

Lemma 0.1 (Störungssatz). Sei $\|\cdot\|$ beliebige natürliche Matrixnorm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$. Die Störungsmatrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hat $\|B\| < 1$. Dann ist die Matrix $\mathbb{I} + B$ regulär und es gilt

$$\|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{K}^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{I} + B)x\| &= \|x + Bx\| \\ &\stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\geq} \|x\| - \|Bx\| \\ &\stackrel{\|Bx\| \leq \|B\|\|x\|}{\geq} \|x\| - \|B\| \cdot \|x\| \\ &= \underbrace{(1 - \|B\|)}_{>0} \|x\| \end{aligned}$$

Also hat die Gleichung $(\mathbb{I} + B)x = 0$ nur die Lösung $x = 0$, also ist $(\mathbb{I} + B)$ injektiv und mit ?? regulär. Bleibt zu zeigen: $\|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \|\mathbb{I}\| \\ &= \|(\mathbb{I} + B)(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\ &= \|(\mathbb{I} + B)^{-1} + B(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\ &\stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\geq} \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| - \|B(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\ &\geq \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| - \|B\| \cdot \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\ &= (1 - \|B\|) \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Korollar 0.2. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär und $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ s.d. $\|A - \tilde{A}\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Dann ist $\tilde{A}$ regulär.

Beweis. Es ist $\tilde{A} = \tilde{A} + A - A = (\tilde{A} - A) + A = A \underbrace{(A^{-1}(\tilde{A} - A) + \mathbb{I})}_{=: B}$. Damit folgt $\|B\| = \|A^{-1}(\tilde{A} - A)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{A} - A\| < 1$. Mit 0.1 folgt $\mathbb{I} + A^{-1}(\tilde{A} - A)$ regulär. Da A regulär nach Voraussetzung, folgt $\tilde{A} = A(\mathbb{I} + A^{-1}(\tilde{A} - A))$ regulär. □

Kapitel 1

Funktionen mehrerer Variablen

Wir betrachten im Folgenden Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, mit $D \subseteq \mathbb{K}^n$, $D \neq \emptyset$ und Bildbereich $B_f \subseteq \mathbb{K}$.

Zur Erinnerung:

- Bild und Urbild. Seien $M \subseteq D$, $N \subseteq f(D)$ Teilmengen. Dann heißt

$$f(M) := \{y \in \mathbb{K} \mid \exists x \in M: y = f(x)\}$$

das Bild. Weiter heißt

$$f^{-1}(N) := \{x \in D \mid \exists y \in N: f(x) = y\}.$$

das Urbild. Dann ist $B_f = f(D)$ und $D = f^{-1}(B_f)$

- Notation. $f^{-1}(\cdot)$ meint das Mengen-Urbild, nicht eine Umkehrfunktion.

Da alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ äquivalent sind, sind alle Aussagen unabhängig von der gewählten Norm. Standard ist die euklid. Norm.

1.1 Stetigkeit

Definition 1.1 (Stetigkeit). Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt stetig in einem Punkt $a \in D$, wenn für alle Folgen $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D$ mit $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$ gilt

$$f(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(a).$$

Die Funktion f heißt stetig in D , wenn sie für alle $x \in D$ stetig ist.

Bemerkung 1.2. • Falls $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, dann ist auch $f: M \rightarrow \mathbb{K}$, $M \subseteq D$ stetig.

- f stetig $\implies \operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$ sind stetig.

Lemma 1.3 (ε - δ -Kriterium der Stetigkeit). $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist stetig in $a \in D$, genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.d. $\forall x \in D$ gilt

$$\|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Beweis. wie für $n = 1$. □

Lemma 1.4. Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0 \forall x \in D$) stetig.

Beweis. wie für $n = 1$. □

Satz 1.5. Eine stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist auf jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ beschränkt, d.h.

$$\exists M_K \text{ s.d. } |f(x)| \leq M_K \quad \forall x \in K.$$

Beweis. Ang.: $f(x)$ nicht beschränkt auf K . Dann gilt: $\forall k \in \mathbb{N}, \exists x^{(k)} \in K$ mit $|f(x^{(k)})| > k$, d.h. $|f(x^{(k)})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$.

Die Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt auf der kompakten Menge K eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = x \in K$.

