

Kapitel 1

Differenzierbare Funktionen in $\mathbb{R}^n$

Betrachte die Abbildung $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Stetigkeitsdefinition von f entspricht der Stetigkeit von f in $\mathbb{R}$. Aber: Differenzierbarkeit einer Funktion $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Für $h \in \mathbb{R}^n$ nicht sinnvoll.

1.1 Partielle Differenzierbarkeit

Definition 1.1 (Partielle Ableitung). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- f heißt im Punkt $x \in D$ partiell differenzierbar nach i -ter Koordinatenrichtung, falls der Grenzwert

$$\partial_i f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cdot e^{(i)}) - f(x)}{h}.$$

existiert mit $e^{(i)} := i$ -te Spalte der $n \times n$ Einheitsmatrix. Schreibweise auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ oder $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

- f heißt partiell differenzierbar in $x \in D$, falls $\partial_i f(x)$ für alle $1 \leq i \leq n$ existieren.
- Sind $\partial_i f(x) \forall i$ stetig, dann heißt f stetig partiell differenzierbar.
- Falls $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dann heißt f (stetig) partiell differenzierbar, falls alle Komponentenfunktionen f_j ($1 \leq j \leq m$) (stetig) partiell differenzierbar in $x \in D$ sind, d.h. wenn $\partial_i f_j(x) \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ existieren.

Bemerkung 1.2 (Interpretation als gewöhnliche Ableitung). Sei $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Definiere $\tilde{f}(\xi) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)$, d.h. $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fest. Dann ist

$$\partial_i f(x) = \frac{d\tilde{f}(\xi)}{d\xi}.$$

D.h. für partielle Ableitungen gelten analoge Regeln, wie für die gewöhnliche Ableitung, insbesondere Produktregel, Quotientenregel und auch Kettenregel.

Beispiel 1.3. Die Funktion

$$r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

ist in $D = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\partial_i r(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \stackrel{\text{gew. Kettenregel}}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

Sei $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige differenzierbare Funktion. Dann ist $f(x) = F(r(x))$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiert und partiell differenzierbar.

$$\partial_i f(x) = \frac{dF(r(x))}{dy} \partial_i r(x) = F'(r(x)) \frac{x_i}{\|x\|_2} = F'(r(x)) \frac{x_i}{r(x)}.$$

Bemerkung 1.4. Für $n = 1$ gilt: f differenzierbar $\implies f$ stetig. Für $n > 1$ und f partiell differenzierbar, folgt i.A. nicht, dass f stetig ist.

Satz 1.5. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Für $x \in D$ gelte: $\exists K_r(x) \subseteq D$, s.d. die partiellen Ableitungen $\partial_i f(y)$, $i = 1, \dots, n$ beschränkt sind $\forall y \in K_r(x)$, d.h.

$$\sup_{y \in K_r(x)} |\partial_i f(y)| \leq M, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt f stetig in Punkt x .

Beweis. Sei $n = 2$ und $y = (y_1, y_2) \in K_r(x)$. Es ist

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)$$

Mit y_2 fest, folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \xi = \xi(y_2)$ zwischen y_1 und x_1 , also

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) \stackrel{\text{MWS}}{=} \partial_1 f(\xi, y_2)(y_1 - x_1)$$

Analog für x_1 fest und $\eta(x_1)$ zwischen y_2 und x_2

$$f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2) \stackrel{\text{MWS}}{=} \partial_2 f(x_1, \eta)(y_2 - x_2)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \underbrace{|\partial_1 f(\xi, y_2)|}_{\leq M} |y_1 - x_1| + \underbrace{|\partial_2 f(x_1, \eta)|}_{\leq M} |y_2 - x_2| \\ &\leq M(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) \\ &= M\|y - x\|_1. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon \in (0, r]$ beliebig, dann gilt für $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$

$$\|y - x\|_1 \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Also f stetig in x und wegen $|f(y) - f(x)| \leq M\|y - x\|_1$ sogar Lipschitz-stetig. Für $n > 2$ analog. $\square$

Definition 1.6. Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit $\partial_i f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- Falls $\partial_i f$ partiell differenzierbar sind, dann heißt f zweimal partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\partial_i \partial_j f(x) := \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right).$$

- f heißt k -mal stetig partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung von f existieren und stetig sind.

Bemerkung 1.7. Im Allgemeinen ist $\partial_i \partial_j f(x) \neq \partial_j \partial_i f(x)$!

Satz 1.8 (Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung $K_r(x) \subseteq D$ eines Punktes $x \in D$. Dann gilt

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Allgemein: Für eine k -mal stetig partiell differenzierbare Funktion ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar.

