

0.1 Fourier-Entwicklung

Definition 0.1 (Periodische Funktionen). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt L -periodisch ($L > 0$) falls $f(x + L) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\implies f(x + kL) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$). Sei f periodisch und $p > 0$. Für $\tilde{f}(x) := f\left(\underbrace{\frac{L}{p}x}_{\text{Variablentransformation}}\right)$ gilt dann $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ist p -periodisch

Beispiel 0.2. $p = 2\pi$

$$\tilde{f}(x) := f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \implies f(x) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) \stackrel{f \text{ } L\text{-per}}{=} f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = \tilde{f}$$

Hier betrachten wir deshalb nur 2π -periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$. Weiterhin betrachten wir Funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{K}$, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π -periodisch.

Beispiel 0.3 (Trigonometrische Polynome). Für $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ betrachte

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k)e^{ikx} + (a_k + ib_k)e^{-ikx} \right) \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \text{ mit } c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k \geq 0 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(*) : \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Für $a_k, b_k, k > 0$ ergibt sich $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Bemerkung 0.4. Ist f ein trigonometrisches Polynom, so kann man die Koeffizienten a_k, b_k, c_k durch Integration ausrechnen, d.h. a_k, b_k, c_k sind eindeutig.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \quad k > 0 \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx}), \quad L_2\text{-Skalarprodukt} \end{aligned}$$

Beweis. Sei zuerst $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\lambda x} dx &= \int_a^b \cos(\lambda x) dx + i \int_a^b \sin(\lambda x) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} i \cos(\lambda x) \Big|_a^b \\ &\stackrel{\frac{1}{i} = -i}{=} \frac{1}{\lambda i} (\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{\lambda i} e^{i\lambda x} \Big|_a^b \end{aligned}$$

$$\implies \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_1 x} e^{-ik_2 x} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k_1 - k_2)x} dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k_1 \neq k_2 \\ 2\pi, & \text{falls } k_1 = k_2 \quad (\implies k_1 - k_2 = 0) \end{cases}$$

$\implies$ Behauptung für c_k . Für a_k, b_k gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) dx = c_{-k} + c_k = b_k \cdot i$$

□

Bemerkung 0.5. Obige Formel gilt auch für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

falls die Reihen gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ konvergieren.

Frage: Hat jede 2π -periodische Funktion die Form $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ oder kann man sie durch trigonometrische Polynome approximieren? $\implies$ Motivation für Fourier-Reihen.

Definition 0.6 (Fourier-Reihe). Sei $f \in R[a, b]$ 2π -periodisch. Die Fourier-Koeffizienten von f sind gegeben durch

$$c_k := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx})$$

Die (formale) Fourier-Reihe von f ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit der n-ten Partialsumme

$$s_n(x) = s_n(f, x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Die Fourier-Reihe lässt sich in der Form schreiben

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx$$

Satz 0.7. Sei $f \in R[a, b]$ eine 2π -periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$ und $s_n = \sum_{k=1}^n c_k e^{ikx}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Beweis. Notation $e_n(x) := e^{inx}$

$$(e_k, e_l) = \int_0^{2\pi} e_{ikx} e^{-ikx} \, dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} \, dx = \begin{cases} 2\pi, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx = \frac{1}{2\pi} (f, e_k) \implies (f, e_k) = 2\pi c_k$$

$$(f, s_n) = \sum_{k=-n}^n (f, c_k e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} (f, e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} 2\pi c_k = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

$$(s_n, s_n) = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n \underbrace{c_k \overline{c_l}}_{|c_k|^2} \cdot \underbrace{(e_k, e_l)}_{= \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l \end{cases}}$$

Dann

$$\begin{aligned} \|f - s_n\|^2 &= (f - s_n, f - s_n) \\ &= (f, f) - (f, s_n) - (s_n, f) + (s_n, s_n) \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \end{aligned}$$

□

Satz 0.8 (Besselsche Umgebung). Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Funktion mit Fourier-Koeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2\pi}$$

Beweis. Aus Satz 0.7

$$2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \|f\|^2 - \underbrace{\|f - s_n\|^2}_{\geq 0} \leq \|f\|^2$$

Die Konvergenz folgt unter Beachtung der Monotonie und Beschränktheit der Folge

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

□

Bemerkung 0.9. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ 2π -periodisch und $\|f - s_n\|^2 \xrightarrow{L^2} 0$, $n \rightarrow \infty$, d.h. die Fourier-Reihe konvergiert gegen f in L^2 . Das ist nach Satz 0.7 äquivalent zu

$$\|f\|^2 = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \Leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Frage: Unter welchen Bedingungen für f gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

mit den Fourier-Koeffizienten c_k .

