

0.1 Lineare Abbildungen auf dem K^n

Definition 0.1 (Lineare Abbildung). Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ heißt linear, falls $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

Bemerkung 0.2. Eine lineare Abbildung lässt sich als Matrix darstellen. Betrachte $x \in \mathbb{K}^n$ und euklidische/kartesische Basis $e^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$. Dann $\exists!$ Darstellung von x bezüglich der Basis

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e^{(i)}.$$

Die Koeffizienten $x_i, i = 1, \dots, n$ sind Koordinaten. Wir definieren Koordinatenvektor $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \varphi(e^{(i)}).$$

$\varphi(x)$ hat auch eine (eindeutige) Darstellung bzgl. Basis in $\mathbb{K}^m$.

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m \underbrace{\varphi_j(x)}_* \cdot e^{(j)} = \sum_{j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i \overbrace{\varphi_j(e^{(i)})}^{a_{ji}} \right)}_{=\varphi_j(x)} \cdot e^{(j)}$$

(*) Koordinaten von $\varphi_j(x)$ bzgl. Basis $e^{(j)}, j = 1, \dots, m$

Dabei sind die $\varphi_j(x)$ Koordinaten und der Koordinatenvektor ist $\hat{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$. Dann erhalten wir eine Matrix

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(e^{(1)}) & \dots & \varphi_1(e^{(n)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_m(e^{(1)}) & \dots & \varphi_m(e^{(n)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

Für einen Koordinatenvektor bezüglich Basis $e^{(j)}$ gilt

$$\varphi(x) = (A\hat{x})_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i, \quad j = 1, \dots, m$$

Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ lässt sich bezüglich festgelegter Basen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ eindeutig durch die Matrix $A \in K^{m \times n}$ beschreiben.

$$\hat{\varphi}(x) = A\hat{x}, \quad x \in \mathbb{K}^n$$

Im folgenden wird der Punkt x mit seiner speziellen kartesischen Darstellung $\hat{x}$ identifiziert. Konvention: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

- Anzahl an Zeilen m = Dimension des Bildraums $\mathbb{K}^m$

- Anzahl an Spalten n = Dimension des Urbildraums $\mathbb{K}^n$

Falls $m = n$ definiert $A \in K^{n \times n}$ eine lineare Abbildung in $\mathbb{K}^n$.

Lemma 0.3 (Lineare Abbildungen in $\mathbb{K}^n$). Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. A ist regulär
2. $Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\forall b \in \mathbb{K}^n$ (Bijektivität der linearen Abbildung)
3. $Ax = 0$ hat nur eine Lösung $x = 0$ (Injektivität)
4. $Ax = b$ ist $\forall b \in \mathbb{K}^n$ lösbar (Surjektivität)
5. $\text{Rang}(A) = n$
6. $\det(A) \neq 0$
7. Alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A sind ungleich Null
8. Die (komplex) transponierte Matrix $\bar{A}^T$ ist regulär.

Weitere Begriffe und Eigenschaften

- $A, A' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind **identisch** ($a_{ij} = a'_{ij} \forall i, j$) $\Leftrightarrow Ax = A'x \forall x \in \mathbb{K}^n$
- $A, A' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind **ähnlich**, wenn $\exists T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär, sodass

$$A' = T^{-1}AT$$

Übergang $A \rightarrow A'$ heißt Ähnlichkeitstransformation und es gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \underbrace{\det(A' - z\mathbb{I})}_{\substack{\text{Charakt. Polynom für } A' \\ \text{Nullstellen} = \text{EW von } A'}} &= \det \left(T^{-1}AT - z \underbrace{T^{-1}T}_{=\mathbb{I}} \right) \\ &= \det(T^{-1}(A - z\mathbb{I})T) \\ &\stackrel{\det(AB)=\det(A)\det(B)}{=} \det(T^{-1}) \det(A - z\mathbb{I}) \det(T) \\ &\stackrel{\det(T^{-1})\det(T)=1=\det(\mathbb{I})}{=} \underbrace{\det(A - z\mathbb{I})}_{\text{char. Pol. von } A} \end{aligned}$$

Ähnliche Matrizen haben also die gleichen Eigenwerte, aber im Allgemeinen unterschiedliche Eigenvektoren.

