

Jetzt: Fourier Analysis!

## 0.1 Der Funktionen-Raum $R[a, b]$

**Definition 0.1.** Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  heißt Riemann-integrierbar auf  $[a, b]$ , falls  $\operatorname{Re}(f)$  und  $\operatorname{Im}(f)$  Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx.$$

**Bemerkung 0.2.** 1. Analog: Definitionen von uneigentlichen Riemann-integralen für komplexwertige Funktionen

2. Die Rechenregeln f+r das reelle Riemann-integral übertragen sich auf komplexwertige Integrale, insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{f(x)} \, dx &= \int_a^b (\operatorname{Re} f(x) - i \cdot \operatorname{Im} f(x)) \, dx \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(x) \, dx - i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) \, dx \\ &= \overline{\int_a^b f(x) \, dx}. \end{aligned}$$

**Definition 0.3.** Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) heißt stückweise stetig, falls

- 1)  $f$  in  $[a, b]$  bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig und beschränkt ist.
- 2) in jeder dieser Unstetigkeitsstellen  $\xi \in [a, b]$  die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte

$$f(\xi_{\pm}) := \lim_{h \searrow 0} f(\xi \pm h).$$

existieren. Für  $\xi \in (a, b)$  wird

$$f(\xi) := \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2}.$$

gesetzt.

**Bemerkung 0.4.** Stückweise stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Die Menge der in diesem Sinne auf  $[a, b]$  stückweise stetigen (Riemann-integrierbaren) Funktionen bilden einen Vektorraum  $R[a, b]$ .

**Definition 0.5.** Wir definieren

$$(f, g) := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad (\text{„Sesquilinearform“}).$$

Dies ist wohldefiniert da für  $f, g \in R[a, b]$  das Produkt  $f(x) \cdot \overline{g(x)} \in R[a, b]$  ist.

**Definition 0.6** (Skalarprodukt). Sei  $V$  Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  heißt Skalarprodukt auf  $V$ , falls  $\forall u, v, w \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$  gilt:

- (S1)  $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$  (Symmetrie, hermitesch falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  symmetrisch falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )
- (S2)  $\langle \alpha v, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle$   
 $\langle v, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle$   
 $\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$   
 $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$
- (S3) Positivdefinitheit:  $\langle v, v \rangle \geq 0$   
 $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

**Bemerkung 0.7.** Auf  $R[a, b]$  besitzt  $(\cdot, \cdot)$  die Eigenschaften eines Skalarprodukts, denn es gilt  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in R[a, b], f_1, f_2 \in R[a, b], g_1, g_2 \in R[a, b]$ :

- (1)  $(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = (\alpha f_1, g) + (\beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$
- (2)  $(f, \alpha g_1 + \beta g_2) = (f, \alpha g_1) + (f, \beta g_2) = \overline{\alpha}(f, g_1) + \overline{\beta}(f, g_2)$
- (3)  $(f, g) = \int_a^b f \cdot \overline{g} \, dx = \int_a^b \overline{\overline{f}g} \, dx = \overline{\int_a^b \overline{f}g \, dx} = \overline{\int_a^b g \overline{f} \, dx} = \overline{(g, f)}$
- (4)  $(f, f) = \int_a^b f \overline{f} \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \geq 0$
- (5) Aus (4) und der Definition von  $R[a, b]$  folgt:  $(f, f) = 0 \implies f \equiv 0$  auf  $[a, b]$ .

$(\cdot, \cdot)$  wird auf  $R[a, b]$   $L^2$ -Skalarprodukt genannt.

**Lemma 0.8.** Für ein  $L^2$ -Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  auf  $R[a, b]$  gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

*Beweis.* 1) Falls  $g \equiv 0$  gilt trivialerweise

$$|(f, g)|^2 = 0 = (f, f) \cdot (g, g).$$

2) Falls  $g \not\equiv 0$ , sei  $\alpha \in \mathbb{K}$  beliebig

$$0 \leq (f + \alpha g, f + \alpha g) = (f, f) + \alpha(g, f) + \overline{\alpha}(f, g) + \alpha \cdot \overline{\alpha}(g, g).$$

Setze  $\alpha := -\frac{(f, g)}{(g, g)} = -\frac{\overline{(g, f)}}{(g, g)}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (f, f) - \frac{(f, g) \cdot (g, f)}{(g, g)} - \frac{(g, f) \cdot (f, g)}{(g, g)} + \frac{(f, g)(g, f)(g, g)}{(g, g)(g, g)} \\ &= (f, f) - \frac{(f, g)(g, f)}{(g, g)} \\ &= (f, f) - \frac{\overline{(f, g)}(f, g)}{(g, g)} \\ &= (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \\ &\implies 0 \leq (f, f)(g, g) - |(f, g)|^2. \end{aligned}$$

□

**Definition 0.9** ( $L^2$ -Norm). Das  $L^2$ -Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  induziert die  $L^2$ -Norm auf  $R[a, b]$  mit

$$\|f\| = \|f\|_{L^2} := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_a^b f \cdot \bar{f} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Bemerkung 0.10.** Normeigenschaften von  $L^2$  auf  $R[a, b]$  sind erfüllt:

(N1) Definitheit:  $\|f\| = 0 \implies (f, f) = 0 \implies f = 0$  auf  $[a, b]$

(N2) Homogenität:  $\|\alpha f\| = (\alpha f, \alpha f)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 (f, f))^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|f\|$

(N3) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= (f + g, f + g)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|f\|^2 + (f, g) + (g, f) + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} (\|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

