

Analysis II

Prof. Dr. Ekaterina Kostina

SoSe 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Folgen und Reihen von Funktionen	3
1.1	Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz	3
1.2	Der Funktionenraum $C[a, b]$	5
1.3	Integration und Grenzübergänge	6
1.4	Der Funktionen-Raum $R[a, b]$	8
1.5	Fourier-Entwicklung	13
2	Der n-dimensionale Zahlenraum K^n	24
2.1	Der euklidische Raum K^n	24
2.2	Teilmengen in K^n (Topologische Grundbegriffe)	27
2.3	Geometrie in K^n	33
2.4	Lineare Abbildungen auf dem K^n	38
3	Funktionen mehrerer Variablen	44
3.1	Stetigkeit	44
3.2	Vektor- und Matrixwertige Funktionen	49
3.2.1	Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme	50
4	Differenzierbare Funktionen in $\mathbb{R}^n$	53
4.1	Partielle Differenzierbarkeit	53

Kapitel 1

Folgen und Reihen von Funktionen

1.1 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Definition 1.1. Sei für $n \in \mathbb{N}$, $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ falls $\forall x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, x) > 0 \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Beispiel 1.2. (a)

$$f_n(x): [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, 2]$.

$$x = 0: f_n(0) = 0 = f(0)$$

$$0 < x \leq 2: \forall n \geq \frac{2}{x}, f_n(x) = 0 = f(x)$$

(b) $f_n(x) = x^n$, $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\text{punktweise}]{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Bemerkung 1.3. Punktweiser Limes stetiger Funktionen muss nicht stetig sein.

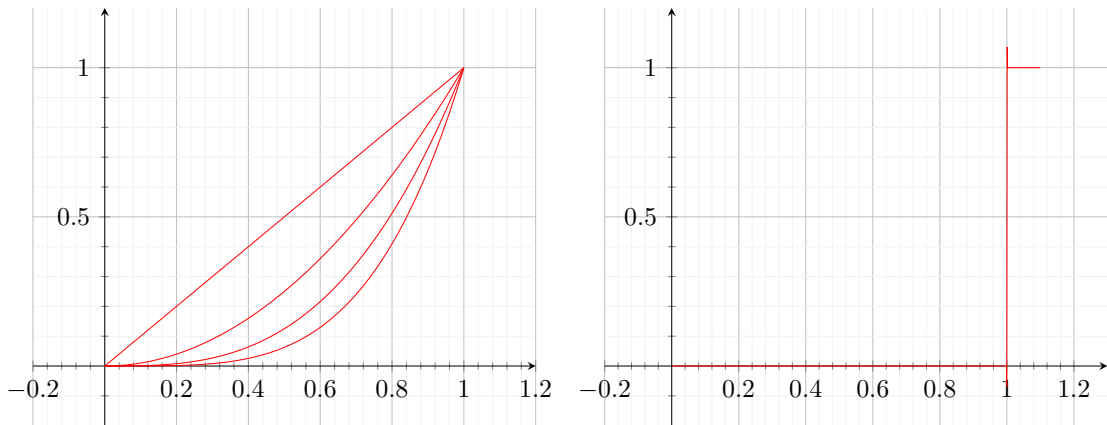
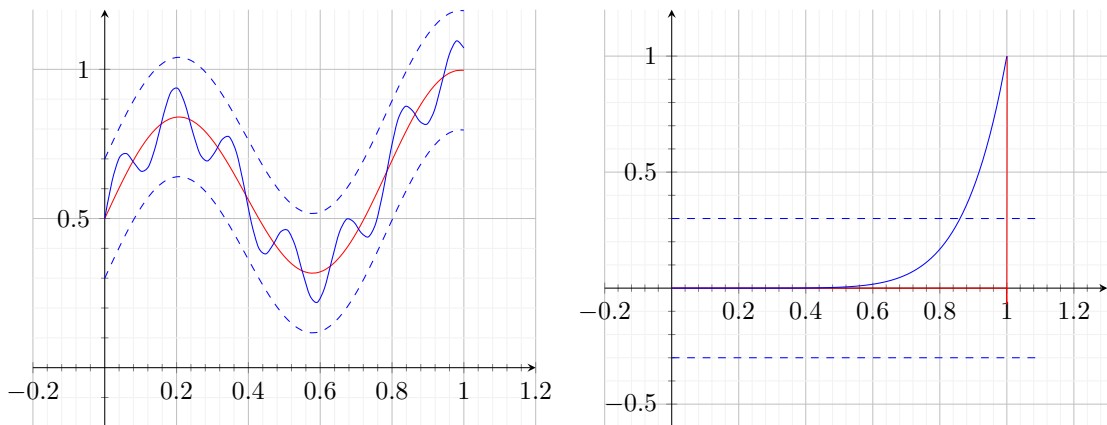
Definition 1.4. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ und } n \geq N.$$

Bemerkung 1.5. $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n \geq N$ gilt

$$\text{graph}(f_n) \subset \varepsilon\text{-Umgebung von Graphen von } f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid |y - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Beispiele 1.2 (a) und (b) nicht gleichmäßig konvergent, zu (a): Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gilt $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = n > \frac{1}{2}$

Abbildung 1.1: $f_n(x) = x^n$ und ihre GrenzfunktionAbbildung 1.2: Links: „ ε -Schlauch“, Rechts: 1.2 (b) nicht gleichmäßig konvergent

Beispiel 1.6. $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(2\pi n \cdot x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = 0$.

$$|\sin(2\pi n \cdot x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in [0, 2] \implies \text{punktweise Konvergenz.}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Damit folgt

$$\forall n \geq N \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \forall x \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

Bemerkung 1.7. Konvergiert $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, dann konvergiert f_n punktweise gegen f . Die Umkehrung gilt nicht, siehe 1.2 (a) und (b).

Satz 1.8 (Gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ stetig in D . Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt: f ist stetig in D .

Beweis. Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Zu zeigen: $\exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n \rightarrow \infty} f \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \geq N \quad \forall x \in D \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$f_n \text{ stetig in } x_0 \implies \exists \delta \text{ s.d. } \forall x \in D \text{ gilt } |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zusammen: $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

1.2 Der Funktionenraum $C[a, b]$

Definition 1.9 (Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$). Es sei D ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) stetig. Dann

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Das Maximum existiert wegen der Stetigkeit des Absolutbetrags und weil $[a, b]$ beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz 1.10 ($\|\cdot\|_\infty$ und gleichmäßige Konvergenz). Es sei $D = [a, b]$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

- (i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \iff \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$
- (ii) Cauchy-Kriterium: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n, m \geq N_0$ gilt $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

Beweis. (i) „ $\implies$ “: Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in [a, b]$ und $\forall n \geq N$.
Damit folgt:

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \implies \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

„ $\impliedby$ “: Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \forall n \geq N$. Damit folgt $\forall n \geq N$ und $\forall x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

- (ii) „ $\implies$ “ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$, d.h. $\exists f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.d. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{gleichmäßig}} f$.

Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \forall n \geq N_0$ und $\forall x \in [a, b]$.

Damit gilt $\forall n, m \geq N_0$ und $\forall x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| &= \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_0. \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N_0 \quad \forall x \in [a, b].$$

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\implies$ Definiere $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in [a, b]$.

Dann gilt $\forall n \geq N_0$, $\forall x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichm\"a\ss{}ig gegen } f.$$

□

Bemerkung 1.11. $\|\cdot\|_\infty$ erf\"ullt s.g. Normeigenschaften:

(N1) $\|f\|_\infty = 0 \implies f(x) = 0, x \in [a, b]$ (Definitheit)

(N2) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (Homogenit\"at)

(N3) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (Dreiecksungleichung)

folgen direkt aus den Eigenschaften des Absolutbetrags.

Definition 1.12. Der Funktionenraum $C[a, b]$ definiert durch

$$C[a, b] := \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \},$$

ist mit $\|f\|_\infty$ ein normierter Vektorraum.

Satz 1.13 (Vollst\"andigkeit). Der Raum $C[a, b]$ ist vollst\"andig bez\"uglich gleichm\"a\ss{}iger Konvergenz, d.h. jede Cauchy-Folge von Funktionen aus $C[a, b]$ besitzt einen Limes in $C[a, b]$

Beweis. Rannacher

□

1.3 Integration und Grenzüberg\"ange

Wichtige Frage: Wenn $f_n \rightarrow f$, gilt dann auch $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$?

Satz 1.14. Seien $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Riemann-integrierbare Funktionen und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (gleichm\"a\ss{}ige Konvergenz). Dann gilt f stetig und Riemann-integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Beweis. $f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n \rightarrow \infty} f \implies f \text{ stetig} \implies f \text{ Riemann-integrierbar.}$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b - a) \\ &= \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \underbrace{(b - a)}_{\text{beschränkt}}. \end{aligned}$$

□

Satz 1.15. Seien $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen ($n \in \mathbb{N}$) und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig auf $[a, b]$, d.h. die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=0}^N f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gleichmäßig konvergent. Dann gilt:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

ist stetig und Riemann-integrierbar und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx \\ \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx, \end{aligned}$$

d.h. die Reihe wird gliedweise integriert.

Beweis. f_n sind stetig $\implies \sum_{n=0}^N f_n(x)$ stetig und Riemann-integrierbar.

Die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=0}^N f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ stetig} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N f_n(x) \right) \text{ gleichmäßiger Limes.}$$

Es gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx + \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall N \geq N_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) dx \right| &\leq \varepsilon \cdot (b - a) \\ \implies \left| \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx - \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx \right| &\leq \varepsilon \\ \implies \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \end{aligned}$$

□

Korrolar 1.16 (Integration von Potenzreihen). Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in jedem Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ für $0 < r < \rho$ gleichmäßig und für $[a, b] \subset]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \Big|_a^b.$$

Beweis. Nur die gleichmäßige Konvergenz für $|x-x_0| \leq r$ ist zu beweisen: Für $|x-x_0| \leq r$, $r < \rho$ gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho-\varepsilon} \right)^n \cdot r^n \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{r}{\rho-\varepsilon} \right)^n}_{<1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{geometrische Reihe}} 0. \end{aligned}$$

(*) : $\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, $r < \rho - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0 \implies \exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho-\varepsilon} \quad \forall n \geq N_0$ □

Jetzt: Fourier Analysis!

1.4 Der Funktionen-Raum $R[a, b]$

Definition 1.17. Eine $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, falls $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx.$$

Bemerkung 1.18. 1. Analog: Definitionen von uneigentlichen Riemann-integralen für komplexwertige Funktionen

2. Die Rechenregeln für das reelle Riemann-integral übertragen sich auf komplexwertige Integrale, insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{f(x)} dx &= \int_a^b (\operatorname{Re} f(x) - i \cdot \operatorname{Im} f(x)) dx \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx - i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx \\ &= \overline{\int_a^b f(x) dx}. \end{aligned}$$

Definition 1.19. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt stückweise stetig, falls

- 1) f in $[a, b]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig und beschränkt ist.
- 2) in jeder dieser Unstetigkeitsstellen $\xi \in [a, b]$ die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte

$$f(\xi_{\pm}) := \lim_{h \searrow 0} f(\xi \pm h).$$

existieren. Für $\xi \in (a, b)$ wird

$$f(\xi) := \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2}.$$

gesetzt.

Bemerkung 1.20. Stückweise stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Die Menge der in diesem Sinne auf $[a, b]$ stückweise stetigen (Riemann-integrierbaren) Funktionen bilden einen Vektorraum $R[a, b]$.

Definition 1.21. Wir definieren

$$(f, g) := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad (\text{„Sesquilinearform“}).$$

Dies ist wohldefiniert da für $f, g \in R[a, b]$ das Produkt $f(x) \cdot \overline{g(x)} \in R[a, b]$ ist.

Definition 1.22 (Skalarprodukt). Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt auf V , falls $\forall u, v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ (Symmetrie, hermitesch falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrisch falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

(S2) $\langle \alpha v, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle$
 $\langle v, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle$
 $\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$
 $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$

(S3) Positivdefinitheit: $\langle v, v \rangle \geq 0$
 $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

Bemerkung 1.23. Auf $R[a, b]$ besitzt $(\cdot, \cdot)$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts, denn es gilt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in R[a, b], f_1, f_2 \in R[a, b], g_1, g_2 \in R[a, b]$:

$$(1) (\alpha f_1 + \beta f_2, g) = (\alpha f_1, g) + (\beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)$$

$$(2) (f, \alpha g_1 + \beta g_2) = (f, \alpha g_1) + (f, \beta g_2) = \overline{\alpha}(f, g_1) + \overline{\beta}(f, g_2)$$

$$(3) (f, g) = \int_a^b f \cdot \overline{g} \, dx = \int_a^b \overline{\overline{f} g} \, dx = \overline{\int_a^b \overline{f} g \, dx} = \overline{\int_a^b g \overline{f} \, dx} = \overline{(g, f)}$$

$$(4) (f, f) = \int_a^b f \overline{f} \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \geq 0$$

(5) Aus (4) und der Definition von $R[a, b]$ folgt: $(f, f) = 0 \implies f \equiv 0$ auf $[a, b]$.

$(\cdot, \cdot)$ wird auf $R[a, b]$ L^2 -Skalarprodukt genannt.

