i=1, \dots, n} |x_i| + \max_{i=1, \dots, n} |y_i| \stackrel{\text{Def. } \ell_\infty}{=} \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Sei $1 < p < \infty$. Definiere $q := \frac{p}{p-1}$ ($\implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$) und setze $\xi_i = |x_i + y_i|^{p-1}$, $i = 1, \dots, n$ und $\xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\|\xi\|_q^q = \sum_{i=1}^n |\xi_i|^q = \sum_{i=1}^n \underbrace{(|x_i + y_i|^{p-1})^{q=p-1}}_{\xi_i} = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \|x + y\|_p^p$$

Dann

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i + y_i|^p}_{= \underbrace{|x_i + y_i|^{p-1}}_{\xi_i} \cdot |x_i + y_i|} \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot \xi_i \\ &\leq \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \xi_i}_{|(x, \xi)_2|} + \underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i| \cdot \xi_i}_{|(y, \xi)_2|} \\ &\stackrel{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq} \|x\|_p \cdot \|\xi\|_q + \|y\|_p \cdot \|\xi\|_q \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_q) \cdot \|\xi\|_q \\ &\stackrel{\text{Def. } \xi}{=} (\|x\|_p + \|y\|_q) \cdot \|x + y\|_p^{\frac{p}{p-1}} \\ &\stackrel{\text{Def. } q}{=} (\|x\|_p + \|y\|_q) \cdot \|x + y\|_p^{p-1} \\ \implies \|x + y\|_p &\leq \|x\|_p + \|y\|_p \end{aligned}$$

□

Definition 0.8 (Orthogonalität). $x, y \in \mathbb{K}^n$ heißen orthogonal ($x \perp y$), falls $(x, y)_2 = 0$.

Definition 0.9 (Orthogonalsystem/Orthogonalbasis). Ein Satz von Vektoren $\{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}$, $a^{(i)} \neq 0$, $a^{(i)} \in \mathbb{K}^n$, $i = 1, \dots, m$ und $\underbrace{(a^{(k)}, a^{(l)})_2 = 0}_{\text{paarweise orthogonal}}$ für $k \neq l$ heißt

Orthogonalsystem bzw. falls $m = n$ Orthogonalbasis.

Falls $(a^{(k)}, a^{(k)})_2 = 1$, dann heißen die Vektoren $\{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}$ ein Orthonormalsystem bzw. Orthonormalbasis.

Bemerkung 0.10. Die orthogonalen Vektoren (wie in Def.) sind linear unabhängig:

$$\text{Sei } \sum_{k=1}^m c_k a^{(k)} = 0 \iff \sum_{k=1}^m c_k \underbrace{(a^{(k)}, a^{(l)})_2}_{\substack{\text{paarweise} \\ \text{orthog.}}} = 0 \iff c_l \underbrace{(a^{(l)}, a^{(l)})_2}_{\substack{\neq 0 \\ \text{für } a^{(l)} \neq 0}} = 0 \iff c_l = 0, \quad l = 1, \dots, m$$

Beispiel 0.11. $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ ist eine Orthogonalbasis in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 0.12. Sei $\{a^{(k)}, k = 1, \dots, n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$. Dann gibt es $\forall x \in \mathbb{K}^n$ eine Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^n (x, a^{(k)})_2 \cdot a^{(k)}, \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

$$\left(\begin{array}{l} \sim \text{Fourierentwicklung} \\ a^{(k)} \sim e^{ixk} \\ x \sim f(x) \\ c_k \sim (f, e^{ixk})_{L^2} \end{array} \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{ixk} \right)$$

und es gilt die Vollständigkeitsrelation (Gleichung von Parseval)

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |(x, a^{(k)})_2|^2$$

$$(\sim \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \cdot 2\pi)$$

Beweis. $\exists \alpha_j$, sodass $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j a^{(j)}$

$$\implies (x, a^{(k)})_2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{(a^{(j)}, a^{(k)})_2}_{\delta_{jk}} = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$\implies$ Darstellung von x

Außerdem gilt

$$\|x\|_2^2 = (x, x)_2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (x, a^{(k)})_2 \cdot \overline{(x, a^{(j)})_2} \cdot \underbrace{(a^{(k)}, a^{(j)})_2}_{\delta_{jk}} = \sum_{k=1}^n |(x, a^{(k)})_2|^2$$

$\implies$ Gleichung von Parseval

□

Bemerkung 0.13. Lemma 0.12 gilt in unendlichdimensionalen Skalarprodukträumen mit vollständigem Orthonormalsystem. Beispiel: Fourier-Reihen in $R[0, 2\pi]$, trigonometrische Funktionen e^{ikx} als vollständiges Orthonormalsystem.

Satz 0.14 (Gram-Schmidt-Verfahren). Sei $\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$. Dann ist $\{b^{(1)}, \dots, b^{(n)}\}$ konstruiert durch das Orthogonalisierungsverfahren von Gram und Schmidt eine Orthonormalbasis.

$$b^{(1)} := \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|_2}$$

$$\tilde{b}^{(k)} := a^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (a^{(k)}, b^{(j)})_2 \cdot b^{(j)}$$

$$b^{(k)} := \frac{\tilde{b}^{(k)}}{\|\tilde{b}^{(k)}\|_2}, \quad k = 2, \dots, n$$

Beweis. Rannacher

□