

Kapitel 1

Der n -dimensionale Zahlenraum K^n

1.1 Der euklidische Raum K^n

Bemerkung 1.1. K^n bezeichnet den Vektorraum der n -Tupel $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ mit Addition $x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ und skalarer Multiplikation $\alpha \cdot x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Definition 1.2. Sei X irgendeine Menge.

Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften:

M1 (Definitheit) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2 (Symmetrie) $\forall x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

M3 (Dreiecksungleichung) $\forall x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ein metrischer Raum (X, d) besteht aus einer Menge X mit einer Metrik d . Man nennt $d(x, y)$ auch den Abstand oder die Distanz von x und y .

Beispiel 1.3. (1) $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $d(x, y) := |x - y|$ ist ein metrischer Raum, denn:

M1 folgt aus $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|x| \geq 0$,

M2 folgt aus $|x - y| = |-(y - x)| = |y - x|$,

M3 folgt aus $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

(2) (induzierte Metrik) Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subseteq X$. Die induzierte Metrik d_A auf A ist definiert durch $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $d_A(x, y) := d(x, y)$, $\forall x, y \in A$. Dann wird (A, d_A) zu einem metrischen Raum.

(3) (triviale Metrik) Sei X eine Menge. Die Triviale Metrik wird definiert durch:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = y \\ 1, & \text{für } x \neq y \end{cases}.$$

(4) Weiteres wichtiges Beispiel: metrische Räume entstehen aus normierten Vektorräumen.

Definition 1.4. (normierter Raum) Sei V irgendein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm (auf V), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

N1 (Definitheit) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

N2 (Homogenität) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

N3 (Dreiecksungleichung) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Bemerkung 1.5. (Norm $\leadsto$ Metrik) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d(x, y) := \|x - y\|$, $\forall x, y \in V$ eine Metrik auf V .

Beispiel 1.6. Normen in $\mathbb{R}^n$.

(1) Euklidische Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(2) Maximumsnorm oder ℓ^∞ -Norm: $\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

(3) ℓ^1 -Norm: $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$.

(4) ℓ^p -Norm: $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$.

Definition 1.7. Eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, $x^{(k)} \in \mathbb{K}^n$, heißt

i) beschränkt, falls $\forall k \in \mathbb{N} : x^{(k)} \in K_R(0)$, $K_R(0)$ eine Kugelumgebung von 0 mit Radius R .

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x - a\|_\infty < r\}.$$

ii) Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass $\forall k, l \geq N_\varepsilon$ gilt: $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon$.

iii) konvergent gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$, wenn $\|x^{(k)} - x\|_\infty \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.
geometrisch: jede Kugelumgebung $K_\varepsilon(x)$ enthält fast alle Folgeelemente $x^{(k)}$ (d.h. alle bis auf endlich viele).

Bemerkung 1.8. Offenbar:

$$\begin{aligned} \left\| x^{(k)} - x \right\|_\infty \rightarrow 0, k \rightarrow \infty & \Leftrightarrow \\ \left| x_i^{(k)} - x_i \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Das heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$ (komponentenweise Konvergenz in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Satz 1.9 (Satz von Cauchy und Satz von Bolzano-Weierstraß).

- 1) Jede Cauchy-Folge in K^n konvergiert, d.h. der normierte Raum $(K^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig. Ein vollständiger normierter Raum wird Banach-Raum genannt.
- 2) Jede beschränkte Folge in K^n besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall k, l \geq N_\varepsilon : \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon$. Betrachte Komponentenfolge $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, i = 1, \dots, n$. Die Komponentenfolgen sind Cauchy-Folgen, weil

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(l)} \right| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon, \forall k, l \geq N_\varepsilon, \forall i = 1, \dots, n.$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} =: x_i \implies x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ in } \ell_\infty \text{ Norm.}$$

2) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\implies (x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, \forall i = 1, \dots, n$ auch beschränkt
Bo.-We. in $\mathbb{K}$ es existiert eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(k_{1,j})})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_1^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_1^{(k_{1,j})} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_1$,
nach n Schritten haben wir Teilfolgen $(x_n^{(k_{n,j})})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ für die alle Komponentenfolgen konvergieren $(x_i^{(k_{i,j})})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_i, \forall i = 1, \dots, n$. Daraus folgt $(x^{(k_{n,j})})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$.

□

Satz 1.10 (Äquivalenz von Normen). Sei $\mathbb{K}^n$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann sind alle Normen äquivalent zur Maximumsnorm (ℓ_∞), d.h. zu jeder Norm $\|\cdot\|, \exists m, M > 0$ sodass

$$m \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm. $\forall x \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{k=1}^n x_k e^{(k)}$, wobei $e^{(k)}, k = 1, \dots, n$ die sogenannte euklidische Basis ist: $e^{(k)} = \begin{pmatrix} \delta_{k,1} \\ \vdots \\ \delta_{k,n} \end{pmatrix}$.

Dann:

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|e^{(k)}\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \max_{i=1 \dots n} |x_i| \cdot \|e^{(k)}\| \leq M \cdot \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Wobei $M := \sum_{k=1}^n \|e^{(k)}\|$.