Lemma 1.24. Für ein L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf $R[a, b]$ gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Beweis. 1) Falls $g \equiv 0$ gilt trivialerweise

$$|(f, g)|^2 = 0 = (f, f) \cdot (g, g).$$

2) Falls $g \not\equiv 0$, sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig

$$0 \leq (f + \alpha g, f + \alpha g) = (f, f) + \alpha(g, f) + \bar{\alpha}(f, g) + \alpha \cdot \bar{\alpha}(g, g).$$

Setze $\alpha := -\frac{(f, g)}{(g, g)} = -\frac{\overline{(g, f)}}{(g, g)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (f, f) - \frac{(f, g) \cdot (g, f)}{(g, g)} - \frac{(g, f) \cdot (f, g)}{(g, g)} + \frac{(f, g)(g, f)(g, g)}{(g, g)(g, g)} \\ &= (f, f) - \frac{(f, g)(g, f)}{(g, g)} \\ &= (f, f) - \frac{\overline{(f, g)}(f, g)}{(g, g)} \\ &= (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \\ \implies 0 &\leq (f, f)(g, g) - |(f, g)|^2. \end{aligned}$$

□

Definition 1.25 (L^2 -Norm). Das L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ induziert die L^2 -Norm auf $R[a, b]$ mit

$$\|f\| = \|f\|_{L^2} := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f \cdot \bar{f} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bemerkung 1.26. Normeigenschaften von L^2 auf $R[a, b]$ sind erfüllt:

(N1) Definitheit: $\|f\| = 0 \implies (f, f) = 0 \implies f = 0$ auf $[a, b]$

(N2) Homogenität: $\|\alpha f\| = (\alpha f, \alpha f)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 (f, f))^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|f\|$

(N3) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= (f + g, f + g)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|f\|^2 + (f, g) + (g, f) + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} (\|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Definition 1.27 (Konvergenz im Quadratischen Mittel (L^2 -Konvergenz)). Seien $f_n \in R[a, b], n \in \mathbb{N}, f \in R[a, b]$. f_n konvergiert gegen f im Quadratischen Mittel $f_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty} f$, wenn gilt

$$\|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Das heißt, dass die quadratische Abweichung zwischen f_n und f gegen Null konvergiert:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Bemerkung 1.28. (1) Es gilt:

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \|f_n - f\|_{\infty}^2 (b - a).$$

Damit folgt

$$\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Umkehrung gilt i.A. nicht! Beispiel: $f_n(x) := x^n, x \in [-1, 1]$

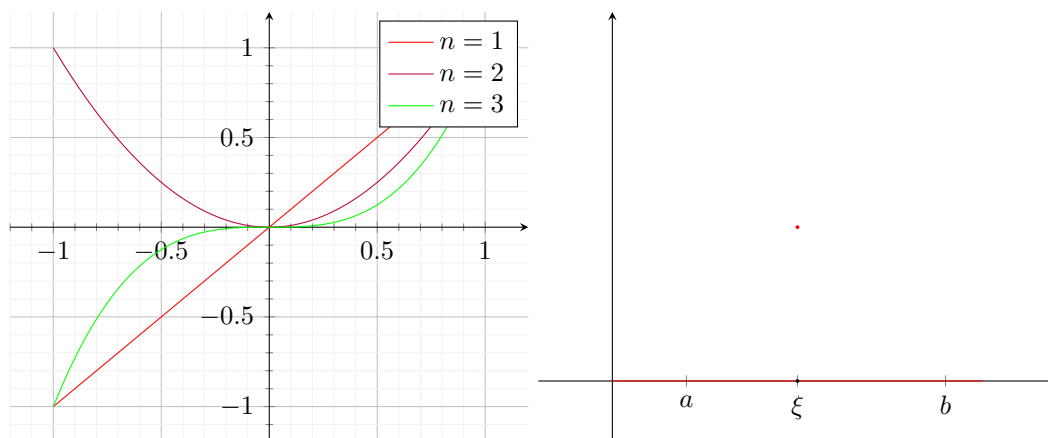


Abbildung 1.3: Links: $f_n(x) = x^n$, Rechts: $f(x) \not\equiv 0$

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 x^{2n} dx = 2 \int_0^1 x^{2n} dx = 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt $f_n \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty} f \equiv 0$.

Aber wegen $f_n(1) = 1$ für $x = 1, n \in \mathbb{N}$, konvergiert f_n nicht punktweise gegen $f \equiv 0$ und wegen $f_n(-1) = (-1)^n, n \in \mathbb{N}, x = -1$ konvergiert f_n nicht.

- (2) Der Raum $R[a, b]$ mit L^2 -Norm $\|\cdot\|$ ist **nicht vollständig**, d.h. es existieren Cauchy-Folgen in $R[a, b]$, die keinen Grenzwert in $R[a, b]$ haben. Beispiel: siehe Abb. 1.3 (Rechts). Hier ist $f(x) \not\equiv 0, x \in [a, b]$.

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 = \|f\|_{L^2},$$

aber $f(x) \notin R[a, b]$, denn

$$f(\xi) \neq 0 = \frac{\lim_{h \searrow 0} f(\xi + h) - \lim_{h \searrow 0} f(\xi - h)}{2}.$$

Definition 1.29 (Orthogonalität). $f, g \in R[a, b]$ heißen orthogonal, wenn gilt $(f, g) = 0$.

Eine Teilmenge $S \subset R[a, b]$ heißt Orthogonalsystem, wenn alle Elemente aus S paarweise orthogonal sind, d.h.

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} \|f_i\|^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall f_i, f_j \in S.$$

Satz 1.30. Die trigonometrischen Funktionen, für $k, l \in \mathbb{N}$

$$c_k(x) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \cos(kx) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_l(x) := \sin(lx)$$

bilden auf $R[a, b]$ bezüglich des L^2 -Skalarprodukts ein Orthogonalsystem und es gilt

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) dx = \int_0^{2\pi} s_l(x) dx = \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) dx = \pi \delta_{kl}$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) dx = \pi \delta_{kl}$$

Hier sei

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad \text{Kroneckersymbol.}$$

Beweis.

$$\int_0^{2\pi} c_k(x) dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx = \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k} (1 - 1) = 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) dx &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(lx)}_v dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx)}_u \cdot \underbrace{\sin(lx)}_v \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{k} \sin(kx)}_u \underbrace{l \cos(lx)}_{v'} dx \\ &\stackrel{=0}{=} \\ &= -\frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) c_l(x) dx \end{aligned}$$

Für $l = k$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) dx &= - \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) dx \\ \implies 2 \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) dx &= 0 \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x) s_k(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) dx \\ &\stackrel{l=k}{=} \int_0^{2\pi} c_k^2(x) dx = \int_0^{2\pi} s_k^2(x) dx = \int_0^{2\pi} (1 - c_k^2(x)) dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} c_k^2(x) dx \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k^2(x) dx &= \pi = \int_0^{2\pi} s_k^2(x) dx \end{aligned}$$

Wenn $k \neq l$, dann folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) dx &= \frac{l}{k} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{l^2}{k^2} \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) dx \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x) c_l(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} s_k(x) s_l(x) dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} c_k(x) s_l(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

□

1.5 Fourier-Entwicklung

Definition 1.31 (Periodische Funktionen). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt L -periodisch ($L > 0$) falls $f(x + L) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\implies f(x + kL) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$). Sei f periodisch und $p > 0$. Für $\tilde{f}(x) := f\left(\underbrace{\frac{L}{p}x}_{\text{Variablentransformation}}\right)$ gilt dann $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ist p -periodisch

Beispiel 1.32. $p = 2\pi$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &:= f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \implies f(x) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \\ \tilde{f}(x + 2\pi) &= f\left(\frac{L}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) \stackrel{f \text{ } L\text{-per}}{=} f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = \tilde{f} \end{aligned}$$

Hier betrachten wir deshalb nur 2π -periodische Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$. Weiterhin betrachten wir Funktionen $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{K}$, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π -periodisch.

Beispiel 1.33 (Trigonometrische Polynome). Für $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ betrachte

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) e^{ikx} + (a_k + ib_k) e^{-ikx} \right) \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \text{ mit } c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k \geq 0 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0 \end{cases} \\ (*) : \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

Für $a_k, b_k, k > 0$ ergibt sich $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Bemerkung 1.34. Ist f ein trigonometrisches Polynom, so kann man die Koeffizienten a_k, b_k, c_k durch Integration ausrechnen, d.h. a_k, b_k, c_k sind eindeutig.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \quad k > 0 \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx}), \quad L_2\text{-Skalarprodukt} \end{aligned}$$

Beweis. Sei zuerst $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\lambda x} \, dx &= \int_a^b \cos(\lambda x) \, dx + i \int_a^b \sin(\lambda x) \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} i \cos(\lambda x) \Big|_a^b \\ &\stackrel{\frac{1}{i} = -i}{=} \frac{1}{\lambda i} (\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{\lambda i} e^{i\lambda x} \Big|_a^b \\ \implies \int_0^{2\pi} e^{ikx} \, dx &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_1 x} e^{-ik_2 x} \, dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k_1 - k_2)x} \, dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k_1 \neq k_2 \\ 2\pi, & \text{falls } k_1 = k_2 \quad (\implies k_1 - k_2 = 0) \end{cases}$$

$\implies$ Behauptung für c_k . Für a_k, b_k gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \, dx = c_{-k} + c_k = b_k \cdot i$$

□

Bemerkung 1.35. Obige Formel gilt auch für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

falls die Reihen gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ konvergieren.

Frage: Hat jede 2π -periodische Funktion die Form $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ oder kann man sie durch trigonometrische Polynome approximieren? $\implies$ Motivation für Fourier-Reihen.

Definition 1.36 (Fourier-Reihe). Sei $f \in R[a, b]$ 2π -periodisch. Die Fourier-Koeffizienten von f sind gegeben durch

$$c_k := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx})$$

Die (formale) Fourier-Reihe von f ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit der n -ten Partialsumme

$$s_n(x) = s_n(f, x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Die Fourier-Reihe läßt sich in der Form schreiben

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

Satz 1.37. Sei $f \in R[a, b]$ eine 2π -periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$ und $s_n = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Beweis. Notation $e_k(x) := e^{ikx}$

$$\begin{aligned}
 (e_k, e_l) &= \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \\
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} (f, e_k) \implies (f, e_k) = 2\pi c_k \\
 (f, s_n) &= \sum_{k=-n}^n (f, c_k e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} (f, e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} 2\pi c_k = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\
 (s_n, s_n) &= \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n \underbrace{c_k \overline{c_l}}_{|c_k|^2} \cdot \underbrace{(e_k, e_l)}_{= \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l \end{cases}}
 \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned}
 \|f - s_n\|^2 &= (f - s_n, f - s_n) \\
 &= (f, f) - (f, s_n) - (s_n, f) + (s_n, s_n) \\
 &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\
 &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2
 \end{aligned}$$

□

Satz 1.38 (Besselsche Umgebung). Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Funktion mit Fourier-Koeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2\pi}$$

Beweis. Aus Satz 1.37

$$2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \|f\|^2 - \underbrace{\|f - s_n\|^2}_{\geq 0} \leq \|f\|^2$$

Die Konvergenz folgt unter Beachtung der Monotonie und Beschränktheit der Folge

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

□

Bemerkung 1.39. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ 2π -periodisch und $\|f - s_n\|^2 \xrightarrow{L^2} 0$, $n \rightarrow \infty$, d.h. die Fourier-Reihe konvergiert gegen f in L^2 . Das ist nach Satz 1.37 äquivalent zu

$$\|f\|^2 = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \Leftrightarrow \|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Frage: Unter welchen Bedingungen für f gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

mit den Fourier-Koeffizienten c_k .

Ziel: Zeige die Parsevalsche Gleichung für die Fourier-Koeffizienten c_k , $\{e_k = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$, $f \in R[a, b] \implies$ Konvergenz der Fourier-Reihe in L^2 .

Lemma 1.40. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)} - \frac{1}{2}$$

Beweis. $\cos(kt) = \frac{1}{2} (e^{ikt} + e^{-ikt})$

$$\begin{aligned} \implies \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2} e^{-int} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}}_{\text{geometrische Summenformel}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-int} \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-int} - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}} \\ &\stackrel{\text{Erweitern}}{=} \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \end{aligned}$$

□

Lemma 1.41. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es gilt für $x \in [a, b]$ und $s \in \mathbb{R}$

$$F_s(x) := \int_a^x f(y) \sin(sy) \, dy$$

konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $|s| \rightarrow \infty$ und $x \in [a, b]$.

Beweis. Sei $s \neq 0$.

$$F_s(x) = \int_a^x f(y) \sin(sy) \, dy \stackrel{\text{part. Integr.}}{=} -f(y) \frac{1}{s} \cos(sy) \Big|_a^x + \int_a^x \frac{1}{s} \cos(sy) f'(y) \, dy.$$

f, f' stetig auf $[a, b] \implies \exists M > 0$, s.d. $|f(y)| \leq M, |f'(y)| \leq M$ mit $y \in [a, b]$. Dann gilt $|F_s(x)| \leq \frac{2M}{|s|} + \frac{M}{|s|} \cdot (b-a), \forall x \in [a, b]$. Also konvergiert $|F_s(x)|$ gleichmäßig gegen 0 für $|s| \rightarrow \infty$ und $x \in [a, b]$. □

Lemma 1.42. Es gilt $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ für $0 < x < 2\pi$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen Intervallen $[\delta, 2\pi - \delta]$ für $\delta > 0$.

Beweis. Aus Hilfslemma 1.40 folgt für $0 < x < 2\pi$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^n \int_{\pi}^x \cos(ky) \, dy \\ &= \int_{\pi}^x \left(\sum_{k=1}^n \cos(ky) \right) \, dy \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.40}}{=} \int_{\pi}^x \left(\frac{\sin((n + \frac{1}{2})y)}{2 \sin(\frac{1}{2}y)} - \frac{1}{2} \right) \, dy \\ &= \underbrace{\int_{\pi}^x \frac{\sin((n + \frac{1}{2})y)}{2 \sin(\frac{1}{2}y)} \, dy}_{=: F_n(x)} - \frac{1}{2}(x - \pi) \end{aligned}$$

Z.Z.: $F_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. Die Funktion $f(y) = \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2})}$ ist auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ stetig differenzierbar, weil $\frac{y}{2} \neq 0$ auf $[\delta, 2\pi - \delta]$, sodass aus Hilfslemma 1.41 folgt

$$F_n(x) = \int_{\pi}^x \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2})} \cdot \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) \, dy \xrightarrow{\text{glm.}} 0$$

für $n \rightarrow \infty$ und $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$. □

Lemma 1.43. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

konvergiert gleichmäßig $\forall x, 0 \leq x \leq 2\pi$. Insbesondere gilt für $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis. Lemma 1.42 $\implies \forall x, y \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \frac{(x - \pi)^2}{4} - \frac{(y - \pi)^2}{4} &= \int_y^x \frac{t - \pi}{2} \, dt \\ &\stackrel{1.42}{=} - \int_y^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k} \, dt \\ &\stackrel{\text{glm. Konv. Satz 1.15}}{=} - \sum_{k=1}^{\infty} \int_y^x \frac{\sin(kt)}{k} \, dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ky)}{k^2} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{y \text{ fest}} \frac{(x - \pi)^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \quad \forall x \in (0, 2\pi), C \text{ konst}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ mit Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Bestimme die Konstante C :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} dx &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \right) dx \\ \frac{\pi^3}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx}_{=0} + \int_0^{2\pi} C dx \\ \frac{\pi^3}{6} &= C \cdot 2\pi \\ C &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

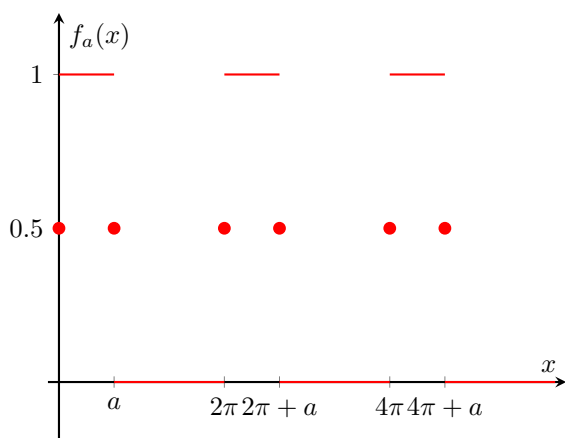
Für $x = 0$ oder $x = 2\pi$ folgt die Behauptung durch Grenzübergang, da beide Seiten stetig sind auf $[0, 2\pi]$ $\square$

Lemma 1.44. Sei f Treppenfunktion, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π periodisch. Dann $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in $L^2[0, 2\pi]$, d.h. Fourier-Reihe von f konvergiert im quadratischen Mittel gegen f .

