

## 0.1 Geometrie in $K^n$

**Definition 0.1** (Skalarprodukt). Sei  $V$  irgendein Raum über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Eine Abbildung  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  heißt Skalarprodukt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

S1 (Definitheit)  $(x, x) \in \mathbb{R}$  und  $(x, x) \geq 0$ ,  $(x, x) = 0 \iff x = 0$

S2 (Symmetrie)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$

S3 (Linearität im ersten Argument)  $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

**Bemerkung 0.2.** (1) Falls nur  $(x, x) \in \mathbb{R}, (x, x) \geq 0$  gilt (es ist möglich, dass  $(x, x) = 0$  und  $x \neq 0$ ), dann ist  $(\cdot, \cdot)$  ein „semi-skalarprodukt“.

(2) Aus S2 und S3 folgt die Linearität im zweiten Argument und damit sog. Bilinearität des Skalarprodukts als eine Sesquilinearform in  $\mathbb{C}$  bzw. eine Bilinearform in  $\mathbb{R}$

(3) S3  $\implies \begin{cases} \text{Additivität} & (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \\ \text{Homogenität} & (\alpha x, y) = \alpha(x, y), \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$

**Lemma 0.3** (Schwarz-Ungleichung). Für ein Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  auf  $V$  über  $\mathbb{K}$  gilt die Schwarz-Ungleichung

$$|(x, y)^2| \leq (x, x) \cdot (y, y), \quad x, y \in V$$

*Beweis.*  $y = 0 \implies$  trivial. Sei  $y \neq 0$ , und sei  $\alpha \in \mathbb{K}$  beliebig.

$$0 \stackrel{S1}{\leq} (x + \alpha y, x + \alpha y) \stackrel{S2, S3}{=} (x, x) + \alpha(y, x) + \overline{\alpha}(x, y) + \alpha\overline{\alpha}(y, y)$$

Setze  $\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x, x) - \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)} - \frac{\overline{(x, y)}(x, y)}{(y, y)} + \frac{(x, y)}{(y, y)} \cdot \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)} \cdot (y, y) \\ &= (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \\ \implies 0 &\leq (x, x) \cdot (y, y) - |(x, y)|^2 \end{aligned}$$

□

**Korollar 0.4.** a) Ein Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  auf  $V$  über  $\mathbb{K}$  erzeugt eine Norm durch  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ ,  $x \in V$ . Falls ein normierter Raum  $(V, (\cdot, \cdot))$  vollständig ist, so heißt das Paar  $(V, (\cdot, \cdot))$  Hilbert-Raum.

b) Das euklidische Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_2$  auf  $\mathbb{K}^n$

$$(x, y)_2 := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

erzeugt die euklidische Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{(x, x)_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

$(\mathbb{K}^n, (\cdot, \cdot)_2)$  ist ein Hilbert-Raum.

*Beweis.* Normeigenschaften Definitheit und Homogenität folgen aus S1-S3. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Schwarz-Ungleichung.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \implies \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

□

Wichtige Ungleichungen

**Lemma 0.5** (Ungleichung von Young). Seien  $p, q \in \mathbb{R}, p > 1, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$|x \cdot y| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

*Beweis.* Übung

□

**Lemma 0.6** (Ungleichung von Hölder). Seien  $p, q \in \mathbb{R}, p > 1, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$\underbrace{|(x, y)_2|}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}} \leq \underbrace{\|x\|_p}_{\ell_p\text{-Norm von } x} \cdot \underbrace{\|y\|_q}_{\ell_q\text{-Norm von } y}$$

*Beweis.* Falls  $x = 0$  oder  $y = 0 \implies$  klar. Sei  $\|x\|_p \neq 0$ ,  $\|y\|_q \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{|(x, y)_2|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \left| \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i \overline{y_i}|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \\
&\stackrel{\text{Young-Ungl.}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left( \frac{|x_i|^p}{p \cdot \|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \cdot \|y\|_q^q} \right) \\
&= \frac{1}{p \cdot \|x\|_p^p} \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}_{=\|x\|_p^p} + \frac{1}{q \cdot \|y\|_q^q} \underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}_{=\|y\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
\implies |(x, y)_2| &\leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q
\end{aligned}$$

□

**Lemma 0.7** (Ungleichung von Minkowski). Sei  $p \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$  oder  $p = \infty$ . Dann gilt

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\leadsto$  Dreiecksungleichung für die  $\ell_p$ -Norm.