Setze

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}, \quad m := \inf\{\|x\| \mid x \in S_1\} \geq 0.$$

Es gzz.: $m > 0$. Annahme $m = 0$. Dann existiert eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, x^{(k)} \in S_1$, sodass $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Aus $x^{(k)} \in S_1$ folgt $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt in der ℓ_∞ -Norm. Dann impliziert der Satz von Bolzano-Weierstraß: es existiert eine konvergente Teilfolge, o.B.d.A. $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ in der ℓ_∞ -Norm, dann:

$$\underbrace{\left| \underbrace{\|x^{(k)}\|_\infty}_{=1} - \|x\|_\infty \right|}_{=|1 - \|x\|_\infty|} \leq \underbrace{\|x^{(k)} - x\|_\infty}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \implies |1 - \|x\|_\infty| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \implies \|x\|_\infty = 1 \implies x \in S_1.$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)}\| \leq M \cdot \|x - x^{(k)}\|_\infty + \|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ \implies \|x\| &= 0 \implies x = 0. \end{aligned}$$

Widerspruch zu $x \in S_1$, also $m > 0$. Dann für $x \neq 0$ ist Vektor $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_1$ und $m \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty}$ (nach Definition von m) und $0 < m \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|$, $x \in \mathbb{K}^n$. $\square$

Korollar 1.11. Auf K^n sind alle Konvergenzen in irgendeiner Norm äquivalent zur Konvergenz in der ℓ_∞ -Norm. (= komponentenweiser Konvergenz)

Bemerkung 1.12. Obiger Satz gilt nicht für unendlich dimensionale Räume (wie z.B. $C[a, b]$ oder $R[a, b]$). Die endliche Dimension von K^n ist entscheidend.

1.2 Teilmengen in K^n (Topologische Grundbegriffe)

Bezeichnung: $\|\cdot\|$ irgendeine Norm.

Definition 1.13 (ε -Kugel, ε -Umgebung). Sei $a \in \mathbb{K}^n, r > 0$.

- (1) Dann heißt $K_r(a) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|a - x\| < r\}$ die offene Kugel um a mit Radius r bzgl. $\|\cdot\|$.
- (2) $U \subset K^n$ heißt Umgebung von $a \in \mathbb{K}^n$, falls $\exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(a) \subseteq U$. Insbesondere ist $K_\varepsilon(a)$ selbst eine Umgebung von a , eine sogenannte ε -Umgebung von a .

Definition 1.14 (offene Menge). Eine Menge $O \subset \mathbb{K}^n$ heißt offen, falls O eine Umgebung jedes Punktes aus O ($x \in O$) ist, das heißt $\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq O$.

Beispiel 1.15. (1) $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ ist offen ($a < b, a, b \in \mathbb{R}$), weil: sei $x \in]a, b[$, definiere $\varepsilon := \min\{|a - x|, |b - x|\}$, $\varepsilon > 0$, da $a < x < b$ ist $K_\varepsilon(x) \subseteq]a, b[$

(2) $\emptyset$ leere Menge ist immer offen, $\mathbb{K}^n$ ist immer offen

(3) Die Kugel $K_r(a)$ ist immer offen: sei $x \in K_r(a)$, setze $\varepsilon := r - \|x - a\|$, dann $K_\varepsilon(x) \subseteq K_r(a)$, weil: sei $y \in K_\varepsilon(x)$. Dann gilt

$$\|y - a\| \leq \underbrace{\|y - x\|}_{< \varepsilon = r - \|x - a\|} + \|x - a\| < r - \|x - a\| + \|x - a\| = r.$$

Satz 1.16 (Eigenschaften offener Mengen). Es gilt:

- (1) Sind U und $V (\subseteq \mathbb{K}^n)$ offen, dann ist $U \cap V$ offen.
- (2) Sei $U_i \subset \mathbb{K}^n, i \in I$ eine Familie offener Teilmengen. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Beweis. (1) Sei $x \in U \cap V$. Dann $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $K_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U, K_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$. Damit gilt für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $K_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$. (Beachte: $\emptyset$ ist immer offen.)

(2) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, dann $\exists j \in I$ mit $x \in U_j$.

$$U_j \text{ offen} \implies \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } K_\varepsilon(x) \subseteq U_j \implies K_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

$\square$

Korollar 1.17. 1) Endliche Schnitte und beliebige Vereinigung von offenen Mengen sind wieder offen.

2) (Beobachtung) Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen braucht nicht offen zu sein. Z.B.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right[= [0, 1]$$

ist nicht offen, da $K_{\varepsilon}(0) \not\subset [0, 1], \forall \varepsilon > 0$.

Definition 1.18 (Abgeschlossene Menge). Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{K}^n$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $A^c := \mathbb{K}^n \setminus A$ offen ist.

Beispiel 1.19. (1) Für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ ist $[a, b]$ abgeschlossen, denn $] -\infty, a[\cup]b, \infty[= \mathbb{R} \setminus [a, b]$ ist offen, denn:

$$]-\infty, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a - n, a[\text{ ist offen} \qquad]b, \infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]b, b + n[\text{ ist offen.}$$

Satz 1.20 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen).

- (1) Sind V, U ($V, U \subset \mathbb{K}^n$) abgeschlossen, dann ist $U \cup V \subset \mathbb{K}^n$ auch abgeschlossen.
- (2) Sind $U_i, (i \in I)$ abgeschlossene Mengen in $\mathbb{K}^n$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ auch abgeschlossen.

Beweis. (1) $(U \cup V)^c = \underbrace{U^c}_{\text{offen}} \cap \underbrace{V^c}_{\text{offen}}$ offen.

(2) $\left(\bigcap_{i \in I} U_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i^c}_{\text{offen}}$ offen.

□

Beispiel 1.21. (1) Beliebige Vereinigung abgeschlossener Mengen muss nicht abgeschlossen sein. Z.B. $]0, 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]}_{\text{abgeschlossen}}$ ist offen.

(2) $\emptyset$ und K^n sind abgeschlossen.

(3) $A_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $A_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ abgeschlossen, dann ist auch $A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ abgeschlossen.

(4) Für $a < b \in \mathbb{R}$ ist $[a, b[$ weder offen noch abgeschlossen.