Beweis. Zunächst Spezialfall

$$f_a(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0.5, & x \in \{0, a\} \\ 0, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Es gilt $\|f_a\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f_a|^2 dx = \int_0^a 1 dx = a$.



Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{a}{2\pi} \\
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_a(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{ik} \right) e^{-ikx} \Big|_0^a \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{i}{ik} \right) (e^{-ika} - 1) \\
 &\stackrel{k \neq 0}{=} \frac{i}{2\pi k} (e^{-ika} - 1)
 \end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 |c_k|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 k^2} \underbrace{(e^{-ika} - 1)(e^{ika} - 1)}_{=1 - e^{ika} - e^{-ika} + 1} \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left(1 - \frac{e^{ika} + e^{-ika}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos(ka)) \\
 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \underbrace{\frac{a^2}{4\pi^2}}_{a_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_{-k}|^2 + |c_k|^2) \\
 &\stackrel{\cos(-ka)=\cos(ka)}{=} \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos(ka)) \\
 &= \frac{a}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}} - \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \cos(ka)}_{=\frac{(a-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}} \\
 &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{(a-\pi)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{12} \\
 &= \frac{a}{2\pi} \\
 \implies 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= a = \|f_a\|_{L^2}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{Satz 1.37}} \|f_a - s_n(f_a)\|_{L^2}^2 = \|f_a\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine beliebige 2π -periodische Treppenfunktion mit Sprungstellen

$$a_j \in (0, 2\pi) \quad j = 1, \dots, l$$

Jede Treppenfunktion f lässt sich schreiben als

$$f(x) = \sum_{j=1}^l d_j \underbrace{f_{a_j}(x)}_{\text{Spezialfunktion (als } f_a(x))}, x \in [0, 2\pi]$$

f_{a_j} Spezielle Treppenfunktion mit Sprungstelle $a = a_j$ und $f_{a_j}(x) \in \{0, 1\} \forall j, x \neq a_j$. Dann $\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\| \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$. Betrachte

$$s_n(f) = \sum_{j=1}^l d_j s_n(f_{a_j})$$

und

$$\|f - s_n(f)\| = \left\| \sum_{j=1}^l d_j (f_{a_j} - s_n(f_{a_j})) \right\| \leq \sum_{j=1}^l |d_j| \underbrace{\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\|}_{\xrightarrow{L^2} 0} \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$$

□

Satz 1.45. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Funktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f und es gilt die Parsevalsche Gleichung (sog. Vollständigkeitsrelation)

$$\frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}_{=\|f\|^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Beweis. O.B.d.A. sei f reellwertig (sonst werden Real- und Imaginärteil getrennt behandelt) und $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 2\pi]$ (sonst betrachte $\bar{f}(x) := \frac{f(x)}{M}$, $M = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu ε 2π -periodische Treppenfunktionen $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

$$-1 \leq \varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \leq 1$$

und

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{16\pi} \varepsilon^2$$

Konstruktion von $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ siehe Rannacher. Dann,

$$|f - \varphi_\varepsilon|^2 \leq |\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon|^2 \leq (|\psi_\varepsilon| + |\varphi_\varepsilon|)(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \underset{\substack{|\psi_\varepsilon| < 1 \\ |\varphi_\varepsilon| < 1}}{\leq} 2(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)$$

und

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|^2 = \int_0^{2\pi} |f - \varphi_\varepsilon|^2 dx \leq 2 \int_0^{2\pi} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx \leq 2 \frac{\varepsilon^2}{16\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Weiter gilt: φ_ε Treppenfunktion $\xrightarrow{1.44}$ Fourier-Reihe von φ_ε konvergiert gegen φ_ε in L^2 , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \|s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Aus Satz 1.38 folgt

$$\|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\|^2 \leq \|f - \varphi_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\| &= \|f - s_n(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon\| \\ &\leq \|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\| + \|\varphi_\varepsilon - s_n(\varphi_\varepsilon)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\implies s_n(f) \xrightarrow{L^2} f, n \rightarrow \infty$$

□

Bemerkung 1.46. Konvergenz in L^2 ist „sehr schwach“. Für „glattere“ Funktionen konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig.

Satz 1.47. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar, d.h. $\exists$ Unterteilung von $[0, 2\pi]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 2\pi$$

mit $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar für $j = 1, \dots, m$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f .

Beweis. f stetig $\implies f \in R[0, 2\pi] \implies$ Fourier-Reihe von f konvergiert gegen f in L^2 , d.h. $\|s_n(f) - f\| \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$. Betrachte $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \phi(x) = \phi_j(x), x \in (t_{j-1}, t_j), \phi_j : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Ableitung von $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$. Definiere ϕ in t_j entsprechend (möglich, da ϕ eine stückweise stetige Funktion ist). Definition von $R[0, 2\pi] \implies \phi \in R[0, 2\pi] \implies$ Für die Fourier-Koeffizienten von ϕ gilt: $\gamma_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\phi\|^2 < \infty$. Berechne Fourier-Koeffizienten c_k von f

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ &\stackrel{\text{part. Integr.}}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi} f(x) \frac{i}{k} e^{-ikx} \Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f'(x)}_{\phi(x)} \frac{i}{k} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-i}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-i}{k} \gamma_k \\ &\implies |c_k| = \frac{1}{k} |\gamma_k| \end{aligned}$$

Es gilt $|\alpha \cdot \beta| \leq \frac{1}{2} |\alpha|^2 + \frac{1}{2} |\beta|^2$, da Quadrate größer 0 sind

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + \frac{|\gamma_k|^2}{2} \\ &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty \\ &\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \text{ absolut konvergent} \\ &\implies \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}}_{\text{Fourier-Reihe von } f} \end{aligned}$$

konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion g , die stetig ist. Also $s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} g, n \rightarrow \infty, \implies$

$s_n(f) \xrightarrow{L^2} g, n \rightarrow \infty$. Andererseits $s_n(f) \xrightarrow{L^2} f, n \rightarrow \infty$

$$\implies \|f - g\|_{L^2} = 0$$

$$\implies f \equiv g, \text{ weil } f \text{ und } g \text{ stetig sind}$$

$$\implies s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} f, n \rightarrow \infty$$

□

Kapitel 2

Der n -dimensionale Zahlenraum K^n

2.1 Der euklidische Raum K^n

Bemerkung 2.1. K^n bezeichnet den Vektorraum der n -Tupel $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ mit Addition $x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ und skalarer Multiplikation $\alpha \cdot x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Definition 2.2. Sei X irgendeine Menge.

Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften:

M1 (Definitheit) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2 (Symmetrie) $\forall x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

M3 (Dreiecksungleichung) $\forall x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ein metrischer Raum (X, d) besteht aus einer Menge X mit einer Metrik d . Man nennt $d(x, y)$ auch den Abstand oder die Distanz von x und y .

Beispiel 2.3. (1) $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $d(x, y) := |x - y|$ ist ein metrischer Raum, denn:

M1 folgt aus $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|x| \geq 0$,

M2 folgt aus $|x - y| = |-(y - x)| = |y - x|$,

M3 folgt aus $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

(2) (induzierte Metrik) Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subseteq X$. Die induzierte Metrik d_A auf A ist definiert durch $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $d_A(x, y) := d(x, y)$, $\forall x, y \in A$. Dann wird (A, d_A) zu einem metrischen Raum.

(3) (triviale Metrik) Sei X eine Menge. Die Triviale Metrik wird definiert durch:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = y \\ 1, & \text{für } x \neq y \end{cases}.$$

(4) Weiteres wichtiges Beispiel: metrische Räume entstehen aus normierten Vektorräumen.

Definition 2.4. (normierter Raum) Sei V irgendein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm (auf V), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

N1 (Definitheit) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

N2 (Homogenität) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

N3 (Dreiecksungleichung) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Bemerkung 2.5. (Norm $\leadsto$ Metrik) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d(x, y) := \|x - y\|$, $\forall x, y \in V$ eine Metrik auf V .

Beispiel 2.6. Normen in $\mathbb{R}^n$.

(1) Euklidische Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(2) Maximumsnorm oder ℓ^∞ -Norm: $\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

(3) ℓ^1 -Norm: $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$.

(4) ℓ^p -Norm: $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$.

Definition 2.7. Eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, $x^{(k)} \in \mathbb{K}^n$, heißt

i) beschränkt, falls $\forall k \in \mathbb{N} : x^{(k)} \in K_R(0)$, $K_R(0)$ eine Kugelumgebung von 0 mit Radius R .

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x - a\|_\infty < r\}.$$

ii) Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass $\forall k, l \geq N_\varepsilon$ gilt: $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon$.

iii) konvergent gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$, wenn $\|x^{(k)} - x\|_\infty \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.
geometrisch: jede Kugelumgebung $K_\varepsilon(x)$ enthält fast alle Folgeelemente $x^{(k)}$ (d.h. alle bis auf endlich viele).

Bemerkung 2.8. Offenbar:

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x\|_\infty \rightarrow 0, k \rightarrow \infty & \Leftrightarrow \\ |x_i^{(k)} - x_i| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Das heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$ (komponentenweise Konvergenz in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Satz 2.9 (Satz von Cauchy und Satz von Bolzano-Weierstraß).

- 1) Jede Cauchy-Folge in K^n konvergiert, d.h. der normierte Raum $(K^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig. Ein vollständiger normierter Raum wird Banach-Raum genannt.
- 2) Jede beschränkte Folge in K^n besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall k, l \geq N_\varepsilon : \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon$.
 Betrachte Komponentenfolge $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, i = 1, \dots, n$. Die Komponentenfolgen sind Cauchy-Folgen, weil

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon, \forall k, l \geq N_\varepsilon, \forall i = 1, \dots, n.$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} =: x_i \implies x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ in } \ell_\infty \text{ Norm.}$$

2) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\implies (x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, \forall i = 1, \dots, n$ auch beschränkt
 Bo.-We. in $\mathbb{K}$ es existiert eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(k_{1,j})})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_1^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_1^{(k_{1,j})} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_1$,
 nach n Schritten haben wir Teilfolgen $(x_n^{(k_{n,j})})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ für die alle Komponentenfolgen konvergieren $(x_i^{(k_{i,j})})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_i, \forall i = 1, \dots, n$. Daraus folgt $(x^{(k_{n,j})})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$.

□

Satz 2.10 (Äquivalenz von Normen). Sei $\mathbb{K}^n$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann sind alle Normen äquivalent zur Maximumsnorm (ℓ_∞), d.h. zu jeder Norm $\|\cdot\|, \exists m, M > 0$ sodass

$$m \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm. $\forall x \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{k=1}^n x_k e^{(k)}$, wobei $e^{(k)}, k = 1, \dots, n$ die sogenannte euklidische Basis ist: $e^{(k)} = \begin{pmatrix} \delta_{k,1} \\ \vdots \\ \delta_{k,n} \end{pmatrix}$.

Dann:

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|e^{(k)}\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \max_{i=1 \dots n} |x_i| \cdot \|e^{(k)}\| \leq M \cdot \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Wobei $M := \sum_{k=1}^n \|e^{(k)}\|$.

Setze

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}, \quad m := \inf\{\|x\| \mid x \in S_1\} \geq 0.$$

Es gzz.: $m > 0$. Annahme $m = 0$. Dann existiert eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, x^{(k)} \in S_1$, sodass $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Aus $x^{(k)} \in S_1$ folgt $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt in der ℓ_∞ -Norm. Dann impliziert der Satz von Bolzano-Weierstraß: es existiert eine konvergente Teilfolge, o.B.d.A. $(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ in der ℓ_∞ -Norm, dann:

$$\underbrace{\left| \underbrace{\|x^{(k)}\|_\infty}_{=1} - \|x\|_\infty \right|}_{=|1 - \|x\|_\infty|} \leq \underbrace{\|x^{(k)} - x\|_\infty}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \implies |1 - \|x\|_\infty| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \implies \|x\|_\infty = 1 \implies x \in S_1.$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)}\| \leq M \cdot \|x - x^{(k)}\|_\infty + \|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ \implies \|x\| &= 0 \implies x = 0. \end{aligned}$$

Widerspruch zu $x \in S_1$, also $m > 0$. Dann für $x \neq 0$ ist Vektor $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_1$ und $m \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty}$ (nach Definition von m) und $0 < m \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|$, $x \in \mathbb{K}^n$. $\square$

Korollar 2.11. Auf K^n sind alle Konvergenzen in irgendeiner Norm äquivalent zur Konvergenz in der ℓ_∞ -Norm. (= komponentenweiser Konvergenz)

Bemerkung 2.12. Obiger Satz gilt nicht für unendlich dimensionale Räume (wie z.B. $C[a, b]$ oder $R[a, b]$). Die endliche Dimension von K^n ist entscheidend.

2.2 Teilmengen in K^n (Topologische Grundbegriffe)

Bezeichnung: $\|\cdot\|$ irgendeine Norm.

Definition 2.13 (ε -Kugel, ε -Umgebung). Sei $a \in \mathbb{K}^n, r > 0$.

- (1) Dann heißt $K_r(a) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|a - x\| < r\}$ die offene Kugel um a mit Radius r bzgl. $\|\cdot\|$.
- (2) $U \subset K^n$ heißt Umgebung von $a \in \mathbb{K}^n$, falls $\exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(a) \subseteq U$. Insbesondere ist $K_\varepsilon(a)$ selbst eine Umgebung von a , eine sogenannte ε -Umgebung von a .

Definition 2.14 (offene Menge). Eine Menge $O \in \mathbb{K}^n$ heißt offen, falls O eine Umgebung jedes Punktes aus O ($x \in O$) ist, das heißt $\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq O$.