Ziel: Zeige die Parsevalsche Gleichung für die Fourier-Koeffizienten c_k , $\{e_k = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$, $f \in R[a, b] \Rightarrow$ Konvergenz der Fourier-Reihe in L^2 .

Lemma 0.10. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)} - \frac{1}{2}$$

Beweis. $\cos(kt) = \frac{1}{2} (e^{ikt} + e^{-ikt})$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \\
 &= \frac{1}{2} e^{-int} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}}_{\text{geometrische Summenformel}} \\
 &= \frac{1}{2} e^{-int} \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^{-int} - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}} \\
 &\stackrel{\text{Erweitern}}{=} \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}
 \end{aligned}$$

□

Lemma 0.11. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es gilt für $x \in [a, b]$ und $s \in \mathbb{R}$

$$F_s(x) := \int_a^x f(y) \sin(sy) \, dy$$

konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $|s| \rightarrow \infty$ und $x \in [a, b]$.

Beweis. Sei $s \neq 0$.

$$F_s(x) = \int_a^x f(y) \sin(sy) \, dy \stackrel{\text{part. Integr.}}{=} f(y) \frac{1}{s} \cos(sy) \Big|_a^x + \int_a^x \frac{1}{s} \cos(sy) f'(y) \, dy.$$

f, f' stetig auf $[a, b] \Rightarrow \exists M > 0$, s.d. $|f(y)| \leq M, |f'(y)| \leq M$ mit $y \in [a, b]$. Dann gilt $|F_s(x)| \leq \frac{2M}{|s|} + \frac{M}{|s|} \cdot (b-a), \forall x \in [a, b]$. Also konvergiert $|F_s(x)|$ gleichmäßig gegen 0 für $|s| \rightarrow \infty$ und $x \in [a, b]$. □

Lemma 0.12. Es gilt $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ für $0 < x < 2\pi$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen Intervallen $[\delta, 2\pi - \delta]$ für $\delta > 0$.

Beweis. Aus Hilfslemma 0.10 folgt für $0 < x < 2\pi$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^n \int_{\pi}^x \cos(ky) \, dy \\
 &= \int_{\pi}^x \left(\sum_{k=1}^n \cos(ky) \right) \, dy \\
 &\stackrel{\text{Lemma 0.10}}{=} \int_{\pi}^x \left(\frac{\sin((n + \frac{1}{2})y)}{2 \sin(\frac{1}{2}y)} - \frac{1}{2} \right) \, dy \\
 &= \underbrace{\int_{\pi}^x \frac{\sin((n + \frac{1}{2})y)}{2 \sin(\frac{1}{2}y)} \, dy}_{=: F_n(x)} - \frac{1}{2}(x - \pi)
 \end{aligned}$$

Z.Z.: $F_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. Die Funktion $f(y) = \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2})}$ ist auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ stetig differenzierbar, weil $\frac{y}{2} \neq 0$ auf $[\delta, 2\pi - \delta]$, sodass aus Hilfslemma 0.11 folgt

$$F_n(x) = \int_{\pi}^x \frac{1}{2 \sin(\frac{y}{2})} \cdot \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) \, dy \xrightarrow{\text{glm.}} 0$$

für $n \rightarrow \infty$ und $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$. □

