

Kapitel 1

Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

1.1 Explizite Differentialgleichungen

Differentialgleichungen (DGLn) sind Gleichungen der Form

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{implizite Form}$$

oder

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{explizite Form}$$

für eine gesuchte Funktion $y = y(t)$, $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ „Zeitintervall“. Differentialgleichungen n -ter Ordnung sind äquivalent zu speziellen Systemen von Differentialgleichungen 1. Ordnung. Betrachte $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (sei $y: I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$). Definiere Hilfsvariablen:

$$\begin{aligned} x_1 &:= y \\ x_2 &:= y' \\ &\vdots \\ x_n &:= y^{(n-1)}, \end{aligned}$$

also $x \in \mathbb{R}^n$. Ein äquivalentes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung ist dann

$$x' = \tilde{f}(t, x), \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(t, x) \end{pmatrix}$$

Ein allgemeines System von Differentialgleichungen 1. Ordnung hat die Form

$$x' = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n$$

Notationen: $x' = f(t, x)$, $\dot{x} = f(t, x)$, $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ (Dynamischer Prozess, der sich mit der Zeit ändert.)

Beispiel 1.1. 1. einfache lineare Differentialgleichung

$$x' = \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

hat die Lösung $x(t) = c \cdot e^{\alpha t}$, da

$$\frac{df}{dt} = c \cdot e^{\alpha t} \cdot \alpha = \alpha \cdot x(t)$$

2. Newton: Kraft = Masse · Beschleunigung.

$y(t) \in \mathbb{R}$	Ort eines Massenpunktes zur Zeit t
$y'(t) \in \mathbb{R}$	Geschwindigkeit
$y''(t) \in \mathbb{R}$	Beschleunigung

Kraftfunktion: $f(t, y, y') \in \mathbb{R}$.

$$my'' = f(t, y, y') \quad \text{DGL 2. Ordnung}$$

äquivalent zum System:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 & \text{mit } x_1 &= y, \\ x'_2 &= \frac{1}{m} f(t, x_1, x_2) & x_2 &= y' \end{aligned}$$

3. Räuber-Beute-Gleichungen (Lotka-Volterra-Gleichungen)

$N_1 = N_1(t)$	Anzahl von Beute
$N_2 = N_2(t)$	Anzahl von Räuber
$N'_1 = \alpha N_1 - \beta N_1 N_2$	$\alpha > 0$ Reproduktionsrate der Beute
	$\beta > 0$ Fressrate der Räuber pro Beute
$N'_2 = -\gamma N_2 + \delta N_1 N_2$	$\gamma > 0$ Sterberate der Räuber, wenn keine Beute vorhanden ist
	$\delta > 0$ Reproduktionsrate der Räuber pro Beute

4. SIR - Modell aus Epidemiologie (z.B. Corona):

succeptible	infected	removed
$S(t)$	$I(t)$	$R(t)$

$$\begin{aligned} N &= I + S + R \\ \frac{dS}{dt} &= \nu N - \beta \frac{SI}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \end{aligned}$$

Dabei sei

γ die Rate, mit der Infizierte genesen oder sterben,

μ die allgemeine Sterberate pro Person,

ν die Geburtsrate pro Person,

β die Anzahl neuer Infektionen, die ein erster infektiöser Fall pro Zeit verursacht und

$\frac{\beta}{N}$ die Transmissionsrate.

Definition 1.2 (System erster Ordnung). Sei $D = I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt

$$y' = f(t, y) \quad (\star)$$

ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Eine Lösung von $(\star)$ ist eine differenzierbare Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

(a) $\text{Graph}(y) := \{(t, y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \in I\} \subset D$ und

(b) $y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I$.

Bemerkung 1.3. $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ Dann ist

$$(\star) \Leftrightarrow y'_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$y'_n = f_n(t, y_1, \dots, y_n)$$

Definition 1.4 (Anfangswertaufgabe/Anfangswertproblem). AWA zu $(\star)$ ist:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \quad t \in I \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad \text{Anfangsbedingung}$$

Gesucht wird eine differenzierbare Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ derart, dass

(a) $\text{Graph}(y) \subset D$

(b) $y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I$

(c) $y(t_0) = y_0$

Satz 1.5 (DGL $\leftrightarrow$ Integralgleichung). Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in D$ und $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $\text{Graph}(y) \subset D$, $t_0 \in I$. Dann gilt

$$y \text{ löst AWA } y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad \forall t \in I$$

Beweis. " $\Rightarrow$ ". Sei y eine Lösung von AWA. Dann ist y diffbar mit $y'(t) = f(t, y(t))$.