Beispiel 2.15. (1) $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ ist offen ($a < b, a, b \in \mathbb{R}$), weil: sei $x \in]a, b[$, definiere $\varepsilon := \min\{|a - x|, |b - x|\}$, $\varepsilon > 0$, da $a < x < b$ ist $K_\varepsilon(x) \subseteq]a, b[$

(2) $\emptyset$ leere Menge ist immer offen, $\mathbb{K}^n$ ist immer offen

(3) Die Kugel $K_r(a)$ ist immer offen: sei $x \in K_r(a)$, setze $\varepsilon := r - \|x - a\|$, dann $K_\varepsilon(x) \subseteq K_r(a)$, weil: sei $y \in K_\varepsilon(x)$. Dann gilt

$$\|y - a\| \leq \underbrace{\|y - x\|}_{< \varepsilon = r - \|x - a\|} + \|x - a\| < r - \|x - a\| + \|x - a\| = r.$$

Satz 2.16 (Eigenschaften offener Mengen). Es gilt:

- (1) Sind U und $V (\subseteq \mathbb{K}^n)$ offen, dann ist $U \cap V$ offen.
- (2) Sei $U_i \subset \mathbb{K}^n, i \in I$ eine Familie offener Teilmengen. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Beweis. (1) Sei $x \in U \cap V$. Dann $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $K_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U, K_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$. Damit gilt für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $K_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$. (Beachte: $\emptyset$ ist immer offen.)

(2) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, dann $\exists j \in I$ mit $x \in U_j$.

$$U_j \text{ offen} \implies \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } K_\varepsilon(x) \subseteq U_j \implies K_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

$\square$

Korollar 2.17. 1) Endliche Schnitte und beliebige Vereinigung von offenen Mengen sind wieder offen.

2) (Beobachtung) Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen braucht nicht offen zu sein. Z.B.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right[= [0, 1]$$

ist nicht offen, da $K_{\varepsilon}(0) \not\subset [0, 1], \forall \varepsilon > 0$.

Definition 2.18 (Abgeschlossene Menge). Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{K}^n$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $A^c := \mathbb{K}^n \setminus A$ offen ist.

Beispiel 2.19. (1) Für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ ist $[a, b]$ abgeschlossen, denn $] -\infty, a[\cup]b, \infty[= \mathbb{R} \setminus [a, b]$ ist offen, denn:

$$] -\infty, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a - n, a[\text{ ist offen} \quad]b, \infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]b, b + n[\text{ ist offen.}$$

Satz 2.20 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen).

- (1) Sind V, U ($V, U \subset \mathbb{K}^n$) abgeschlossen, dann ist $U \cup V \subset \mathbb{K}^n$ auch abgeschlossen.
- (2) Sind $U_i, (i \in I)$ abgeschlossene Mengen in $\mathbb{K}^n$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ auch abgeschlossen.

Beweis. (1) $(U \cup V)^c = \underbrace{U^c}_{\text{offen}} \cap \underbrace{V^c}_{\text{offen}}$ offen.

(2) $\left(\bigcap_{i \in I} U_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i^c}_{\text{offen}}$ offen.

□

Beispiel 2.21. (1) Beliebige Vereinigung abgeschlossener Mengen muss nicht abgeschlossen sein. Z.B. $]0, 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]}_{\text{abgeschlossen}}$ ist offen.

(2) $\emptyset$ und K^n sind abgeschlossen.

(3) $A_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $A_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ abgeschlossen, dann ist auch $A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ abgeschlossen.

(4) Für $a < b \in \mathbb{R}$ ist $[a, b[$ weder offen noch abgeschlossen.

Satz 2.22 (Charakterisierung abgeschlossener Mengen). Sei $A \subset \mathbb{K}^n$. Dann gilt

A abgeschlossen $\iff$ Ist $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in A mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$, dann $a \in A$.

Beweis. • „ $\implies$ “: Sei A abgeschlossen und $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in A mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x.$$

Ang.: $x \notin A$, d.h. $x \in A^C$. Da A^C offen, folgt, es ex. ein $\varepsilon > 0$, s.d. $K_\varepsilon(x) \subset A^C$. Mit $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ folgt, dass fast alle Folgeelemente $x^{(k)}$ in $K_\varepsilon(x) \subset A^C$ liegen.

Widerspruch zu: $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset A$. Damit folgt $x \in A$.

- „ $\Leftarrow$ “: Sei $A \subset \mathbb{K}^n$ s.d. alle konvergenten Folgen in A einen Grenzwert in A haben.

Zu zeigen: A^C offen. Sei $x \in A^C$ beliebig. Dann g.z.z.: $\exists \varepsilon > 0$ s.d. $K_\varepsilon(x) \subset A^C$.

Ang.: A^C nicht offen. Dann ex. $\forall k \in \mathbb{N}$ ein Punkt $x^{(k)}$ mit $x^{(k)} \in A \cap K_{\frac{1}{k}}(x)$. Dann ist $x^{(k)} \in A \forall k \in \mathbb{N}$ und $\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{k}$. Damit folgt

$$x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \xrightarrow{\text{Vorr.}} x \in A \quad \nRightarrow \quad A^C \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad A \text{ abgeschlossen.}$$

□

Definition 2.23 (Randpunkt). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Ein Punkt $a \in \mathbb{K}^n$ heißt Randpunkt von M , falls in jeder Umgebung von a sowohl ein Punkt von M , als auch ein Punkt von $M^C = \mathbb{K}^n \setminus M$ liegt.

Die Menge aller Randpunkte von M heißt der Rand von M , bezeichnet mit ∂M .

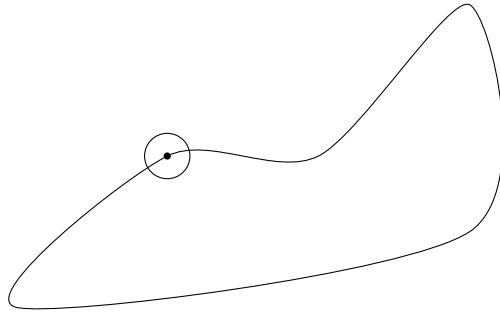


Abbildung 2.1: Randpunkt einer Menge $M \subset \mathbb{K}^n$

Beispiel 2.24. (1) Für $I \in \{[a, b[, [a, b],]a, b[,]a, b]\}$ gilt $\partial I = \{a, b\}$.

$$\partial[a, \infty[= \{a\}$$

$$\partial]a, \infty[= \{a\}$$

(2) Für $K_1(0)$ gilt

$$\partial K_1(0) = \partial\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

„Einheitssphäre“.

(3) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, weil in jeder Umgebung eines Punktes in $\mathbb{Q}$, gibt es rationale und irrationale Zahlen. Der Rand von $\mathbb{R}$ ist leer.

Definition 2.25 (Inneres, Abschluss). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$

- Die Menge $M^\circ := M \setminus \partial M$ heißt das Innere von M .
- Die Menge $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt der Abschluss von M .

Satz 2.26 (Inneres ist Offen, Abschluss ist abgeschlossen). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$.

- (i) Die Menge $M^\circ = M \setminus \partial M$ ist offen. M° ist die größte offene Menge in M .
- (ii) Die Menge $\overline{M} = M \cup \partial M$ ist abgeschlossen. $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst.
- (iii) Der Rand ∂M ist abgeschlossen.

Beweis. (i) Z.z.: $M \setminus \partial M$ offen.

Sei $x \in M \setminus \partial M$ beliebig, dann ex. $\varepsilon > 0$, s.d. $K_\varepsilon(x) \subset M$ ($\implies K_\varepsilon(x) \cap M^C = \emptyset$), sonst wäre $x \in \partial M$.

Für dieses ε gilt auch $K_\varepsilon(x) \cap \partial M = \emptyset$, denn falls $z \in K_\varepsilon(x) \cap \partial M$ existiert, dann ist $K_\varepsilon(x)$ Umgebung von z und folglich $K_\varepsilon(x) \cap M^C \neq \emptyset$.

Damit folgt:

$$K_\varepsilon(x) \subset M \setminus \partial M \implies M \setminus \partial M \text{ offen.}$$

Sei $U \subset M$ offen, dann ist analog $U \cap \partial M = \emptyset$. Damit gilt $U \subset M \setminus \partial M$. Da U beliebig, folgt damit $M \setminus \partial M =: M^\circ$ ist größte offene Teilmenge von M .

(ii) Z.z.: $M \cup \partial M$ abgeschlossen.

Betrachte $M^C = \mathbb{K}^n \setminus M$. Nach Definition des Rands gilt $\partial M^C = \partial M$. Damit folgt mit (i), dass $M^C \setminus \underbrace{\partial M}_{=\partial M^C}$ offen ist. Dann

$$(M^C \setminus \partial M)^C = \mathbb{K}^n \setminus (M^C \setminus \partial M) = \underbrace{(\mathbb{K}^n \setminus M^C)}_{=M} \cup \partial M = M \cup \partial M.$$

D.h. $M \cup \partial M$ ist abgeschlossen.

Sei $V \in \mathcal{K}^n$ abgeschlossen mit $M \subset V$. Dann gilt V^C ist offen und $V^C \subset M^C$. Damit folgt mit (i):

$$\underbrace{V^C}_{\text{offen}} \subset M^C \setminus \underbrace{\partial M^C}_{=\partial M} = M^C \setminus \partial M \implies \mathbb{K}^n \setminus (M^C \setminus \partial M) = (M \cup \partial M) \subset V.$$

Da V beliebig, folgt damit $M \cup \partial M$ ist kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst.

(iii) Mit $\partial M = (M \cup \partial M) \setminus (M \setminus \partial M)$ folgt

$$\mathbb{K}^n \setminus \partial M = \underbrace{(\mathbb{K}^n \setminus (M \cup \partial M))}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(M \setminus \partial M)}_{\text{offen}}.$$

Damit ist $\mathbb{K}^n \setminus \partial M$ offen, also ∂M abgeschlossen.

□

Definition 2.27 (Kompaktheit). Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ heißt kompakt (folgenkompakt), wenn jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

Beispiel 2.28. (i) Sei

$$\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n, x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x.$$

Dann ist $A := \{x^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup x$ kompakt.

(ii) $]0, 1[$ ist nicht kompakt, denn $(\frac{1}{2k})_{k \in \mathbb{N}} \subset]0, 1[, \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Auch: $(1 - \frac{2}{k})_{k \in \mathbb{N}} \subset]0, 1[, 1 - \frac{2}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$

Definition 2.29 (Überdeckung). Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Teilmengen $U_i \subset \mathbb{K}^n$ heißt Überdeckung von M , falls gilt

$$M \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Eine Überdeckung heißt offen bzw. abgeschlossen, wenn alle U_i offen bzw. abgeschlossen sind.

Satz 2.30 (Charakterisierung von Kompaktheit). Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) M ist folgenkompakt
- (ii) M ist beschränkt und abgeschlossen
- (iii) Jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M enthält eine endliche Überdeckung von M , d.h. es existieren endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$, s.d. $M \subset (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k})$ (sogenannte Überdeckungseigenschaft von Heine und Borel).

Beweis. • (i) $\implies$ (ii): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ folgenkompakt. Dann existieren für alle konvergenten Folgen $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M . Damit liegt auch der Grenzwert von $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ in M . Also ist M abgeschlossen.

Ang.: M ist nicht beschränkt. Dann ex. eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Damit hat $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. Widerspruch zur Kompaktheit von M . Also ist M beschränkt.

- (ii) $\implies$ (i): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Dann folgt mit 2.9, dass alle Folgen $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ beschränkt sind und eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$ besitzen. Da M abgeschlossen ist, folgt $x \in M$.

Also ist M folgenkompakt.

- (iii) $\implies$ (i): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ und M besitze die Überdeckungseigenschaft. Sei weiter $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ beliebig.

Z.z.: Es ex. eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x \in M$.

Ang.: Solche Teilfolge existiert nicht. Dann gilt: $\forall x \in M$ existiert eine offene Umgebung U_x von x , die nur endlich viele Folgelemente von $(x^{(k)})$ enthält (wären in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgelemente, dann existiert eine konvergente Teilfolge).

Damit ist $M = \bigcup_{x \in M} U_x$ eine offene Überdeckung, d.h. es existiert nach Vorr. eine endliche Überdeckung von M , d.h. eine endliche Menge I mit

$$\{x_i \mid x_i \in M, i \in I\} =: M_i \text{ s.d. } M \subset \bigcup_{x_i \in M_i} U_{x_i}.$$

Da $\forall i \in I$ U_{x_i} nur endlich viele Folgelemente enthält, enthält M endlich viele Folgelemente von $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, d.h. $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \not\subset M \nabla$.

Also existiert eine Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in M$

- (ii) $\implies$ (iii): Sei M beschränkt und abgeschlossen und sei $\{U_i, i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M .

Zu zeigen: Es existiert eine endliche Überdeckung von M .

Ang.: Eine solche Überdeckung existiert nicht. Konstruiere induktiv eine Folge von beschränkten, abgeschlossenen Würfeln in $\mathbb{K}^n$:

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

mit

- (1) $M \cap Q_i$ wird nicht durch endlich viele U_{i_k} überdeckt.
- (2) Kantenlänge von $Q_m = 2^{-m}$ Kantenlänge von Q_0 .

Sei Q beschränkter abgeschlossener Würfel in $\mathbb{K}^n$ mit Kantenlänge L , s.d. $M \subset Q$. Setze

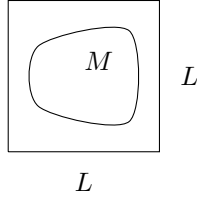


Abbildung 2.2: Abgeschlossener Würfel $Q \subset K^n$ mit Kantenlänge L und $M \subset Q$

$Q_0 = Q$, Kantenlänge von $Q_0 = L$. Sei Q_m bereits konstruiert. Sei

$$Q_m = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n.$$

Länge $(I_k) = \text{Kantenlänge}(Q_m) \forall k = 2^{-m}L$

Wir zerlegen jedes I_i in 2 abgeschlossene Intervalle mit halber Länge $I_i^{(1)}$ und $I_i^{(2)}$ und setzen für $(s_1, \dots, s_n) \in \{1, 2\}^n$

$$Q_m^{s_1, \dots, s_n} := I_1^{(s_1)} \times \dots \times I_n^{(s_n)}.$$

Wir erhalten 2^n Würfel mit

$$Q_m := \bigcup_{(s_1, \dots, s_n) \in \{1, 2\}^n} Q_m^{(s_1, \dots, s_n)}.$$

Da $M \cap Q_m$ nicht von endlich vielen U_{i_k} überdeckt wird, gilt dies auch für einen Würfel

$$Q_{m+1} := Q_m^{(s_1, \dots, s_n)}.$$

Es gilt für die Kantenlänge $(Q_{m+1}) = \frac{1}{2}$ Kantenlänge $(Q_m) = 2^{-(m+1)}L$.