- $n \times n$ Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ bilden einen Vektorraum.
- **Konvergenz** von Folgen von Matrizen ist komponentenweise Konvergenz

$$A^{(k)} \rightarrow A, k \rightarrow \infty \Leftrightarrow a_{ij}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$$

- Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Dann

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n} \|Ax\| \quad \text{für } \|x\| = 1$$

ist die von $\|\cdot\|$ in $\mathbb{K}^n$ erzeugte natürliche **Matrixnorm**

- Für natürliche Matrixnorm gilt notwendig $\|\mathbb{I}\| = 1$
- Natürliche Matrixnorm ist verträglich mit $\|\cdot\|$, d.h. für $A \in K^{n \times n}$ ist $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, $x \in \mathbb{K}^n$
- und submultiplikativ, d.h. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Beispiel 0.4. $\|A\|_F = \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ heißt **Frobenius**-Norm. Sie ist verträglich mit $\|\cdot\|_2$ in $\mathbb{K}^n$ und submultiplikativ, aber keine natürliche Matrixnorm, weil $\|\mathbb{I}\|_F = \sqrt{n} \neq 1$ für $n \geq 2$.

Lemma 0.5 (Natürliche Matrixnormen). Die natürlichen Matrixnormen zu $\|\cdot\|_\infty$ (ℓ_∞ / Maximumnorm) und $\|\cdot\|_1$ (ℓ_1 -Norm) in $\mathbb{K}^n$ sind

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{Maximale Zeilen-Summen-Norm}$$

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{Maximale Spalten-Summen-Norm}$$

Beweis. 1. Matrixnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm (d.h. erfüllt Normeigenschaften (N1), (N2) und (N3))

2. Z.z. Verträglichkeit

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \right) \leq \|x\|_\infty \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \|x\|_\infty \cdot \|A\|_\infty$$

$\implies$ Verträglichkeit mit $\|\cdot\|_\infty$

3. Z.Z. $\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$

$$\|Ax\|_\infty = 0 \implies A = 0 \implies \|A\|_\infty = 0 = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$$

Sei $A \neq 0$, dann $\|A\|_\infty > 0$ (Definitheit von Normen). Sei

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{mj}| \text{ für ein } m \in \{1, \dots, n\}.$$

Setze $z_j = \frac{|a_{mj}|}{a_{mj}}$, falls $a_{mj} \neq 0$ und sonst $z_j = 0$. ($z_j = \text{sign}(a_{mj})$). Für $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ gilt

dann $\|z\|_\infty = 1$ und

$$(Az)_m = \sum_{j=1}^n a_{mj} z_j = \sum_{j=1}^n |a_{mj}| = \|A\|_\infty.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= (Az)_m \leq \|Az\|_\infty \leq \sup_{\|y\|_\infty=1} \|Ay\|_\infty \leq \sup_{\|y\|_\infty=1} \|A\|_\infty \cdot \underbrace{\|y\|_\infty}_{=1} = \|A\|_\infty \\ &\implies \|A\|_\infty = \sup_{\|y\|_\infty=1} \|Ay\|_\infty \end{aligned}$$

Beweis für ℓ_1 analog. □

Definition 0.6. 1. Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{K}$ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ = Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$$

2. $\sigma(A) = \{\lambda \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$ heißt **Spektrum** von A .

3. $\forall \lambda \in \sigma(A) \exists$ Eigenvektor $w \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$:

$$Aw = \lambda w$$

Die Eigenvektoren zu λ bilden einen Vektorraum, den **Eigenraum** zu λ mit Dimension = **geometrische Vielfachheit** von λ .

4. Abschätzung der Eigenwerte: Sei $\lambda \in \sigma(A)$ und w ein Eigenvektor zu λ mit $\|w\| = 1$.
Dann $|\lambda| = |\lambda| \cdot \|w\| = \|\lambda w\| = \|Aw\| \underset{\text{Verträglichkeit}}{\leq} \|A\| \cdot \|w\| = \|A\| \implies |\lambda| \leq \|A\|$

5. A heißt **hermitesch**, falls gilt

$$A = \bar{A}^T \quad (a_{ij} = \overline{a_{ji}})$$

Reelle hermitesche Matrizen heißen **symmetrisch**. Für das Skalarprodukt gilt

$$A = \bar{A}^T \Leftrightarrow (Ax, y)_2 = (x, Ay)_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

Hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar = ähnlich zu einer Diagonalmatrix, alle Eigenwerte einer hermiteschen Matrix sind reell. $\exists$ eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren.

6. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt **positiv definit**, wenn gilt $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}$, $(Ax, x)_2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.
Eine hermitesche Matrix ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv.