*Beweis.* Für  $p = 1$

$$\|x + y\|_1 \stackrel{\text{Def. } \ell_1}{=} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \stackrel{\Delta\text{-UG}}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \stackrel{\text{Def. } \ell_1}{=} \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Für  $p = \infty$

$$\|x + y\|_\infty \stackrel{\text{Def. } \ell_\infty}{=} \max_{i=1, \dots, n} |x_i + y_i| \stackrel{\Delta\text{-UG}}{\leq} \max_{i=1, \dots, n} |x_i| + \max_{i=1, \dots, n} |y_i| \stackrel{\text{Def. } \ell_\infty}{=} \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Sei  $1 < p < \infty$ . Definiere  $q := \frac{p}{p-1}$  ( $\implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$ ) und setze  $\xi_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $\xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ . Es gilt

$$\|\xi\|_q^q = \sum_{i=1}^n |\xi_i|^q = \sum_{i=1}^n \underbrace{(|x_i + y_i|^{p-1})^q}_{\xi_i} = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \|x + y\|_p^p$$

Dann

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i + y_i|^p}_{= \underbrace{|x_i + y_i|^{p-1}}_{\xi_i} \cdot |x_i + y_i|} \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot \xi_i \\
&\leq \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \xi_i}_{|(x, \xi)_2} + \underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i| \cdot \xi_i}_{|(y, \xi)_2} \\
&\stackrel{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq} \|x\|_p \cdot \|\xi\|_q + \|y\|_p \cdot \|\xi\|_q \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_q) \cdot \|\xi\|_q \\
&\stackrel{\text{Def. } \xi}{=} (\|x\|_p + \|y\|_q) \cdot \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&\stackrel{\text{Def. } q}{=} (\|x\|_p + \|y\|_q) \cdot \|x + y\|_p^{p-1} \\
&\implies \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p
\end{aligned}$$

□

**Definition 0.8** (Orthogonalität).  $x, y \in \mathbb{K}^n$  heißen orthogonal ( $x \perp y$ ), falls  $(x, y)_2 = 0$ .

**Definition 0.9** (Orthogonalsystem/Orthogonalbasis). Ein Satz von Vektoren  $\{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}$ ,  $a^{(i)} \neq 0$ ,  $a^{(i)} \in \mathbb{K}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$  und  $\underbrace{(a^{(k)}, a^{(l)})_2 = 0}_{\text{paarweise orthogonal}}$  für  $k \neq l$  heißt

Orthogonalsystem bzw. falls  $m = n$  Orthogonalbasis.

Falls  $(a^{(k)}, a^{(k)})_2 = 1$ , dann heißen die Vektoren  $\{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}$  ein Orthonormalsystem bzw. Orthonormalbasis.

**Bemerkung 0.10.** Die orthogonalen Vektoren (wie in Def.) sind linear unabhängig:

$$\text{Sei } \sum_{k=1}^m c_k a^{(k)} = 0 \iff \sum_{k=1}^m c_k (a^{(k)}, a^{(l)}) \stackrel{\substack{a^{(i)} \\ \text{paarweise} \\ \text{orthog.}}}{=} c_l \underbrace{(a^{(l)}, a^{(l)})}_{\substack{\neq 0 \\ \text{für } a^{(l)} \neq 0}} = 0 \iff c_l = 0, \quad l = 1, \dots, m$$

**Beispiel 0.11.**  $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$  ist eine Orthogonalbasis in  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma 0.12.** Sei  $\{a^{(k)}, k = 1, \dots, n\}$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{K}^n$ . Dann gibt es  $\forall x \in \mathbb{K}^n$  eine Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^n (x, a^{(k)})_2 \cdot a^{(k)}, \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

$$\left( \begin{array}{ll} \sim & \text{Fourierentwicklung} \\ a^{(k)} \sim & e^{ixk} \\ x \sim & f(x) \\ c_k \sim & (f, e^{ixk})_{L^2} \end{array} \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{ixk} \right)$$

und es gilt die Vollständigkeitsrelation (Gleichung von Parseval)

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |(x, a^{(k)})_2|^2$$

$$(\sim \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^2| \cdot 2\pi)$$

*Beweis.*  $\exists \alpha_j$ , sodass  $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j a^{(j)}$

$$\implies (x, a^{(k)})_2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{(a^{(j)}, a^{(k)})_2}_{\delta_{jk}} = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$\implies$  Darstellung von  $x$

Außerdem gilt

$$\|x\|_2^2 = (x, x)_2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (x, a^{(k)})_2 \cdot \overline{(x, a^{(j)})_2} \cdot \underbrace{(a^{(k)}, a^{(j)})_2}_{\delta_{jk}} = \sum_{k=1}^n |(x, a^{(k)})_2|^2$$

$\implies$  Gleichung von Parseval

□

**Bemerkung 0.13.** Lemma 0.12 gilt in unendlichdimensionalen Skalarprodukträumen mit vollständigem Orthonormalsystem. Beispiel: Fourier-Reihen in  $R[0, 2\pi]$ , trigonometrische Funktionen  $e^{ikx}$  als vollständiges Orthonormalsystem.

**Satz 0.14** (Gram-Schmidt-Verfahren). Sei  $\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$  eine Basis des  $\mathbb{K}^n$ . Dann ist  $\{b^{(1)}, \dots, b^{(n)}\}$  konstruiert durch das Orthogonalisierungsverfahren von Gram und Schmidt eine Orthonormalbasis.

$$b^{(1)} := \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|_2}$$

$$\tilde{b}^{(k)} := a^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (a^{(k)}, b^{(j)})_2 \cdot b^{(j)}$$

$$b^{(k)} := \frac{\tilde{b}^{(k)}}{\|\tilde{b}^{(k)}\|_2}, \quad k = 2, \dots, n$$

*Beweis.* Rannacher

□