Für $k \in \mathbb{N}$ wähle $x^{(k)} \in Q_k \cap M$. Damit ist $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$, da nach Konstruktion von $Q_1, Q_2, \dots$

$$\|x^{(l)} - x^{(k)}\| \leq 2^{-n_0}L, \quad \forall l, k \geq n_0.$$

Damit folgt $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in M$ und $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, weil $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Also existiert ein i_k , s.d. $x \in U_{i_k}$ liegt. Damit liegen fast alle Q_m in U_{i_k} . Das heißt fast alle $M \cap Q_m$ liegen in U_{i_k} . Widerspruch zur Annahme, dass eine endliche Überdeckung nicht existiert.

Also existiert eine endliche Überdeckung von M .

□

Bemerkung 2.31. Wichtige Voraussetzung für die Überdeckungseigenschaft von Heine und Borel ist, dass $\mathbb{K}^n$ endlich-dimensional ist.

In unendlich dimensionalen Banach-Räumen wie z.B.: $C[a, b]$ ist dies nicht möglich.

Korollar 2.32. Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge in $\mathbb{K}^n$ ist ebenfalls kompakt.

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ kompakt und $A \subset M$ abgeschlossen. Wegen 2.30 ist M beschränkt. Damit ist auch $A \subset M$ beschränkt und somit nach 2.30 kompakt. $\square$

2.3 Geometrie in K^n

Definition 2.33 (Skalarprodukt). Sei V irgendein Raum über dem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

S1 (Definitheit) $(x, x) \in \mathbb{R}$ und $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \iff x = 0$

S2 (Symmetrie) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

S3 (Linearität im ersten Argument) $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Bemerkung 2.34. (1) Falls nur $(x, x) \in \mathbb{R}, (x, x) \geq 0$ gilt (es ist möglich, dass $(x, x) = 0$ und $x \neq 0$), dann ist $(\cdot, \cdot)$ ein „semi-skalarprodukt“.

(2) Aus S2 und S3 folgt die Linearität im zweiten Argument und damit sog. Bilinearität des Skalarprodukts als eine Sesquilinearform in $\mathbb{C}$ bzw. eine Bilinearform in $\mathbb{R}$

(3) S3 $\implies \begin{cases} \text{Additivität} & (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \\ \text{Homogenität} & (\alpha x, y) = \alpha(x, y), \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$

Lemma 2.35 (Schwarz-Ungleichung). Für ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf V über $\mathbb{K}$ gilt die Schwarz-Ungleichung

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y), \quad x, y \in V$$

Beweis. $y = 0 \implies$ trivial. Sei $y \neq 0$, und sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig.

$$0 \stackrel{S1}{\leq} (x + \alpha y, x + \alpha y) \stackrel{S2, S3}{=} (x, x) + \alpha(y, x) + \overline{\alpha}(x, y) + \alpha\overline{\alpha}(y, y)$$

Setze $\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x, x) - \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)} - \frac{\overline{(x, y)}(x, y)}{(y, y)} + \frac{(x, y)}{(y, y)} \cdot \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)} \cdot (y, y) \\ &= (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \\ &\implies 0 \leq (x, x) \cdot (y, y) - |(x, y)|^2 \end{aligned}$$

$\square$

Korollar 2.36. a) Ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf V über $\mathbb{K}$ erzeugt eine Norm durch $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$, $x \in V$. Falls ein normierter Raum $(V, (\cdot, \cdot))$ vollständig ist, so heißt das Paar $(V, (\cdot, \cdot))$ Hilbert-Raum.

b) Das euklidische Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_2$ auf $\mathbb{K}^n$

$$(x, y)_2 := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

erzeugt die euklidische Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{(x, x)_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

$(\mathbb{K}^n, (\cdot, \cdot)_2)$ ist ein Hilbert-Raum.

Beweis. Normeigenschaften Definitheit und Homogenität folgen aus S1-S3. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Schwarz-Ungleichung.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \implies \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

□

Wichtige Ungleichungen

Lemma 2.37 (Ungleichung von Young). Seien $p, q \in \mathbb{R}, p > 1, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$|x \cdot y| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Beweis. Übung

□

Lemma 2.38 (Ungleichung von Hölder). Seien $p, q \in \mathbb{R}, p > 1, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\underbrace{|(x, y)_2|}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}} \leq \underbrace{\|x\|_p}_{\ell_p\text{-Norm von } x} \cdot \underbrace{\|y\|_q}_{\ell_q\text{-Norm von } y}$$

Beweis. Falls $x = 0$ oder $y = 0 \implies$ klar. Sei $\|x\|_p \neq 0$, $\|y\|_q \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{|(x, y)_2|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \left| \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i \overline{y_i}|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \\
 &\stackrel{\text{Young-Ungl.}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|^p}{p \cdot \|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \cdot \|y\|_q^q} \right) \\
 &= \frac{1}{p \cdot \|x\|_p^p} \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}_{=\|x\|_p^p} + \frac{1}{q \cdot \|y\|_q^q} \underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}_{=\|y\|_q^q} \\
 &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
 \implies |(x, y)_2| &\leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q
 \end{aligned}$$

□

Lemma 2.39 (Ungleichung von Minkowski). Sei $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ oder $p = \infty$. Dann gilt

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\leadsto$ Dreiecksungleichung für die ℓ_p -Norm.

Beweis. Für $p = 1$

$$\|x + y\|_1 \stackrel{\text{Def. } \ell_1}{=} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \stackrel{\Delta\text{-UG}}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \stackrel{\text{Def. } \ell_1}{=} \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Für $p = \infty$

$$\|x + y\|_\infty \stackrel{\text{Def. } \ell_\infty}{=} \max_{i=1, \dots, n} |x_i + y_i| \stackrel{\Delta\text{-UG}}{\leq} \max_{i=1, \dots, n} |x_i| + \max_{i=1, \dots, n} |y_i| \stackrel{\text{Def. } \ell_\infty}{=} \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Sei $1 < p < \infty$. Definiere $q := \frac{p}{p-1}$ ($\implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$) und setze $\xi_i = |x_i + y_i|^{p-1}$, $i = 1, \dots, n$ und $\xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\|\xi\|_q^q = \sum_{i=1}^n |\xi_i|^q = \sum_{i=1}^n \underbrace{(|x_i + y_i|^{p-1})^q}_{\xi_i} = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \|x + y\|_p^p$$

Dann

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i + y_i|^p}_{= \underbrace{|x_i + y_i|^{p-1}}_{\xi_i} \cdot |x_i + y_i|} \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot \xi_i \\
&\leq \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \xi_i}_{|(x, \xi)_2|} + \underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i| \cdot \xi_i}_{|(y, \xi)_2|} \\
&\stackrel{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq} \|x\|_p \cdot \|\xi\|_q + \|y\|_p \cdot \|\xi\|_q \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_q) \cdot \|\xi\|_q \\
&\stackrel{\text{Def. } \xi}{=} (\|x\|_p + \|y\|_q) \cdot \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&\stackrel{\text{Def. } q}{=} (\|x\|_p + \|y\|_q) \cdot \|x + y\|_p^{p-1} \\
&\implies \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p
\end{aligned}$$

□

Definition 2.40 (Orthogonalität). $x, y \in \mathbb{K}^n$ heißen orthogonal ($x \perp y$), falls $(x, y)_2 = 0$.

Definition 2.41 (Orthogonalsystem/Orthogonalbasis). Ein Satz von Vektoren $\{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}$, $a^{(i)} \neq 0$, $a^{(i)} \in \mathbb{K}^n$, $i = 1, \dots, m$ und $\underbrace{(a^{(k)}, a^{(l)})_2}_{\text{paarweise orthogonal}} = 0$ für $k \neq l$ heißt

Orthogonalsystem bzw. falls $m = n$ Orthogonalbasis.

Falls $(a^{(k)}, a^{(k)})_2 = 1$, dann heißen die Vektoren $\{a^{(1)}, \dots, a^{(m)}\}$ ein Orthonormalsystem bzw. Orthonormalbasis.

Bemerkung 2.42. Die orthogonalen Vektoren (wie in Def.) sind linear unabhängig:

$$\text{Sei } \sum_{k=1}^m c_k a^{(k)} = 0 \iff \sum_{k=1}^m c_k (a^{(k)}, a^{(l)}) \stackrel{\substack{a^{(i)} \\ \text{paarweise} \\ \text{orthog.}}}{=} c_l \underbrace{(a^{(l)}, a^{(l)})}_{\substack{\neq 0 \\ \text{für } a^{(l)} \neq 0}} = 0 \iff c_l = 0, \quad l = 1, \dots, m$$

Beispiel 2.43. $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ ist eine Orthogonalbasis in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.44. Sei $\{a^{(k)}, k = 1, \dots, n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$. Dann gibt es $\forall x \in \mathbb{K}^n$ eine Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^n (x, a^{(k)})_2 \cdot a^{(k)}, \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

$$\left(\begin{array}{l} \sim \text{Fourierentwicklung} \\ a^{(k)} \sim e^{ixk} \\ x \sim f(x) \\ c_k \sim (f, e^{ixk})_{L^2} \end{array} \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{ixk} \right)$$

und es gilt die Vollständigkeitsrelation (Gleichung von Parseval)

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |(x, a^{(k)})_2|^2$$

$$(\sim \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^2| \cdot 2\pi)$$

Beweis. $\exists \alpha_j$, sodass $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j a^{(j)}$

$$\implies (x, a^{(k)})_2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{(a^{(j)}, a^{(k)})_2}_{\delta_{jk}} = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$\implies$ Darstellung von x

Außerdem gilt

$$\|x\|_2^2 = (x, x)_2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (x, a^{(k)})_2 \cdot \overline{(x, a^{(j)})_2} \cdot \underbrace{(a^{(k)}, a^{(j)})_2}_{\delta_{jk}} = \sum_{k=1}^n |(x, a^{(k)})_2|^2$$

$\implies$ Gleichung von Parseval

□

Bemerkung 2.45. Lemma 2.44 gilt in unendlichdimensionalen Skalarprodukträumen mit vollständigem Orthonormalsystem. Beispiel: Fourier-Reihen in $R[0, 2\pi]$, trigonometrische Funktionen e^{ikx} als vollständiges Orthonormalsystem.

Satz 2.46 (Gram-Schmidt-Verfahren). Sei $\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$. Dann ist $\{b^{(1)}, \dots, b^{(n)}\}$ konstruiert durch das Orthogonalisierungsverfahren von Gram und Schmidt eine Orthonormalbasis.

$$b^{(1)} := \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|_2}$$

$$\tilde{b}^{(k)} := a^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (a^{(k)}, b^{(j)})_2 \cdot b^{(j)}$$

$$b^{(k)} := \frac{\tilde{b}^{(k)}}{\|\tilde{b}^{(k)}\|_2}, \quad k = 2, \dots, n$$

Beweis. Rannacher

□

2.4 Lineare Abbildungen auf dem K^n

Definition 2.47 (Lineare Abbildung). Eine lineare Abbildung $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ heißt linear, falls $\forall \alpha, \beta \in K$ gilt

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) \quad \forall x, y \in K^n$$

Bemerkung 2.48. Eine lineare Abbildung lässt sich als Matrix darstellen. Betrachte $x \in K^n$ und euklidische/kartesische Basis $e^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$. Dann $\exists!$ Darstellung von x bezüglich der Basis

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e^{(i)}.$$

Die Koeffizienten $x_i, i = 1, \dots, n$ sind Koordinaten. Wir definieren Koordinatenvektor $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \varphi(e^{(i)}).$$

$\varphi(x)$ hat auch eine (eindeutige) Darstellung bzgl. Basis in K^m .

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m \underbrace{\varphi_j(x)}_* \cdot e^{(j)} = \sum_{j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i \overbrace{\varphi_j(e^{(i)})}^{a_{ji}}\right)}_{=\varphi_j(x)} \cdot e^{(j)}$$

(*) Koordinaten von $\varphi_j(x)$ bzgl. Basis $e^{(j)}, j = 1, \dots, m$

Dabei sind die $\varphi_j(x)$ Koordinaten und der Koordinatenvektor ist $\hat{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$. Dann erhalten wir eine Matrix

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(e^{(1)}) & \dots & \varphi_1(e^{(n)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_m(e^{(1)}) & \dots & \varphi_m(e^{(n)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A \in K^{m \times n}$$

Für einen Koordinatenvektor bezüglich Basis $e^{(j)}$ gilt

$$\varphi(x) = (A\hat{x})_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i, \quad j = 1, \dots, m$$

Die lineare Abbildung $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ lässt sich bezüglich festgelegter Basen von K^n und K^m eindeutig durch die Matrix $A \in K^{m \times n}$ beschreiben.

$$\hat{\varphi}(x) = A\hat{x}, \quad x \in K^n$$

Im folgenden wird der Punkt x mit seiner speziellen kartesischen Darstellung $\hat{x}$ identifiziert. Konvention: $A \in K^{m \times n}$

- Anzahl an Zeilen m = Dimension des Bildraums K^m

- Anzahl an Spalten n = Dimension des Urbildraums $\mathbb{K}^n$

Falls $m = n$ definiert $A \in K^{n \times n}$ eine lineare Abbildung in $\mathbb{K}^n$.

Lemma 2.49 (Lineare Abbildungen in $\mathbb{K}^n$). Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. A ist regulär
2. $Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\forall b \in \mathbb{K}^n$ (Bijektivität der linearen Abbildung)
3. $Ax = 0$ hat nur eine Lösung $x = 0$ (Injektivität)
4. $Ax = b$ ist $\forall b \in \mathbb{K}^n$ lösbar (Surjektivität)
5. $\text{Rang}(A) = n$
6. $\det(A) \neq 0$
7. Alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A sind ungleich Null
8. Die (komplex) transponierte Matrix $\bar{A}^T$ ist regulär.

Weitere Begriffe und Eigenschaften

- $A, A' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind **identisch** ($a_{ij} = a'_{ij} \forall i, j$) $\Leftrightarrow Ax = A'x \forall x \in \mathbb{K}^n$
- $A, A' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind **ähnlich**, wenn $\exists T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär, sodass

$$A' = T^{-1}AT$$

Übergang $A \rightarrow A'$ heißt Ähnlichkeitstransformation und es gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \underbrace{\det(A' - z\mathbb{I})}_{\substack{\text{Charakt. Polynom für } A' \\ \text{Nullstellen} = \text{EW von } A'}} &= \det \left(T^{-1}AT - z \underbrace{T^{-1}T}_{=\mathbb{I}} \right) \\ &= \det(T^{-1}(A - z\mathbb{I})T) \\ &\stackrel{\det(AB)=\det(A)\det(B)}{=} \det(T^{-1}) \det(A - z\mathbb{I}) \det(T) \\ &\stackrel{\det(T^{-1})\det(T)=1=\det(\mathbb{I})}{=} \underbrace{\det(A - z\mathbb{I})}_{\text{char. Pol. von } A} \end{aligned}$$

Ähnliche Matrizen haben also die gleichen Eigenwerte, aber im Allgemeinen unterschiedliche Eigenvektoren.