Lemma 0.13. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

konvergiert gleichmäßig $\forall x, 0 \leq x \leq 2\pi$. Insbesondere gilt für $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis. Lemma 0.12 $\implies \forall x, y \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned}
 \frac{(x - \pi)^2}{4} - \frac{(y - \pi)^2}{4} &= \int_y^x \frac{t - \pi}{2} \, dt \\
 &\stackrel{0.12}{=} - \int_y^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k} \, dt \\
 &\stackrel{\text{glm. Konv. Satz ??}}{=} - \sum_{k=1}^{\infty} \int_y^x \frac{\sin(kt)}{k} \, dt \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ky)}{k^2}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{y \text{ fest}} \frac{(x - \pi)^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \quad \forall x \in (0, 2\pi), C \text{ konst}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ mit Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Bestimme die Konstante C :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} dx &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \right) dx \\ \frac{\pi^3}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx}_{=0} + \int_0^{2\pi} C dx \frac{\pi^3}{6} = C \cdot 2\pi \\ C &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

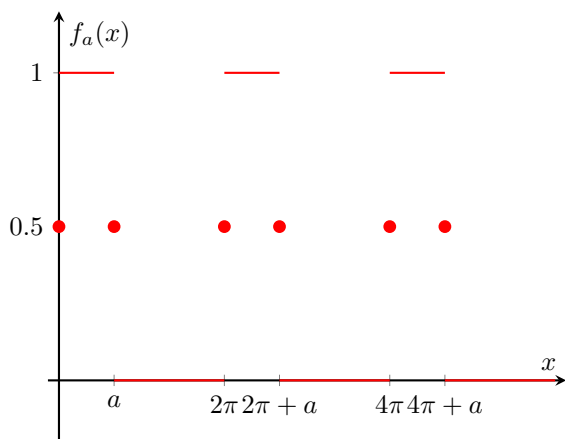
Für $x = 0$ oder $x = 2\pi$ folgt die Behauptung durch Grenzübergang, da beide Seiten stetig sind auf $[0, 2\pi]$ $\square$

Lemma 0.14. Sei f Treppenfunktion, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π periodisch. Dann $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in $L^2[0, 2\pi]$, d.h. Fourier-Reihe von f konvergiert im quadratischen Mittel gegen f .

Beweis. Zunächst Spezialfall

$$f_a(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0.5, & x \in \{0, a\} \\ 0, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Es gilt $\|f_a\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f_a|^2 dx = \int_0^a 1 dx = a$.



Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{a}{2\pi} \\
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_a(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{ik} \right) e^{-ikx} \Big|_0^a \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{i}{ik} \right) (e^{-ika} - 1) \\
 &\stackrel{k \neq 0}{=} \frac{i}{2\pi k} (e^{-ika} - 1)
 \end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 |c_k|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 k^2} \underbrace{(e^{-ika} - 1)(e^{ika} - 1)}_{=1 - e^{ika} - e^{-ika} + 1} \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left(1 - \frac{e^{ika} + e^{-ika}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos(ka)) \\
 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \underbrace{\frac{a^2}{4\pi^2}}_{a_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_{-k}|^2 + |c_k|^2) \\
 &\stackrel{\cos(-ka)=\cos(ka)}{=} \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos(ka)) \\
 &= \frac{a}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}} - \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \cos(ka)}_{=\frac{(a-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}} \\
 &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{(a-\pi)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{12} \\
 &= \frac{a}{2\pi} \\
 \implies 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= a = \|f_a\|_{L^2}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{Satz 0.7}} \|f_a - s_n(f_a)\|_{L^2}^2 = \|f_a\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine beliebige 2π -periodische Treppenfunktion mit Sprungstellen

$$a_j \in (0, 2\pi) \quad j = 1, \dots, l$$

Jede Treppenfunktion f lässt sich schreiben als

$$f(x) = \sum_{j=1}^l d_j \underbrace{f_{a_j}(x)}_{\text{Spezialfunktion (als } f_a(x))}, x \in [0, 2\pi]$$

f_{a_j} Spezielle Treppenfunktion mit Sprungstelle $a = a_j$ und $f_{a_j}(x) \in \{0, 1\} \forall j, x \neq a_j$. Dann $\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\| \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$. Betrachte

$$s_n(f) = \sum_{j=1}^l d_j s_n(f_{a_j})$$

und

$$\|f - s_n(f)\| = \left\| \sum_{j=1}^l d_j (f_{a_j} - s_n(f_{a_j})) \right\| \leq \sum_{j=1}^l |d_j| \underbrace{\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\|}_{\xrightarrow{L^2} 0} \xrightarrow{L^2} 0, n \rightarrow \infty$$