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds = \int_{t_0}^t y'(s) \, ds \stackrel{\text{HDI}}{=} y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0.$$

" $\Leftarrow$ ". Sei die Integralgleichung erfüllt. Falls $t = t_0 \Rightarrow y(t_0) = y_0 \Rightarrow$ (c). Aus dem HDI folgt komponentenweise $y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow y$ löst AWA. $\square$

1.2 Anfangswertaufgaben: Existenz von Lösungen

Satz 1.6 (Existenzsatz von Peano).

Die Funktion $f(t, x)$ sei stetig auf dem $(n + 1)$ -dimensionalen Zylinder

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq \alpha, \|x - y_0\| \leq \beta\}$$

Dann existiert eine Lösung $y(t)$ von AWA auf dem Intervall $I := [t_0 - T, t_0 + T]$ mit

$$T := \min_{y(t)} \left\{ \alpha, \frac{\beta}{M} \right\}, \quad M := \max_{(t, x) \in D} \|f(t, x)\|$$

Reminder:

1. Gleichmäßige Stetigkeit:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

ist gleichmäßig stetig in D , falls $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, sodass $\forall x, x_0 \in D$ gilt

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

2. Gleichgradige Stetigkeit: Sei $\mathcal{F} \subset C[a, b]$. Dann ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, sodass $\forall f \in \mathcal{F}$ gilt

$$\forall t, t' \in [a, b], |t - t'| < \delta \implies \|f(t) - f(t')\| < \varepsilon$$

3. Satz von Arzela-Ascoli: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C[a, b]$, die gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist, d.h.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$$

und

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}: \max_{\substack{t, t' \in [a, b] \\ |t - t'| \leq \delta}} \|f_n(t) - f_n(t')\| < \varepsilon.$$

Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, welche gegen $f \in C[a, b]$ konvergiert, d.h.

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty \rightarrow 0$$

4. Dreiecksungleichung für Integrale. Sei $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann

$$\left\| \int_a^b y(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|y(t)\| \, dt,$$

hier:

$$\int_a^b y(t) \, dt := \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(t) \, dt \\ \vdots \\ \int_a^b y_n(t) \, dt \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. (Satz von Peano)

Idee: Konstruiere eine Folge stetiger Funktionen (Eulersches Polygonzugverfahren). Aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt dann, dass es eine Teilfolge gibt, die gegen eine Lösung von AWA konvergiert.

O.B.d.A. betrachte Halbointervall $I = [t_0, t_0 + T]$. Sei $h > 0$ Schrittweitenparameter ($h \rightarrow 0$). Wähle eine äquidistante Unterteilung des Intervalls I .

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T, \quad h = |t_k - t_{k-1}|$$

Eulersches Polygonzugverfahren:

- Starte mit $y_0^h := y_0$.
- Für $n \geq 1$, berechne $y_n^h = y_{n-1}^h + hf(t_{n-1}, y_{n-1}^h)$.

Definiere die stückweise lineare Funktion $y^h(t)$

$$y^h(t) := y_{n-1}^h + (t - t_{n-1})f(t_{n-1}, y_{n-1}^h), \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad \forall n \geq 1$$

- 1) **z.Z.** dass dieses Verfahren durchführbar ist, d.h. $\text{Graph}(y^h) \subset D$. Sei $(t, y^h(t)) \subset D$ für $t_0 \leq t \leq t_{k-1}$. Dann gilt

$$\underbrace{(y^h(t))'}_{:= \frac{dy^h(t)}{dt}} \equiv f(t_{k-1}, y_{k-1}^h), \quad t \in [t_{k-1}, t_k]$$