- $n \times n$ Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ bilden einen Vektorraum.
- **Konvergenz** von Folgen von Matrizen ist komponentenweise Konvergenz

$$A^{(k)} \rightarrow A, k \rightarrow \infty \Leftrightarrow a_{ij}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$$

- Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Dann

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n} \|Ax\| \quad \text{für } \|x\| = 1$$

ist die von $\|\cdot\|$ in $\mathbb{K}^n$ erzeugte natürliche **Matrixnorm**

- Für natürliche Matrixnorm gilt notwendig $\|\mathbb{I}\| = 1$
- Natürliche Matrixnorm ist verträglich mit $\|\cdot\|$, d.h. für $A \in K^{n \times n}$ ist $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, $x \in K^n$
- und submultiplikativ, d.h. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ für $A, B \in K^{n \times n}$

Beispiel 2.50. $\|A\|_F = \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ heißt **Frobenius-Norm**. Sie ist verträglich mit $\|\cdot\|_2$ in K^n und submultiplikativ, aber keine natürliche Matrixnorm, weil $\|\mathbb{I}\|_F = \sqrt{n} \neq 1$ für $n \geq 2$.

Lemma 2.51 (Natürliche Matrixnormen). Die natürlichen Matrixnormen zu $\|\cdot\|_\infty$ (ℓ_∞ / Maximumnorm) und $\|\cdot\|_1$ (ℓ_1 -Norm) in K^n sind

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{Maximale Zeilen-Summen-Norm}$$

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{Maximale Spalten-Summen-Norm}$$

Beweis. 1. Matrixnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm (d.h. erfüllt Normeigenschaften (N1), (N2) und (N3))

2. Z.Z. Verträglichkeit

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \right) \leq \|x\|_\infty \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \|x\|_\infty \cdot \|A\|_\infty$$

$\implies$ Verträglichkeit mit $\|\cdot\|_\infty$

3. Z.Z. $\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$

$$\|Ax\|_\infty = 0 \implies A = 0 \implies \|A\|_\infty = 0 = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$$

Sei $A \neq 0$, dann $\|A\|_\infty > 0$ (Definitheit von Normen). Sei

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{mj}| \text{ für ein } m \in \{1, \dots, n\}.$$

Setze $z_j = \frac{|a_{mj}|}{a_{mj}}$, falls $a_{mj} \neq 0$ und sonst $z_j = 0$. ($z_j = \text{sign}(a_{mj})$). Für $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ gilt

dann $\|z\|_\infty = 1$ und

$$(Az)_m = \sum_{j=1}^n a_{mj} z_j = \sum_{j=1}^n |a_{mj}| = \|A\|_\infty.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= (Az)_m \leq \|Az\|_\infty \leq \sup_{\|y\|_\infty=1} \|Ay\|_\infty \leq \sup_{\|y\|_\infty=1} \|A\|_\infty \cdot \underbrace{\|y\|_\infty}_{=1} = \|A\|_\infty \\ &\implies \|A\|_\infty = \sup_{\|y\|_\infty=1} \|Ay\|_\infty \end{aligned}$$

Beweis für ℓ_1 analog. □

Definition 2.52. 1. Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{K}$ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ = Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$$

2. $\sigma(A) = \{\lambda \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$ heißt **Spektrum** von A .

3. $\forall \lambda \in \sigma(A) \exists$ Eigenvektor $w \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$:

$$Aw = \lambda w$$

Die Eigenvektoren zu λ bilden einen Vektorraum, den **Eigenraum** zu λ mit Dimension = **geometrische Vielfachheit** von λ .

4. Abschätzung der Eigenwerte: Sei $\lambda \in \sigma(A)$ und w ein Eigenvektor zu λ mit $\|w\| = 1$.
Dann $|\lambda| = |\lambda| \cdot \|w\| = \|\lambda w\| = \|Aw\| \underset{\text{Verträglichkeit}}{\leq} \|A\| \cdot \|w\| = \|A\| \implies |\lambda| \leq \|A\|$

5. A heißt **hermitesch**, falls gilt

$$A = \bar{A}^T \quad (a_{ij} = \overline{a_{ji}})$$

Reelle hermitesche Matrizen heißen **symmetrisch**. Für das Skalarprodukt gilt

$$A = \bar{A}^T \Leftrightarrow (Ax, y)_2 = (x, Ay)_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

Hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar = ähnlich zu einer Diagonalmatrix, alle Eigenwerte einer hermiteschen Matrix sind reell. $\exists$ eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren.

6. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt **positiv definit**, wenn gilt $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}$, $(Ax, x)_2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.
Eine hermitesche Matrix ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv.

7. $\|\cdot\|_2$ (ℓ_2 -Norm) im $\mathbb{K}^n$ erzeugt eine natürliche **Matrixnorm (Spektralnorm)** $\|\cdot\|_2$

Lemma 2.53 (Spektralnorm). Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann ist $\bar{A}^T A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch und positiv semidefinit. Für die Spektralnorm gilt

$$\|A\|_2 = \max \left\{ \sqrt{|\lambda|}, \lambda \in \sigma(\bar{A}^T A) \right\}$$

Sei A hermitesch, bzw. symmetrisch, dann gilt $\|A\|_2 = \max\{\sqrt{|\lambda|}, \lambda \in \sigma(A)\}$

Beweis. 1) $\bar{A}^T A$ hermitesch, denn

$$\overline{(\bar{A}^T A)}^T = (A^T \bar{A})^T = \bar{A}^T A.$$

$\bar{A}^T A$ positiv semidefinit, denn

$$(\bar{A}^T A x, x)_2 = (A x, A x)_2 = \|A x\|_2^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

2) Es ist nach Definition

$$\|A\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|A x\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} (A x, A x)_2 = \sup_{\|x\|_2=1} (x, \bar{A}^T A x)_2.$$

Wegen (1) ist $\bar{A}^T A$ hermitesch und positiv semidefinit, d.h. es ex. $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit U unitär und $U^T \bar{A}^T A U = D$, wobei $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda \in \sigma(\bar{A}^T A)$ und $\lambda_i \geq 0$ reell.

Sei $y = \bar{U}^T x = U^{-1} x \implies x = Uy$. Damit folgt mit $|\lambda_{\max}| := \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \in \sigma(\bar{A}^T A)\}$

$$\begin{aligned}
 \|A\|_2^2 &= \sup_{\|x\|_2=1} (x, \bar{A}^T A x)_2 \\
 &= \sup_{\|Uy\|_2=1} \underbrace{(Uy, \bar{A}^T A Uy)}_{=x} \underbrace{\phantom{(Uy, \bar{A}^T A Uy)}}_{=x} \\
 &= \sup_{\|y\|_2=1} (y, \underbrace{\bar{U}^T \bar{A}^T A U}_{=D} y)_2 \\
 &= \sup_{\|y\|_2=1} (y, Dy)_2 \\
 &= \sup_{\|y\|_2=1} \underbrace{(\lambda_1 |y_1|^2 + \dots + \lambda_n |y_n|^2)}_{=\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2} \\
 &\leq \sup_{\|y\|_2=1} \sum_{i=1}^n |\lambda_{\max}| |y_i|^2 \\
 &= |\lambda_{\max}| \sup_{\|y\|_2=1} \|y\|_2^2 \\
 &= |\lambda_{\max}|.
 \end{aligned}$$

Sei y Eigenvektor zu $\lambda_{\max}$ und $\|y\|_2 = 1$. Dann gilt $Dy = \lambda_{\max} y$, also $(y, Dy)_2 = \lambda_{\max} \underbrace{(y, y)_2}_{=1}$. Damit existiert ein y , s.d. $(y, Dy)_2 = \lambda_{\max}$. Also folgt $\sup_{\|y\|_2=1} (y, Dy)_2 = \lambda_{\max}$.

Damit folgt die Behauptung für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Behauptung für A hermitesch analog.

□

Definition 2.54 (orthonormale/unitäre Matrizen). Eine Matrix $Q \in \mathbb{K}^{m \times n}$ heißt **orthonormal**, wenn ihre Spaltenvektoren ein Orthonormalsystem im $\mathbb{K}^m$ bilden, d.h.

$$\begin{aligned}
 Q &= (q_1, \dots, q_n) \quad q_j \in \mathbb{K}^m \\
 (q_i, q_j)_2 &= \sum_{k=1}^m q_{ik} \cdot \overline{q_{kj}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Falls $m = n$ heißt Q unitär.

Lemma 2.55. Sei $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitär. Dann ist Q regulär, $Q^{-1} = \bar{Q}^T$ und $(Qx, Qy)_2 = (x, y)_2$, $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2, \quad x \in \mathbb{K}^n$$

d.h. euklidisches Skalarprodukt und euklidische Norm sind invariant unter unitären Transformationen und folglich $\|Q\|_2 = \|Q^{-1}\|_2 = 1$

Beweis. 1. Z.Z. $Q^{-1} = \bar{Q}^T$

Sei $Q = (q_1, \dots, q_n)$, $\bar{Q}^T = \begin{pmatrix} \bar{q}_1^T \\ \vdots \\ \bar{q}_n^T \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\bar{Q}^T \cdot Q = \begin{pmatrix} \bar{q}_1^T \cdot q_1 & \dots & \bar{q}_1^T \cdot q_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{q}_n^T \cdot q_1 & \dots & \bar{q}_n^T \cdot q_n \end{pmatrix} \stackrel{Q \text{ unitär}}{=} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}
(Qx, Qy)_2 &= (x, \overline{Q}^T Qy)_2 = (x, y)_2 \\
\|Qx\|_2^2 &= (Qx, Qx)_2 = (x, x)_2 = \|x\|_2^2 \\
\|Q\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1 \\
\|Q^{-1}\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Q^{-1}x\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|QQ^{-1}x\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.56 (Störungssatz). Sei $\|\cdot\|$ beliebige natürliche Matrixnorm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$. Die Störungsmatrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hat $\|B\| < 1$. Dann ist die Matrix $\mathbb{I} + B$ regulär und es gilt

$$\|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{K}^n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|(\mathbb{I} + B)x\| &= \|x + Bx\| \\
&\stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\geq} \|x\| - \|Bx\| \\
&\stackrel{\|Bx\| \leq \|B\|\|x\|}{\geq} \|x\| - \|B\| \cdot \|x\| \\
&= \underbrace{(1 - \|B\|)}_{>0} \|x\|
\end{aligned}$$

Also hat die Gleichung $(\mathbb{I} + B)x = 0$ nur die Lösung $x = 0$, also ist $(\mathbb{I} + B)$ injektiv und mit 2.49 regulär. Bleibt zu zeigen: $\|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \|\mathbb{I}\| \\
&= \|(\mathbb{I} + B)(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\
&= \|(\mathbb{I} + B)^{-1} + B(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\
&\stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\geq} \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| - \|B(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\
&\geq \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| - \|B\| \cdot \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\
&= (1 - \|B\|) \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Korollar 2.57. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär und $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ s.d. $\|A - \tilde{A}\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Dann ist $\tilde{A}$ regulär.

Beweis. Es ist $\tilde{A} = \tilde{A} + A - A = (\tilde{A} - A) + A = A \underbrace{(A^{-1}(\tilde{A} - A) + \mathbb{I})}_{=: B}$. Damit folgt $\|B\| = \|A^{-1}(\tilde{A} - A)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{A} - A\| < 1$. Mit 2.56 folgt $\mathbb{I} + A^{-1}(\tilde{A} - A)$ regulär. Da A regulär nach Voraussetzung, folgt $\tilde{A} = A(\mathbb{I} + A^{-1}(\tilde{A} - A))$ regulär. □

Kapitel 3

Funktionen mehrerer Variablen

Wir betrachten im Folgenden Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, mit $D \subseteq \mathbb{K}^n$, $D \neq \emptyset$ und Bildbereich $B_f \subseteq \mathbb{K}$.

Zur Erinnerung:

- Bild und Urbild. Seien $M \subseteq D$, $N \subseteq f(D)$ Teilmengen. Dann heißt

$$f(M) := \{y \in \mathbb{K} \mid \exists x \in M: y = f(x)\}$$

das Bild. Weiter heißt

$$f^{-1}(N) := \{x \in D \mid \exists y \in N: f(x) = y\}.$$

das Urbild. Dann ist $B_f = f(D)$ und $D = f^{-1}(B_f)$

- Notation. $f^{-1}(\cdot)$ meint das Mengen-Urbild, nicht eine Umkehrfunktion.

Da alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ äquivalent sind, sind alle Aussagen unabhängig von der gewählten Norm. Standard ist die euklid. Norm.

3.1 Stetigkeit

Definition 3.1 (Stetigkeit). Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt stetig in einem Punkt $a \in D$, wenn für alle Folgen $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D$ mit $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$ gilt

$$f(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(a).$$

Die Funktion f heißt stetig in D , wenn sie für alle $x \in D$ stetig ist.

Bemerkung 3.2. • Falls $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, dann ist auch $f: M \rightarrow \mathbb{K}$, $M \subseteq D$ stetig.

- f stetig $\implies \operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$ sind stetig.

Lemma 3.3 (ε - δ -Kriterium der Stetigkeit). $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist stetig in $a \in D$, genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.d. $\forall x \in D$ gilt

$$\|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Beweis. wie für $n = 1$. □

Lemma 3.4. Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0 \forall x \in D$) stetig.

Beweis. wie für $n = 1$. □

Satz 3.5. Eine stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist auf jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ beschränkt, d.h.

$$\exists M_K \text{ s.d. } |f(x)| \leq M_K \quad \forall x \in K.$$

Beweis. Ang.: $f(x)$ nicht beschränkt auf K . Dann gilt: $\forall k \in \mathbb{N}, \exists x^{(k)} \in K$ mit $|f(x^{(k)})| > k$, d.h. $|f(x^{(k)})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$.

Die Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt auf der kompakten Menge K eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = x \in K$.

