

0.0.1 Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme

Motivation: Es sei ein quadratisches Gleichungssystem gegeben mit

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= b_1 \\ \vdots & \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= b_n. \end{aligned}$$

mit einer Vektorform $f(x) = b$ und $b \in \mathbb{K}^n$ gegeben, s.d.

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Ziel: $x = f^{-1}(b)$ finden als Grenzwert einer Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

Ansatz: Definiere $g(x) := x - \sigma(f(x) - b)$ für ein $\sigma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und suche Fixpunkt von $g: D \rightarrow \mathbb{K}^n$ ($x = g(x)$).

Fixpunktiteration: Startwert $x^{(0)}$. Iterationsschritt

$$x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Falls f stetig, dann ist auch g stetig. Damit folgt, falls $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$, dann $g(x^{(k-1)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g(x)$.
Damit folgt

$$\underbrace{x^{(k)}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} x} = g\left(\underbrace{x^{(k-1)}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} g(x)}\right).$$

Für $k \rightarrow \infty$, folgt also $x = g(x)$, also ist x Fixpunkt. Damit folgt $x = g(x) = x - \sigma(f(x) - b) \implies f(x) = b$.

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Fixpunktiteration?

Definition 0.1 (Lipschitz-Stetigkeit). Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante $L < \infty$ existiert, s.d.

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

Falls $L < 1$ heißt g Kontraktion (bezügl. Norm $\|\cdot\|$).

Satz 0.2 (Banachscher Fixpunktsatz). Sei $g: D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Funktion mit den Eigenschaften

- 1) $g(M) = M$ für ein $M \subseteq D$, M abgeschlossen
- 2) g ist Kontraktion auf M , d.h. $\exists L < 1$, s.d. $\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|$, $\forall x, y \in M$.

Dann gilt

- (i) Es existiert genau ein Fixpunkt $x^* \in M$ von g .

(ii) $\forall x^{(0)} \in M$ ist die Iterationsfolge $x^{(k)} = g(x^{(k-1)})$ wohldefiniert ($x^{(k)} \in M$) und $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$.

(iii) Es gilt die Abschätzung:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Beweis. (i) Seien $x, x' \in M$ zwei Fixpunkte. Dann

$$\|x - x'\| = \|g(x) - g(x')\| \leq L\|x - x'\|.$$

Damit folgt

$$\underbrace{(1-L)}_{>0} \underbrace{\|x - x'\|}_{\geq 0} \leq 0 \implies \|x - x'\| = 0 \implies x = x'.$$

(ii) $g(M) = M \implies x^{(k)} = g(x^{(k-1)})$, $k \in \mathbb{N}$ ist wohldefiniert, d.h. $x^{(k)} \in M$, $\forall k \in \mathbb{N}$, falls $x^{(0)} \in M$.

Z.z.: $x^{(k)}$ konvergiert mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \in M$, also g.z.z.: $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

$$\begin{aligned} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| &= \|g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})\| \\ &\leq L\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \\ &= L\|g(x^{(k-1)}) - g(x^{(k-2)})\| \\ &\leq L \cdot L \cdot \|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\| \\ &\leq \underbrace{L \cdot \dots \cdot L}_k \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &= L^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \end{aligned}$$

Seien k, m beliebig. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| &= \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)} + x^{(k+m-1)} - \dots - x^{(k+1)} + x^{(k)}\| \\ &\leq \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}\| + \dots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &= L^{m-1}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + L^{m-2}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \dots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &= (L^{m-1} + L^{m-2} + \dots + 1) \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &= \frac{1-L^m}{1-L} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &\leq \frac{1-L^m}{1-L} L^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &\leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &\stackrel{L < 1}{<} \varepsilon \quad \text{für } k \text{ groß genug.} \end{aligned}$$

Also ist $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M und es existiert ein $x^* \in M$, s.d. $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x^* konvergiert. x^* ist ein Fixpunkt von g , weil

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x^{(k-1)}) \stackrel{g \text{ stetig}}{=} g\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k-1)}\right) = g(x^*).$$

(iii) Für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\| \underbrace{x^{(k+m)}}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} x^*} - x^{(k)} \| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \implies \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

□

Bemerkung 0.3. Für den Beweis ist wichtig, dass der grundlegende Raum vollständig ist, d.h. dass alle Cauchy-Folgen in diesem Raum konvergieren.