Nach Konstruktion gilt für $t \in [t_{k-1}, t_k]$:

$$\begin{aligned} y^h(t) - y_0 &= y^h(t) - y_{k-1}^h + y_{k-1}^h - y_{k-2}^h + \cdots + y_1^h - y_0^h \\ &= y^h(t) - y_{k-1}^h + \sum_{i=1}^{k-1} (y_i^h - y_{i-1}^h) \\ &= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) + \sum_{i=1}^{k-1} h \cdot f(t_{i-1}, y_{i-1}^h) \\ \implies \|y^h(t) - y_0\| &\leq (t - t_{k-1}) \|f(t_{k-1}, y_{k-1}^h)\| + h \sum_{i=1}^{k-1} \|f(t_{i-1}, y_{i-1}^h)\| \\ &\leq (t - t_{k-1}) \cdot M + \underbrace{h(k-1)}_{= t_{k-1} - t_0} \cdot M \\ &= (t - t_0) \cdot M \\ &\leq T \cdot M \\ &= \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{M} \right\} \cdot M \\ &\leq \beta \end{aligned}$$

Also ist $(t, y^h(t)) \in D$ für $t_{k-1} \leq t \leq t_k$. Mit Annahme folgt $(t, y^h(t)) \in D$ für $t_0 \leq t \leq t_k \implies \text{Graph}(y^h) \subset D$.

- 2) (a) **z.Z.** dass die Funktionenfamilie $\{y^h\}_{h>0}$ gleichgradig stetig ist. Seien dafür $t, t' \in I$, $t' \leq t$ beliebig mit $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $t' \in [t_{j-1}, t_j]$ für ein $t_j \leq t_k$.
- $t, t' \in [t_{k-1}, t_k]$:

$$\begin{aligned} y^h(t) - y^h(t') &= y_{k-1}^h + (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) \\ &\quad - (y_{k-1}^h + (t' - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h)) \\ &= (t - t')f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) \\ \implies \|y^h(t) - y^h(t')\| &\leq |t - t'| \cdot M \end{aligned}$$

- $t_j < t_k$:

$$\begin{aligned}
y^h(t) - y^h(t') &= y^h(t) - y_{k-1}^h + y_{k-2}^h - \cdots - y_{j-1}^h + y_{j-1}^h - y^h(t') \\
&= y^h(t) - y_{k-1}^h + \sum_{i=j}^{k-1} (y_i^h - y_{i-1}^h) + y_{j-1}^h - y^h(t') \\
&= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) + \sum_{i=j}^{k-1} hf(t_{i-1}, y_{i-1}^h) \\
&\quad + (t_{j-1} - t')f(t_{j-1}, y_{j-1}^h) \\
&= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) + \sum_{i=j+1}^{k-1} hf(t_{i-1}, y_{i-1}^h) \\
&\quad + hf(t_{j-1}, y_{j-1}^h) + (t_{j-1} - t')f(t_{j-1}, y_{j-1}^h) \\
&= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, y_{k-1}^h) + h \sum_{i=j+1}^{k-1} f(t_{i-1}, y_{i-1}^h) \\
&\quad + \underbrace{(h + t_{j-1} - t')}_{t_j} f(t_{j-1}, y_{j-1}^h)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|y^h(t) - y^h(t')\| \leq (t - t_{k-1})M + (t_{k-1} - t_j)M + (t_j - t')M = |t - t'|M$$

Wählt man für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ also $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, so gilt $\forall h$

$$|t - t'| < \delta \implies \|y^h(t) - y^h(t')\| < \varepsilon$$

Daher ist $\{y^h\}_{h>0}$ gleichgradig stetig (sogar gleichgradig Lipschitz-stetig).

- (b) **z.Z.** y^h ist gleichmäßig beschränkt. Es gilt $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned}
\|y^h(t)\| &= \|y^h(t) - \underbrace{y_0}_{y^h(t_0)=y_0} + y_0\| \\
&\leq \underbrace{\|y^h(t) - y_0\|}_{\text{siehe 1)}} + \|y_0\| \\
&\leq M \cdot T + \|y_0\|
\end{aligned}$$

Also ist y^h gleichmäßig beschränkt.

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert eine Nullfolge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und eine stetige Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ so dass

$$\max_{t \in I} \|y^{h_i} - y(t)\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

Offenbar ist $\text{Graph}(y) \subset D$.

- 3) **z.Z.** $y(t)$ erfüllt die Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ oder äquivalent dazu: $y(t)$ erfüllt die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds$$

□