Da f stetig, folgt $|f(x^{(k_j)})| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} |f(x)|$. Widerspruch zu $|f(x^{(k)})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. □

Satz 3.6 (Extremum). Eine stetige Funktion $f: D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ nimmt auf jeder nichtleeren kompakten Menge $K \subseteq D$ ihr Maximum und Minimum an, d.h. es ex. x^{max} und $x^{min} \in K$, s.d.

$$\begin{aligned} f(x^{max}) &= \sup_{x \in K} f(x) =: \max_{x \in K} f(x) \\ f(x^{min}) &= \inf_{x \in K} f(x) =: \min_{x \in K} f(x). \end{aligned}$$

Beweis. f stetig und deshalb beschränkt auf K , d.h. es ex. obere Schranke $M := \sup_{x \in K} f(x)$.

Außerdem existiert eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K$, s.d. $f(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$. Da K kompakt, existiert eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a =: x^{max} \in K$. Wegen der Stetigkeit von f , folgt aus $f(x^{(k_j)}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x^{max})$: $f(x^{max}) = M$. □

Bemerkung 3.7 (Anwendung von Satz 3.6). Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{K}^n$, $K_1 \neq \emptyset$, $K_2 \neq \emptyset$ kompakt. Dann ist die Menge $K_1 \times K_2$ auch kompakt. Definiere $f(x, y) := \|x - y\|$, $x \in K_1$, $y \in K_2$.

$f(x, y)$ ist stetig, denn

$$|f(x, y) - f(x', y')| = ||x - y| - |x' - y'|| \stackrel{\Delta\text{-ungl.}}{\leq} \|x - y - x' + y'\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\|.$$

$\forall x, x' \in K_1$ und $\forall y, y' \in K_2$ mit $\|x - x'\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|y - y'\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ gilt

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Also ist $f(x, y)$ stetig auf $K_1 \times K_2$. Mit 3.6 folgt damit: $\exists a \in K_1, b \in K_2$, s.d.

$$\|a - b\| = \inf_{x \in K_1, y \in K_2} \|x - y\| =: d(K_1, K_2) \quad \text{Abstand zwischen Mengen } K_1 \text{ und } K_2.$$

Im Fall $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, gilt $d(K_1, K_2) > 0$. Falls $K_1 = \{a\}$, dann heißt $b \in K_2$ die Projektion des Punktes a auf K_2 (diese ist im Allg. nicht eindeutig bestimmt).

Definition 3.8 (Gleichmäßige Stetigkeit). Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, s.d.

$$\forall x, y \in D: \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Satz 3.9. Eine stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist auf einer kompakten Menge $K \subseteq D$ gleichmäßig stetig.

Beweis. Ang. f nicht gleichmäßig stetig. Dann $\exists \varepsilon > 0$, s.d. $\forall k \in \mathbb{N}$, ex. Punkte $x^{(k)}$ und $y^{(k)} \in K$, s.d.

$$\|x^{(k)} - y^{(k)}\| < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \left| f(x^{(k)}) - f(y^{(k)}) \right| > \varepsilon.$$

Da K kompakt, ex. eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = x \in K$.

Wir haben $\|x^{(k)} - y^{(k)}\| < \frac{1}{k}$, also

$$\|x^{(k_j)} - y^{(k_j)}\| < \frac{1}{k_j} \implies \lim_{j \rightarrow \infty} y^{(k_j)} = x = \lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)}.$$

Da f stetig, folgt

$$\left| f(x^{(k_j)}) - f(y^{(k_j)}) \right| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} |f(x) - f(x)| = 0.$$

Widerspruch zu $|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| > \varepsilon$. □

Definition 3.10 (Konvergenz von Funktionenfolgen). Sei $f_k: D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert

- punktweise gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{K}$, falls $\forall x \in D$ gilt $f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)$.
- gleichmäßig, falls $\sup_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Satz 3.11 (Gleichmäßige Konvergenz). Sei $f_k: D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig mit $f: D \rightarrow \mathbb{K}$. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.d. $\sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Da f_n stetig, ex. $\delta > 0$, s.d. $\forall y \in D$ gilt: $\|x - y\| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Dann gilt $\forall x, y \in D$ mit $\|x - y\| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist f stetig in x . □

Bemerkung 3.12. Analoge Sätze gelten allgemein für Funktionen auf kompakten Mengen in normierten $(V, \|\cdot\|)$ oder metrischen $(X, d(\cdot, \cdot))$ Räumen.

Definition 3.13 (Offene, abgeschlossene Menge bzgl. einer Obermenge aus $\mathbb{K}^n$).

- 1) Eine Teilmenge $M \subset G \subset \mathbb{K}^n$ heißt relativ - offen bzgl. G , falls $\forall a \in M$:

$$\exists \text{ Kugelumgebung } K_r(a) \text{ s.d. } (K_r(a) \cap G) \subset M$$

- 2) $M \subset G \subset \mathbb{K}^n$ heißt relativ-abgeschlossen (bzgl. G), falls $(M^c \cap G) \subset G$ relativ-offen bzgl. G ist.

- 3) Eine Menge $G \subset \mathbb{K}^n$ heißt zusammenhängend, falls *keine* relativ-offene Zerlegung $G = U \cup V$ mit $U, V \neq \emptyset$ und $\overline{U} \cap V = \emptyset$ existiert.

- 4) Eine offene und zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{K}^n$ heißt Gebiet.

Beispiel 3.14. Einheitssphäre $S_1(0) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Als Teilmenge in $\mathbb{K}^n$ ist $S_1(0)$ abgeschlossen.

Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ und offen: Dann ist $M \cap S_1(0)$ als Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ weder offen noch abgeschlossen; als Teilmenge in $S_1(0)$ ist $M \cap S_1(0)$ relativ-offen bzgl. $S_1(0)$.

Extrembeispiel: $M = S_1(0)$ ist als Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen, aber bzgl. $S_1(0)$ relativ-offen und relativ-abgeschlossen.

- $M \cap G$ ($M \subset \mathbb{K}^n$, offen), $G \subset \mathbb{K}^n$, ist immer relativ-offen bzgl. G .
- $M \cap G$ ($M \subset \mathbb{K}^n$, abgeschlossen), $G \subset \mathbb{K}^n$, ist immer relativ-abgeschlossen bzgl. G .

Lemma 3.15. Sei $f : \overline{D} \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Dann gilt:

- 1) Das Urbild $f^{-1}(O)$, wobei $O \subset f(D)$ relativ-offen, ist relativ-offen in D .
- 2) Das Urbild $f^{-1}(A)$, wobei $A \subset f(\overline{D})$ abgeschlossen, ist abgeschlossen.
- 3) Das Bild $f(K)$, wobei $K \subset D$ kompakt, ist kompakt.
- 4) Das Bild $f(G)$, wobei $G \subset D$ zusammenhängend, ist zusammenhängend.

Beweis.

- 1) Sei $O \subset f(D)$ eine relativ-offene Menge. Für O gilt: $\forall f(a) \in O \exists$ relative Kugelumgebung in O :

$$(K_\varepsilon(f(a)) \cap f(D)) \subset O \text{ für ein } \varepsilon > 0.$$

f stetig in $a \implies$ für dieses $\varepsilon \exists \delta > 0$ s.d. für $K_\delta(a) \cap D$ gilt $f(K_\delta(a) \cap D) \subset (K_\varepsilon(f(a)) \cap f(D)) \subset O \implies \forall a \in D$ (mit $f(a) \in O$) gilt

$$(K_\delta(a) \cap D) \subset f^{-1}(O) \implies f^{-1}(O)$$

relativ-offen.

- 2) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $f^{-1}(A)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \in \overline{D}$. Aufgrund der Stetigkeit von f konvergiert die Bildfolge $(f(x^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{f(x^{(k)})}_{\in A} = f(x)$. Da A

abgeschlossen ist, gilt wegen der Charakterisierung über Folgenkonvergenz auch $f(x) \in A \implies x \in f^{-1}(A) \implies f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

3) **Z.Z** $f(K) \subset \mathbb{K}$ beschränkt und abgeschlossen ($\implies$ kompakt).

- Die Beschränktheit folgt aus der Beschränktheit von stetigen Funktionen auf kompakten Mengen.
- Abgeschlossenheit: Sei $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset f(K)$ eine beliebige Folge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = y \in \mathbb{K}$.

Die Urbildfolge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \left(= \underbrace{f^{-1}(y^{(k)})}_{\text{Urbild von } y^{(k)}} \right)$ in K hat aufgrund der Kompaktheit von K eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = x \in K$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{f(x^{(k_j)})}_{=y^{(k_j)}} = y \implies y \in f(K) \implies f(K)$ abgeschlossen.

4) Ann: $f(G)$ nicht zusammenhängend. Nach Definition existieren dann $U, V \in \mathbb{K}^n$, $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$, relativ offen, s.d. $f(G) = U \cup V$. Für die Urbildmengen gilt also

$$U' = \{x \in G \mid f(x) \in U\}, \quad V' = \{x \in G \mid f(x) \in V\}, \quad U' \cap V' = \emptyset, U' \neq \emptyset, V' \neq \emptyset,$$

nach 1) sind U' und V' relativ offen und $G = U' \cup V'$

$$\implies G \text{ nicht zusammenhängend } \nlessdot$$

$$\implies f(G) \text{ zusammenhängend.}$$

□

Satz 3.16 (Zwischenwertsatz). Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und D zusammenhängend. Dann nimmt f für alle $a, b \in D$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Insbesondere hat f eine Nullstelle in D , falls $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Beweis. Wegen Lemma 3.15 ist der Bildbereich $f(D) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend.

Z.Z. $f(D)$ ist ein (zusammenhängendes) Intervall.

Annahme: $f(D)$ ist kein Intervall $\implies \exists f(x), f(y) \in f(D)$ und $z \notin f(D)$ zwischen $f(x)$ und $f(y)$. Dann sind die Mengen

$$U := f(D) \cap (-\infty, z), \quad V := f(D) \cap (z, \infty)$$

disjunkt, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, U, V sind relativ-offen bzgl. $f(D)$ und $U \cup V = f(D)$

$$\implies f(D) \text{ nicht zusammenhängend } \nlessdot$$

□

3.2 Vektor- und Matrixwertige Funktionen

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^m \\ f : D \subset \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^{r \times s} \\ f : D \subset \mathbb{K}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{K}^{r \times s} \end{aligned}$$

- Mit Hilfe von Normen in $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^{m \times n}$ sind die Definitionen von Stetigkeit etc. übertragbar auf Vektor- und Matrixwertige Funktionen. $\implies$ solche stetigen Abbildungen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig und beschränkt.
- $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ stetig $\Leftrightarrow$ alle Komponenten $f_i : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$ sind stetig (genauso für $f : D \subset \mathbb{K}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{K}^{r \times s}$ etc.)

Lemma 3.17. Seien $g : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow B \subset \mathbb{K}^m$ und $f : B \rightarrow \mathbb{K}^r$ stetig. Dann ist die Komposition $f \circ g : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^r$ stetig.

Beweis. Sei $x \in D$, $x^{(k)} \in D$ s.d. $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$. Es gilt

$$\begin{aligned} g \text{ stetig} &\implies y^{(k)} = g(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g(x) =: y \\ f \text{ stetig} &\implies (f \circ g)(x^{(k)}) = f(g(x^{(k)})) = f(y^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(y) \end{aligned}$$

Also ist $(f \circ g)$ stetig. □

Lemma 3.18. Sei $D \subset \mathbb{K}^n$ kompakt und $f : D \rightarrow B \subset \mathbb{K}^m$ injektiv und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow D$ stetig.

Beweis. Sei $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in B mit $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = y \in B$.

$$\textbf{Z.Z.} \quad \underbrace{f^{-1}(y^{(k)})}_{=: x^{(k)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \underbrace{f^{-1}(y)}_{=: x} (\implies f^{-1} \text{ stetig}), \text{ d.h. } x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x.$$

Die Folge $(x^{(k)}) \subset D$ ist aufgrund der Beschränktheit von D auch beschränkt, also existiert eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = \xi \in D$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f(x^{(k_j)}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(\xi)$. Außerdem gilt

$$f(x^{(k_j)}) = y^{(k_j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y \implies y = f(\xi) \xrightarrow[f \text{ injektiv}]{y=f(x)} x = \xi.$$

Also konvergieren alle konvergenten Teilfolgen von $(x^{(k)})$ gegen $x \implies x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. □

3.2.1 Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme

Motivation: Es sei ein quadratisches Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= b_1 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= b_n, \end{aligned}$$

eine Vektorform $f(x) = b$ und ein $b \in \mathbb{K}^n$ gegeben, s.d.

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Ziel: $x = f^{-1}(b)$ finden als Grenzwert einer Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

Ansatz: Definiere $g(x) := x - \sigma(f(x) - b)$ für ein $\sigma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und suche Fixpunkt von $g: D \rightarrow \mathbb{K}^n$ ($x = g(x)$).

Fixpunktiteration: Startwert $x^{(0)}$. Iterationsschritt

$$x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Falls f stetig, dann ist auch g stetig. Damit folgt, falls $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$, dann $g(x^{(k-1)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g(x)$.
Damit folgt

$$\underbrace{x^{(k)}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} x} = \underbrace{g(x^{(k-1)})}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} g(x)}.$$

Für $k \rightarrow \infty$, folgt also $x = g(x)$, also ist x Fixpunkt. Damit folgt $x = g(x) = x - \sigma(f(x) - b) \implies f(x) = b$.

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Fixpunktiteration?

Definition 3.19 (Lipschitz-Stetigkeit). Eine Funktion $g: D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante $L < \infty$ existiert, s.d.

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

Falls $L < 1$ heißt g Kontraktion (bezügl. Norm $\|\cdot\|$).

Satz 3.20 (Banachscher Fixpunktsatz). Sei $g: D \subseteq \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Funktion mit den Eigenschaften

- 1) $g(M) = M$ für ein $M \subseteq D$, M abgeschlossen
- 2) g ist Kontraktion auf M , d.h. $\exists L < 1$, s.d. $\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|$, $\forall x, y \in M$.

Dann gilt

- (i) Es existiert genau ein Fixpunkt $x^* \in M$ von g .
- (ii) $\forall x^{(0)} \in M$ ist die Iterationsfolge $x^{(k)} = g(x^{(k-1)})$ wohldefiniert ($x^{(k)} \in M$) und $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$.

(iii) Es gilt die Abschätzung:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Beweis. (i) Seien $x, x' \in M$ zwei Fixpunkte. Dann

$$\|x - x'\| = \|g(x) - g(x')\| \leq L\|x - x'\|.$$

Damit folgt

$$\underbrace{(1-L)}_{>0} \underbrace{\|x - x'\|}_{\geq 0} \leq 0 \implies \|x - x'\| = 0 \implies x = x'.$$

(ii) $g(M) = M \implies x^{(k)} = g(x^{(k-1)})$, $k \in \mathbb{N}$ ist wohldefiniert, d.h. $x^{(k)} \in M$, $\forall k \in \mathbb{N}$, falls $x^{(0)} \in M$.