Bemerkung 0.4 (Anwendung: Lineare Gleichungssysteme). $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär und $b = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$. Da A regulär, hat das LGS $Ax = b$ genau eine Lösung $x^* = A^{-1}b$. Sei $g(x) := x - \sigma(Ax - b)$ mit $\sigma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Fixpunktiteration $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \sigma(Ax^{(k-1)} - b)$, $k \in \mathbb{N}$ konvergiert, wenn g kontraktiv ist. Zum Beispiel in ℓ_2 :

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\|_2 &= \|x - \sigma(Ax - b) - y + \sigma(Ay - b)\|_2 \\ &= \|x - y - \sigma A(x - y)\|_2 \\ &= \|(\mathbb{I} - \sigma A)(x - y)\|_2 \\ &\leq \|\mathbb{I} - \sigma A\|_2 \|x - y\|_2, \end{aligned}$$

d.h. g kontraktiv, falls $\|\mathbb{I} - \sigma A\|_2 < 1$.

Frage: Wahl von σ ? Wähle $\sigma = \|A\|_\infty^{-1} = \frac{1}{\|A\|_\infty}$, falls A hermitesch und positiv definit (= „Richardson Iteration“). Zu überprüfen $\left\| \mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty} \right\|_2 < 1$. Da A positiv definit und hermitesch, sind alle Eigenwerte $\lambda > 0$. Es gilt $\forall$ EW: $0 < \lambda \leq \|A\|_\infty$. Für EW von $\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty}$ gilt $\mu = 1 - \frac{\lambda}{\|A\|_\infty}$, λ Eigenwert von A . Also $0 \leq \underbrace{1 - \frac{\lambda}{\|A\|_\infty}}_{=\mu} < 1$, also $\left\| \underbrace{\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty}}_{\substack{\text{hermitesch} \\ \text{Spektralnorm}}} \right\|_2 < 1$. Falls A hermitesch und

positiv definit, ist also die Richardson Iteration konvergent.

Definition 0.5 (Starke Monotonie). Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt stark monoton, wenn eine Konstante $m > 0$ existiert, s.d. $\forall x, y \in D$ gilt

$$(f(x) - f(y), x - y)_2 \geq m \|x - y\|_2^2.$$

Bemerkung 0.6 (Anwendung: Nichtlineare Gleichungssysteme). Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig mit L und stark monoton mit $m > 0$. Betrachte $f(x) = b$, $g(x) := x - \theta(f(x) - b)$.

Frage: Wahl von θ , s.d. $\forall x^{(0)} \in D$ die Fixpunktiteration konvergiert? Es ist

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\|_2^2 &= \|x - \theta(f(x) - b) - y + \theta(f(y) - b)\|_2^2 \\ &= \|x - y - \theta(f(x) - f(y))\|_2^2 \\ &= \|x - y\|_2^2 - 2\theta(x - y, f(x) - f(y))_2 + \theta^2 \|f(x) - f(y)\|_2^2 \\ &\leq \|x - y\|_2^2 - 2\theta m \|x - y\|_2^2 + \theta^2 L^2 \|x - y\|_2^2 \\ &= (1 - 2\theta m + \theta^2 L^2) \|x - y\|_2^2. \end{aligned}$$

Die Fixpunktiteration konvergiert, falls $1 - 2\theta m + \theta^2 L^2 < 1$, d.h. für $\theta \in (0, \frac{2m}{L^2})$. Dann existiert ein $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ mit $g(x^*) = x^*$. Ist x^* eindeutig? Seien x, x' zwei Lösungen. Dann ist

$$\begin{aligned}
 0 &= \underbrace{(f(x) - b + b - f(x'))}_{=0}, x - x')_2 \\
 &= (f(x) - f(x'), x - x')_2 \\
 &\stackrel{f \text{ stark monoton}}{\geq} m \|x - x'\|_2^2 \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Also $x = x'$, damit ist x^* eindeutig.