7. $\|\cdot\|_2$ (ℓ_2 -Norm) im $\mathbb{K}^n$ erzeugt eine natürliche **Matrixnorm (Spektralnrm)** $\|\cdot\|_2$

Lemma 0.7 (Spektralnrm). Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann ist $\bar{A}^T A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch und positiv semidefinit. Für die Spektralnrm gilt

$$\|A\|_2 = \max \left\{ \sqrt{|\lambda|}, \lambda \in \sigma(\bar{A}^T A) \right\}$$

Sei A hermitesch, bzw. symmetrisch, dann gilt $\|A\|_2 = \max\{\sqrt{|\lambda|}, \lambda \in \sigma(A)\}$

Beweis. 1) $\bar{A}^T A$ hermitesch, denn

$$\overline{(\bar{A}^T A)^T} = (A^T \bar{A})^T = \bar{A}^T A.$$

$\bar{A}^T A$ positiv semidefinit, denn

$$(\bar{A}^T A x, x)_2 = (A x, A x)_2 = \|A x\|_2^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

2) Es ist nach Definition

$$\|A\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|A x\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} (A x, A x)_2 = \sup_{\|x\|_2=1} (x, \bar{A}^T A x)_2.$$

Wegen (1) ist $\bar{A}^T A$ hermitesch und positiv semidefinit, d.h. es ex. $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit U unitär und $U^T \bar{A}^T A U = D$, wobei $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda \in \sigma(\bar{A}^T A)$ und $\lambda_i \geq 0$ reell.

Sei $y = \bar{U}^T x = U^{-1}x \implies x = Uy$. Damit folgt mit $|\lambda_{\max}| := \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \in \sigma(\bar{A}^T A)\}$

$$\begin{aligned}
 \|A\|_2^2 &= \sup_{\|x\|_2=1} (x, \bar{A}^T A x)_2 \\
 &= \sup_{\|Uy\|_2=1} \underbrace{(Uy, \bar{A}^T A Uy)}_{=x} \underbrace{(Uy, Uy)}_{=x} \\
 &= \sup_{\|y\|_2=1} (y, \underbrace{\bar{U}^T \bar{A}^T A U}_{=D} y)_2 \\
 &= \sup_{\|y\|_2=1} (y, Dy)_2 \\
 &= \sup_{\|y\|_2=1} \underbrace{(\lambda_1 |y_1|^2 + \dots + \lambda_n |y_n|^2)}_{=\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2} \\
 &\leq \sup_{\|y\|_2=1} \sum_{i=1}^n |\lambda_{\max}| |y_i|^2 \\
 &= |\lambda_{\max}| \sup_{\|y\|_2=1} \|y\|_2^2 \\
 &= |\lambda_{\max}|.
 \end{aligned}$$

Sei y Eigenvektor zu $\lambda_{\max}$ und $\|y\|_2 = 1$. Dann gilt $Dy = \lambda_{\max} y$, also $(y, Dy)_2 = \lambda_{\max} \underbrace{(y, y)_2}_{=1}$. Damit existiert ein y , s.d. $(y, Dy)_2 = \lambda_{\max}$. Also folgt $\sup_{\|y\|_2=1} (y, Dy)_2 = \lambda_{\max}$.

Damit folgt die Behauptung für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Behauptung für A hermitesch analog.

□

Definition 0.8 (orthonormale/unitäre Matrizen). Eine Matrix $Q \in \mathbb{K}^{m \times n}$ heißt **orthonormal**, wenn ihre Spaltenvektoren ein Orthonormalsystem im $\mathbb{K}^m$ bilden, d.h.

$$\begin{aligned}
 Q &= (q_1, \dots, q_n) \quad q_j \in \mathbb{K}^m \\
 (q_i, q_j)_2 &= \sum_{k=1}^m q_{ik} \cdot \overline{q_{kj}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Falls $m = n$ heißt Q unitär.

Lemma 0.9. Sei $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitär. Dann ist Q regulär, $Q^{-1} = \bar{Q}^T$ und $(Qx, Qy)_2 = (x, y)_2$, $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2, \quad x \in \mathbb{K}^n$$

d.h. euklidisches Skalarprodukt und euklidische Norm sind invariant unter unitären Transformationen und folglich $\|Q\|_2 = \|Q^{-1}\|_2 = 1$

Beweis. 1. Z.Z. $Q^{-1} = \bar{Q}^T$

Sei $Q = (q_1, \dots, q_n)$, $\bar{Q}^T = \begin{pmatrix} \bar{q}_1^T \\ \vdots \\ \bar{q}_n^T \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\bar{Q}^T \cdot Q = \begin{pmatrix} \bar{q}_1^T \cdot q_1 & \dots & \bar{q}_1^T \cdot q_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{q}_n^T \cdot q_1 & \dots & \bar{q}_n^T \cdot q_n \end{pmatrix} \stackrel{Q \text{ unitär}}{=} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}
(Qx, Qy)_2 &= (x, \overline{Q}^T Qy)_2 = (x, y)_2 \\
\|Qx\|_2^2 &= (Qx, Qx)_2 = (x, x)_2 = \|x\|_2^2 \\
\|Q\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1 \\
\|Q^{-1}\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Q^{-1}x\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|QQ^{-1}x\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1
\end{aligned}$$

□