Beweis. 1) Sei $n = 2$ und

$$A := \underbrace{f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2)}_{=\varphi(x_1 + h_1)} - \underbrace{f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2)}_{=\varphi(x_1)}.$$

Definiere $\varphi(x) := f(x, x_2 + h_2) - f(x, x_2)$. Dann ist $A = \varphi(x_1 + h_1) - \varphi(x_1)$. Mit dem MWS bezügl. x_1 folgt

$$\varphi(x_1 + h_1) - \varphi(x_1) = \varphi'(x_1 + \theta_1) \cdot h_1, \quad \theta_1 \in (0, h_1)$$

Für φ' gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(x_1) &= \partial_1 f(x_1, x_2 + h_2) - \partial_1 f(x_1, x_2) \\ &\stackrel{\text{MWS bezügl. } x_2}{=} \partial_2(\partial_1 f(x_1, x_2 + \theta'_1)) \cdot h_2, \quad \theta'_1 \in (0, h_2) \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\varphi'(x_1 + \theta_1) = \partial_2(\partial_1 f(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta'_1)) h_2.$$

Und damit ist

$$A = \varphi'(x_1 + \theta_1) h_1 = \partial_2(\partial_1 f(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta'_1)) \cdot h_1 \cdot h_2$$

Analog definiere $\psi(x) := f(x_1 + h_1, x) - f(x_1, x)$, dann

$$\begin{aligned} A &= \psi(x_2 + h_2) - \psi(x_2) \\ &\stackrel{\text{wie oben}}{=} h_2 \psi'(x_2 + \theta_2) \\ &= h_1 \cdot h_2 \partial_1(\partial_2 f(x_1 + \theta_2, x_2 + \theta'_2)), \quad \theta_2 \in (0, h_1), \theta'_2 \in (0, h_2). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\partial_2 \partial_1 f(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta'_1) = \frac{A}{h_1 \cdot h_2} = \partial_1 \partial_2 f(x_1 + \theta_2, x_2 + \theta'_2).$$

Die partiellen Ableitungen $\partial_2 \partial_1 f$ und $\partial_1 \partial_2 f$ sind stetig in $K_r(x)$, also gilt für $h_1, h_2 \rightarrow 0$, d.h. $x_1 + \theta_1 \rightarrow x_1, x_2 + \theta'_1 \rightarrow x_2, \dots$

$$\begin{aligned}\partial_2 \partial_1 f(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta'_1) &\xrightarrow{h_1, h_2 \rightarrow 0} \partial_2 \partial_1 f(x) \\ \partial_1 \partial_2 f(x_1 + \theta_2, x_2 + \theta'_2) &\xrightarrow{h_1, h_2 \rightarrow 0} \partial_1 \partial_2 f(x).\end{aligned}$$

Also $\partial_1 \partial_2 f(x) = \partial_2 \partial_1 f(x)$. Für $n > 2$ analog.

2) Sei f k -mal stetig differenzierbar. Dann folgt durch Induktion nach k

$$\partial_1 \dots \partial_k f(x) = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(x).$$

für jede Permutation $(i_1, \dots, i_k)$ von $(1 \dots k)$.

□

Definition 1.9 (Begriffe der Vektoranalysis).

- Gradient: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Der Vektor

$$\text{grad} f(x) := \nabla f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt der Gradient von f in $x \in D$.

- Hesse-Matrix: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Die Matrix

$$H_f(x) := \nabla^2 f(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt Hesse-Matrix von f im Punkt $x \in D$.

- Jacobi-Matrix: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine partiell differenzierbare Vektorfunktion. Die Matrix

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobimatrix von f in $x \in D$.

Schreibweise: $J_f(x) = f'(x) = (\nabla f(x))^T$.

Beispiel 1.10. $r(x) = \|x\|_2$.

$$\nabla r(x) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \partial_i r(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{x_i}{r(x)} \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Für die Hesse-Matrix $\nabla^2 r(x) = \left(\partial_j \frac{x_i}{r(x)} \right)_{i,j=1}^n$ folgt

$$\partial_j \left(\frac{x_i}{r(x)} \right) = \begin{cases} \frac{r(x) - x_i \frac{x_i}{r(x)}}{r(x)^2} = \frac{1}{r(x)} - \frac{x_i^2}{r(x)^3} & i = j \\ -\frac{x_i \frac{x_j}{r(x)}}{r(x)^2} = -\frac{x_i x_j}{r(x)^3} & i \neq j \end{cases}.$$

Diese Hesse-Matrix ist die Jacobi-Matrix der Vektorfunktion $v(x) = \frac{x}{r(x)} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{x_i}{r(x)} \\ \vdots \end{pmatrix}$.