Z.z.: $x^{(k)}$ konvergiert mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \in M$, also g.z.z.: $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

$$\begin{aligned} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| &= \|g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})\| \\ &\leq L\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \\ &= L\|g(x^{(k-1)}) - g(x^{(k-2)})\| \\ &\leq L \cdot L \cdot \|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\| \\ &\leq \underbrace{L \cdot \dots \cdot L}_k \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &= L^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \end{aligned}$$

Seien k, m beliebig. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| &= \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)} + x^{(k+m-1)} - \dots - x^{(k+1)} + x^{(k)}\| \\ &\leq \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}\| + \dots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &= L^{m-1}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + L^{m-2}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \dots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &= (L^{m-1} + L^{m-2} + \dots + 1) \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &= \frac{1-L^m}{1-L} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &\leq \frac{1-L^m}{1-L} L^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &\leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &\stackrel{L < 1}{<} \varepsilon \quad \text{für } k \text{ groß genug.} \end{aligned}$$

Also ist $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M und es existiert ein $x^* \in M$, s.d. $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x^* konvergiert. x^* ist ein Fixpunkt von g , weil

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x^{(k-1)}) \stackrel{g \text{ stetig}}{=} g\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k-1)}\right) = g(x^*).$$

(iii) Für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\| \underbrace{x^{(k+m)}}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} x^*} - x^{(k)} \| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \implies \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

□

Bemerkung 3.21. Für den Beweis ist wichtig, dass der grundlegende Raum vollständig ist, d.h. dass alle Cauchy-Folgen in diesem Raum konvergieren.

Bemerkung 3.22 (Anwendung: Lineare Gleichungssysteme). $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär und $b = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$. Da A regulär, hat das LGS $Ax = b$ genau eine Lösung $x^* = A^{-1}b$. Sei $g(x) := x - \sigma(Ax - b)$ mit $\sigma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Fixpunktiteration $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \sigma(Ax^{(k-1)} - b)$, $k \in \mathbb{N}$ konvergiert, wenn g kontraktiv ist. Zum Beispiel in ℓ_2 :

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\|_2 &= \|x - \sigma(Ax - b) - y + \sigma(Ay - b)\|_2 \\ &= \|x - y - \sigma A(x - y)\|_2 \\ &= \|(\mathbb{I} - \sigma A)(x - y)\|_2 \\ &\leq \|\mathbb{I} - \sigma A\|_2 \|x - y\|_2, \end{aligned}$$

d.h. g kontraktiv, falls $\|\mathbb{I} - \sigma A\|_2 < 1$.

Frage: Wahl von σ ? Wähle $\sigma = \|A\|_\infty^{-1} = \frac{1}{\|A\|_\infty}$, falls A hermitesch und positiv definit (= „Richardson Iteration“). Zu überprüfen $\left\| \mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty} \right\|_2 < 1$. Da A positiv definit und hermitesch, sind alle Eigenwerte $\lambda > 0$. Es gilt $\forall$ EW: $0 < \lambda \leq \|A\|_\infty$. Für EW von $\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty}$ gilt $\mu = 1 - \frac{\lambda}{\|A\|_\infty}$, λ Eigenwert von A . Also $0 \leq \underbrace{1 - \frac{\lambda}{\|A\|_\infty}}_{=\mu} < 1$, mit 2.53 folgt $\underbrace{\left\| \mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty} \right\|_2}_{\text{hermitesch}} < 1$. Falls A hermitesch und positiv definit, ist also die Richardson Iteration konvergent.

Definition 3.23 (Starke Monotonie). Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt stark monoton, wenn eine Konstante $m > 0$ existiert, s.d. $\forall x, y \in D$ gilt

$$(f(x) - f(y), x - y)_2 \geq m \|x - y\|_2^2.$$

Bemerkung 3.24 (Anwendung: Nichtlineare Gleichungssysteme). Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig mit L und stark monoton mit $m > 0$. Betrachte $f(x) = b$, $g(x) := x - \theta(f(x) - b)$.

Frage: Wahl von θ , s.d. $\forall x^{(0)} \in D$ die Fixpunktiteration konvergiert? Es ist

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\|_2^2 &= \|x - \theta(f(x) - b) - y + \theta(f(y) - b)\|_2^2 \\ &= \|x - y - \theta(f(x) - f(y))\|_2^2 \\ &= \|x - y\|_2^2 - 2\theta(x - y, f(x) - f(y))_2 + \theta^2 \|f(x) - f(y)\|_2^2 \\ &\leq \|x - y\|_2^2 - 2\theta m \|x - y\|_2^2 + \theta^2 L^2 \|x - y\|_2^2 \\ &= (1 - 2\theta m + \theta^2 L^2) \|x - y\|_2^2. \end{aligned}$$

Die Fixpunktiteration konvergiert, falls $1 - 2\theta m + \theta^2 L^2 < 1$, d.h. für $\theta \in (0, \frac{2m}{L^2})$. Dann existiert ein $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ mit $g(x^*) = x^*$. Ist x^* eindeutig? Seien x, x' zwei Lösungen. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{(f(x) - b + b - f(x'), x - x')_2}_{=0} \\ &= (f(x) - f(x'), x - x')_2 \\ &\stackrel{f \text{ stark monoton}}{\geq} m \|x - x'\|_2^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Also $x = x'$, damit ist x^* eindeutig.

Kapitel 4

Differenzierbare Funktionen in $\mathbb{R}^n$

Betrachte die Abbildung $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Stetigkeitsdefinition von f entspricht der Stetigkeit von f in $\mathbb{R}$. Aber: Differenzierbarkeit einer Funktion $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Für $h \in \mathbb{R}^n$ nicht sinnvoll.

4.1 Partielle Differenzierbarkeit

Definition 4.1 (Partielle Ableitung). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- f heißt im Punkt $x \in D$ partiell differenzierbar nach i -ter Koordinatenrichtung, falls der Grenzwert

$$\partial_i f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cdot e^{(i)}) - f(x)}{h}.$$

existiert mit $e^{(i)} := i$ -te Spalte der $n \times n$ Einheitsmatrix. Schreibweise auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ oder $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

- f heißt partiell differenzierbar in $x \in D$, falls $\partial_i f(x)$ für alle $1 \leq i \leq n$ existieren.
- Sind $\partial_i f(x) \forall i$ stetig, dann heißt f stetig partiell differenzierbar.
- Falls $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dann heißt f (stetig) partiell differenzierbar, falls alle Komponentenfunktionen f_j ($1 \leq j \leq m$) (stetig) partiell differenzierbar in $x \in D$ sind, d.h. wenn $\partial_i f_j(x) \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ existieren.

Bemerkung 4.2 (Interpretation als gewöhnliche Ableitung). Sei $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Definiere $\tilde{f}(\xi) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)$, d.h. $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fest. Dann ist

$$\partial_i f(x) = \frac{d\tilde{f}(\xi)}{d\xi}.$$

D.h. für partielle Ableitungen gelten analoge Regeln, wie für die gewöhnliche Ableitung, insbesondere Produktregel, Quotientenregel und auch Kettenregel.

Beispiel 4.3. Die Funktion

$$r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

ist in $D = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\partial_i r(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \stackrel{\text{gew. Kettenregel}}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

Sei $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige differenzierbare Funktion. Dann ist $f(x) = F(r(x))$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiert und partiell differenzierbar.

$$\partial_i f(x) = \frac{dF(r(x))}{dy} \partial_i r(x) = F'(r(x)) \frac{x_i}{\|x\|_2} = F'(r(x)) \frac{x_i}{r(x)}.$$

Bemerkung 4.4. Für $n = 1$ gilt: f differenzierbar $\implies f$ stetig. Für $n > 1$ und f partiell differenzierbar, folgt i.A. nicht, dass f stetig ist.

Satz 4.5. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Für $x \in D$ gelte: $\exists K_r(x) \subseteq D$, s.d. die partiellen Ableitungen $\partial_i f(y)$, $i = 1, \dots, n$ beschränkt sind $\forall y \in K_r(x)$, d.h.

$$\sup_{y \in K_r(x)} |\partial_i f(y)| \leq M, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt f stetig in Punkt x .

Beweis. Sei $n = 2$ und $y = (y_1, y_2) \in K_r(x)$. Es ist

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)$$

Mit y_2 fest, folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \xi = \xi(y_2)$ zwischen y_1 und x_1 , also

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) \stackrel{\text{MWS}}{=} \partial_1 f(\xi, y_2)(y_1 - x_1)$$

Analog für x_1 fest und $\eta(x_1)$ zwischen y_2 und x_2

$$f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2) \stackrel{\text{MWS}}{=} \partial_2 f(x_1, \eta)(y_2 - x_2)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \underbrace{|\partial_1 f(\xi, y_2)|}_{\leq M} |y_1 - x_1| + \underbrace{|\partial_2 f(x_1, \eta)|}_{\leq M} |y_2 - x_2| \\ &\leq M(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) \\ &= M\|y - x\|_1. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon \in (0, r]$ beliebig, dann gilt für $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$

$$\|y - x\|_1 \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Also f stetig in x und wegen $|f(y) - f(x)| \leq M\|y - x\|_1$ sogar Lipschitz-stetig. Für $n > 2$ analog. $\square$

Definition 4.6. Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit $\partial_i f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- Falls $\partial_i f$ partiell differenzierbar sind, dann heißt f zweimal partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\partial_i \partial_j f(x) := \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right).$$

- f heißt k -mal stetig partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung von f existieren und stetig sind.

Bemerkung 4.7. Im Allgemeinen ist $\partial_i \partial_j f(x) \neq \partial_j \partial_i f(x)$!

Satz 4.8 (Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung $K_r(x) \subseteq D$ eines Punktes $x \in D$. Dann gilt

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Allgemein: Für eine k -mal stetig partiell differenzierbare Funktion ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar.

Beweis. 1) Sei $n = 2$ und

$$A := \underbrace{f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2)}_{=\varphi(x_1 + h_1)} - \underbrace{f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2)}_{=\varphi(x_1)}.$$

Definiere $\varphi(x) := f(x, x_2 + h_2) - f(x, x_2)$. Dann ist $A = \varphi(x_1 + h_1) - \varphi(x_1)$. Mit dem MWS bezügl. x_1 folgt

$$\varphi(x_1 + h_1) - \varphi(x_1) = \varphi'(x_1 + \theta_1) \cdot h_1, \quad \theta_1 \in (0, h_1)$$

Für φ' gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(x_1) &= \partial_1 f(x_1, x_2 + h_2) - \partial_1 f(x_1, x_2) \\ &\stackrel{\text{MWS bezügl. } x_2}{=} \partial_2(\partial_1 f(x_1, x_2 + \theta'_1)) \cdot h_2, \quad \theta'_1 \in (0, h_2) \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\varphi'(x_1 + \theta_1) = \partial_2(\partial_1 f(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta'_1)) h_2.$$

Und damit ist

$$A = \varphi'(x_1 + \theta_1) h_1 = \partial_2(\partial_1 f(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta'_1)) \cdot h_1 \cdot h_2$$

Analog definiere $\psi(x) := f(x_1 + h_1, x) - f(x_1, x)$, dann

$$\begin{aligned} A &= \psi(x_2 + h_2) - \psi(x_2) \\ &\stackrel{\text{wie oben}}{=} h_2 \psi'(x_2 + \theta_2) \\ &= h_1 \cdot h_2 \partial_1(\partial_2 f(x_1 + \theta_2, x_2 + \theta'_2)), \quad \theta_2 \in (0, h_1), \theta'_2 \in (0, h_2). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\partial_2 \partial_1 f(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta'_1) = \frac{A}{h_1 \cdot h_2} = \partial_1 \partial_2 f(x_1 + \theta_2, x_2 + \theta'_2).$$

Die partiellen Ableitungen $\partial_2 \partial_1 f$ und $\partial_1 \partial_2 f$ sind stetig in $K_r(x)$, also gilt für $h_1, h_2 \rightarrow 0$, d.h. $x_1 + \theta_1 \rightarrow x_1, x_2 + \theta'_1 \rightarrow x_2, \dots$

$$\begin{aligned}\partial_2 \partial_1 f(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta'_1) &\xrightarrow{h_1, h_2 \rightarrow 0} \partial_2 \partial_1 f(x) \\ \partial_1 \partial_2 f(x_1 + \theta_2, x_2 + \theta'_2) &\xrightarrow{h_1, h_2 \rightarrow 0} \partial_1 \partial_2 f(x).\end{aligned}$$

Also $\partial_1 \partial_2 f(x) = \partial_2 \partial_1 f(x)$. Für $n > 2$ analog.

2) Sei f k -mal stetig differenzierbar. Dann folgt durch Induktion nach k

$$\partial_1 \dots \partial_k f(x) = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(x).$$

für jede Permutation $(i_1, \dots, i_k)$ von $(1 \dots k)$.

□

Definition 4.9 (Begriffe der Vektoranalysis). • Gradient: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Der Vektor

$$\text{grad} f(x) := \nabla f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt der Gradient von f in $x \in D$.

- Hesse-Matrix: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Die Matrix

$$H_f(x) := \nabla^2 f(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt Hesse-Matrix von f im Punkt $x \in D$.

- Jacobi-Matrix: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine partiell differenzierbare Vektorfunktion. Die Matrix

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobimatrix von f in $x \in D$.

Schreibweise: $J_f(x) = f'(x) = (\nabla f(x))^T$.

Beispiel 4.10. $r(x) = \|x\|_2$.

$$\nabla r(x) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \partial_i r(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{x_i}{r(x)} \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Für die Hesse-Matrix $\nabla^2 r(x) = \left(\partial_j \frac{x_i}{r(x)} \right)_{i,j=1}^n$ folgt

$$\partial_j \left(\frac{x_i}{r(x)} \right) = \begin{cases} \frac{r(x) - x_i \frac{x_i}{r(x)}}{r(x)^2} = \frac{1}{r(x)} - \frac{x_i^2}{r(x)^3} & i = j \\ -\frac{x_i \frac{x_j}{r(x)}}{r(x)^2} = -\frac{x_i x_j}{r(x)^3} & i \neq j \end{cases}.$$

Diese Hesse-Matrix ist die Jacobi-Matrix der Vektorfunktion $v(x) = \frac{x}{r(x)} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{x_i}{r(x)} \\ \vdots \end{pmatrix}$.