**Definition 0.11** (Konvergenz im Quadratischen Mittel ( $L^2$ -Konvergenz)). Seien  $f_n \in R[a, b]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in R[a, b]$ .  $f_n$  konvergiert gegen  $f$  im Quadratischen Mittel  $f_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty}$ , wenn gilt

$$\|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Das heißt, dass die quadratische Abweichung zwischen  $f_n$  und  $f$  gegen Null konvergiert:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Bemerkung 0.12.** (1) Es gilt:

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \leq \|f_n - f\|_{\infty}^2 (b - a).$$

Damit folgt

$$\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Umkehrung gilt i.A. nicht! Beispiel:  $f_n(x) := x^n$ ,  $x \in [-1, 1]$

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 x^{2n} \, dx = 2 \int_0^1 x^{2n} \, dx = 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt  $f_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty} f \equiv 0$ .

Aber wegen  $f_n(1) = 1$  für  $x = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , konvergiert  $f_n$  nicht punktweise gegen  $f \equiv 0$  und wegen  $f_n(-1) = (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x = -1$  konvergiert  $f_n$  nicht.

(2) Der Raum  $R[a, b]$  mit  $L^2$ -Norm  $\|\cdot\|$  ist **nicht vollständig**, d.h. es existieren Cauchy-Folgen in  $R[a, b]$ , die keinen Grenzwert in  $R[a, b]$  haben. Beispiel: siehe Abb. 1 (Rechts). Hier ist  $f(x) \not\equiv 0$ ,  $x \in [a, b]$ .

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx = 0 = \|f\|_{L^2},$$

aber  $f(x) \notin R[a, b]$ , denn

$$f(\xi) \neq 0 = \frac{\lim_{h \searrow 0} f(\xi + h) - \lim_{h \searrow 0} f(\xi - h)}{2}.$$

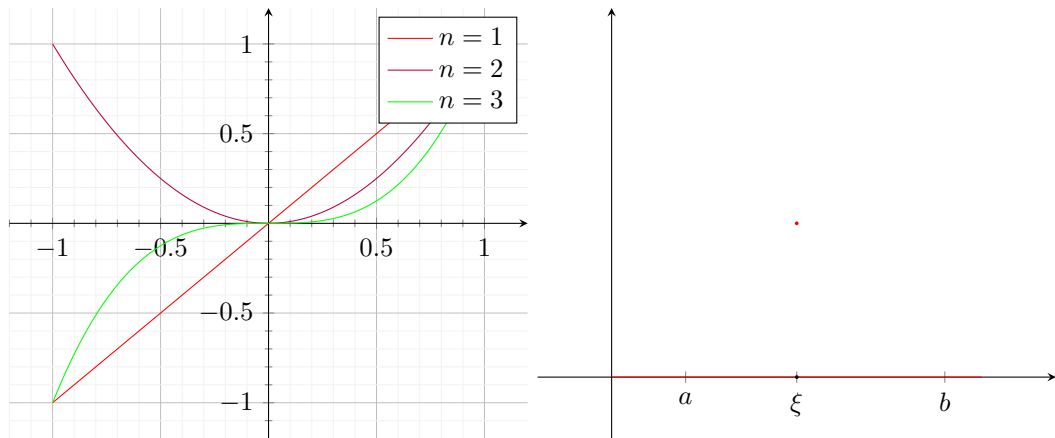


Abbildung 1: Links:  $f_n(x) = x^n$ , Rechts:  $f(x) \neq 0$

**Definition 0.13** (Orthogonalität).  $f, g \in R[a, b]$  heißen orthogonal, wenn gilt  $(f, g) = 0$ .

Eine Teilmenge  $S \subset R[a, b]$  heißt Orthogonalsystem, wenn alle Elemente aus  $S$  paarweise orthogonal sind, d.h.

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} \|f_i\|^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall f_i, f_j \in S.$$

**Satz 0.14.** Die trigonometrischen Funktionen, für  $k, l \in \mathbb{N}$

$$c_k(x) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \cos(kx) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_l(x) := \sin(lx)$$

bilden auf  $R[a, b]$  bezüglich des  $L^2$ -Skalarprodukts ein Orthogonalsystem und es gilt

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} s_l(x) \, dx = \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx = \pi \delta_{kl}$$

Hier sei

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad \text{Kroneckersymbol.}$$

*Beweis.*

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \, dx = \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \, dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k} (1 - 1) = 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(lx)}_v \, dx \\
 &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\left. \frac{1}{k} \sin(kx) \cdot \sin(lx) \right|_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx)}_u \underbrace{l \cos(lx)}_{v'} \, dx \\
 &= -\frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) c_l(x) \, dx
 \end{aligned}$$

Für  $l = k$  gilt

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= - \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx \\
 \implies 2 \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0 \\
 \implies \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) \, dx &= 0
 \end{aligned}$$

Analog folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx \\
 &\stackrel{l=k}{\implies} \int_0^{2\pi} c_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} s_k^2 \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - c_k^2(x)) \, dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx \\
 \implies \int_0^{2\pi} c_k^2(x) \, dx &= \pi = \int_0^{2\pi} s_k^2(x) \, dx
 \end{aligned}$$

Wenn  $k \neq l$ , dann folgt

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx \\
 &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{l^2}{k^2} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx \\
 \implies \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) \, dx &= 0
 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) \, dx &= 0 \\
 \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) \, dx &= 0.
 \end{aligned}$$

□