□

Satz 0.15. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Treppenfunktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f und es gilt die Parsevalsche Gleichung (sog. Vollständigkeitsrelation)

$$\frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}_{=\|f\|^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Beweis. O.B.d.A. sei f reellwertig (sonst werden Real- und Imaginärteil getrennt behandelt) und $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 2\pi]$ (sonst betrachte $\bar{f}(x) := \frac{f(x)}{M}$, $M = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu ε 2π -periodische Treppenfunktionen $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

$$-1 \leq \varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \leq 1$$

und

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon| \leq \frac{1}{16\pi} \varepsilon^2$$

Konstruktion von $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ siehe Rannacher. Dann,

$$|f - \varphi_\varepsilon|^2 \leq |\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon|^2 \leq (|\psi_\varepsilon| + |\varphi_\varepsilon|)(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \underset{\substack{|\psi_\varepsilon| < 1 \\ |\varphi_\varepsilon| < 1}}{\leq} 2(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)$$

und

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|^2 = \int_0^{2\pi} |f - \varphi_\varepsilon|^2 dx \leq 2 \int_0^{2\pi} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx \leq 2 \frac{\varepsilon^2}{16\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Weiter gilt: φ_ε Treppenfunktion $\xrightarrow{0.14}$ Fourier-Reihe von φ_ε konvergiert gegen φ_ε in L^2 , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \|s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Aus Satz 0.8 folgt

$$\|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\|^2 \leq \|f - \varphi_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\| &= \|f - s_n(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon\| \\ &\leq \|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\| + \|\varphi_\varepsilon - s_n(\varphi_\varepsilon)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\implies s_n(f) \xrightarrow{L^2} f, \quad n \rightarrow \infty$$

□

Bemerkung 0.16. Konvergenz in L^2 ist „sehr schwach“ Für „glattere“ Funktionen konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig.

Satz 0.17. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar, d.h. $\exists$ Unterteilung von $[0, 2\pi]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 2\pi$$

mit $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar für $j = 1, \dots, m$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f .

Beweis. f stetig $\implies f \in R[0, 2\pi] \implies$ Fourier-Reihe von f konvergiert gegen f in L^2 , d.h. $\|s_n(f) - f\| \xrightarrow{L^2} 0, \quad n \rightarrow \infty$. Betrachte $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \phi(x) = \phi_j(x), \quad x \in (t_{j-1}, t_j), \quad \phi_j : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Abbildung von $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$. Definiere ϕ in t_j entsprechend (möglich, da ϕ eine stückweise stetige Funktion ist). Definition von $R[0, 2\pi] \implies \phi \in [0, 2\pi] \implies$ Für die Fourier-Koeffizienten von ϕ gilt: $\gamma_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\phi\|^2 < \infty$. Berechne Fourier-Koeffizienten c_k von f

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ &\stackrel{\text{part.Integr.}}{=} \frac{1}{2\pi} f(x) \underbrace{\frac{i}{k} e^{-ikx}}_{=0} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f'(x)}_{\phi'(x)} \frac{i}{k} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-i}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-i}{k} \gamma_k \\ &\implies |c_k| = \frac{1}{k} |\gamma_k| \end{aligned}$$

Es gilt $|\alpha \cdot \beta| \leq \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\beta|^2$, da Quadrate größer 0 sind

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + \frac{|\gamma_k|^2}{2} \\
 &\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty \\
 &\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \text{ absolut konvergent} \\
 &\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}}_{\text{Fourier-Reihe von } f}
 \end{aligned}$$

konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion g , die stetig ist. Also $s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} g$, $n \rightarrow \infty$, $\Rightarrow s_n(f) \xrightarrow{L^2} g$, $n \rightarrow \infty$. Andererseits $s_n(f) \xrightarrow{L^2} f$, $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \|f - g\|_{L^2} = 0 \\
 &\Rightarrow f \equiv g, \text{ weil } f \text{ und } g \text{ stetig sind} \\
 &\Rightarrow s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} f, \quad n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

□