Da f stetig, folgt $|f(x^{(k_j)})| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} |f(x)|$. Widerspruch zu $|f(x^{(k)})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. □

Satz 1.6 (Extremum). Eine stetige Funktion $f: D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ nimmt auf jeder nichtleeren kompakten Menge $K \subseteq D$ ihr Maximum und Minimum an, d.h. es ex. x^{max} und $x^{min} \in K$, s.d.

$$\begin{aligned} f(x^{max}) &= \sup_{x \in K} f(x) =: \max_{x \in K} f(x) \\ f(x^{min}) &= \inf_{x \in K} f(x) =: \min_{x \in K} f(x). \end{aligned}$$

Beweis. f stetig und deshalb beschränkt auf K , d.h. es ex. obere Schranke $M := \sup_{x \in K} f(x)$.

Außerdem existiert eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K$, s.d. $f(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$. Da K kompakt, existiert eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a =: x^{max} \in K$. Wegen der Stetigkeit von f , folgt aus $f(x^{(k_j)}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x^{max})$: $f(x^{max}) = M$. □

Bemerkung 1.7 (Anwendung von Satz 1.6). Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{K}^n$, $K_1 \neq \emptyset$, $K_2 \neq \emptyset$ kompakt. Dann ist die Menge $K_1 \times K_2$ auch kompakt. Definiere $f(x, y) := \|x - y\|$, $x \in K_1$, $y \in K_2$.

$f(x, y)$ ist stetig, denn

$$|f(x, y) - f(x', y')| = ||x - y| - |x' - y'|| \stackrel{\Delta\text{-ungl.}}{\leq} \|x - y - x' + y'\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\|.$$

$\forall x, x' \in K_1$ und $\forall y, y' \in K_2$ mit $\|x - x'\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|y - y'\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ gilt

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Also ist $f(x, y)$ stetig auf $K_1 \times K_2$. Mit 1.6 folgt damit: $\exists a \in K_1, b \in K_2$, s.d.

$$\|a - b\| = \inf_{x \in K_1, y \in K_2} \|x - y\| =: d(K_1, K_2) \quad \text{Abstand zwischen Mengen } K_1 \text{ und } K_2.$$

Im Fall $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, gilt $d(K_1, K_2) > 0$. Falls $K_1 = \{a\}$, dann heißt $b \in K_2$ die Projektion des Punktes a auf K_2 (diese ist im Allg. nicht eindeutig bestimmt).

Definition 1.8 (Gleichmäßige Stetigkeit). Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, s.d.

$$\forall x, y \in D: \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Satz 1.9. Eine stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist auf einer kompakten Menge $K \subseteq D$ gleichmäßig stetig.

Beweis. Ang. f nicht gleichmäßig stetig. Dann $\exists \varepsilon > 0$, s.d. $\forall k \in \mathbb{N}$, ex. Punkte $x^{(k)}$ und $y^{(k)} \in K$, s.d.

$$\|x^{(k)} - y^{(k)}\| < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \left| f(x^{(k)}) - f(y^{(k)}) \right| > \varepsilon.$$

Da K kompakt, ex. eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = x \in K$.

Wir haben $\|x^{(k)} - y^{(k)}\| < \frac{1}{k}$, also

$$\|x^{(k_j)} - y^{(k_j)}\| < \frac{1}{k_j} \implies \lim_{j \rightarrow \infty} y^{(k_j)} = x = \lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)}.$$

Da f stetig, folgt

$$\left| f(x^{(k_j)}) - f(y^{(k_j)}) \right| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} |f(x) - f(x)| = 0.$$

Widerspruch zu $|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| > \varepsilon$. □

Definition 1.10 (Konvergenz von Funktionenfolgen). Sei $f_k: D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert

- punktweise gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, falls $\forall x \in D$ gilt $f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)$.
- gleichmäßig, falls $\sup_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Satz 1.11 (Gleichmäßige Konvergenz). Sei $f_k: D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig mit $f: D \rightarrow \mathbb{K}$. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.d. $\sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Da f_n stetig, ex. $\delta > 0$, s.d. $\forall y \in D$ gilt: $\|x - y\| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Dann gilt $\forall x, y \in D$ mit $\|x - y\| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist f stetig in x . □

Bemerkung 1.12. Analoge Sätze gelten allgemein für Funktionen auf kompakten Mengen in normierten $(V, \|\cdot\|)$ oder metrischen $(X, d(\cdot, \cdot))$ Räumen.