

Definition 0.1 (Offene, abgeschlossene Menge bzgl. einer Obermenge aus $\mathbb{K}^n$).

- 1) Eine Teilmenge $M \subset G \subset \mathbb{K}^n$ heißt relativ - offen bzgl. G , falls $\forall a \in M$:

$$\exists \text{ Kugelumgebung } K_r(a) \text{ s.d. } (K_r(a) \cap G) \subset M$$
- 2) $M \subset G \subset \mathbb{K}^n$ heißt relativ-abgeschlossen (bzgl. G), falls $(M^C \cap G) \subset G$ relativ-offen bzgl. G ist.
- 3) Eine Menge $G \subset \mathbb{K}^n$ heißt zusammenhängend, falls *keine* relativ-offene Zerlegung $G = U \cup V$ mit $U, V \neq \emptyset$ und $U \cap V = \emptyset$ existiert.
- 4) Eine offene und zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{K}^n$ heißt Gebiet.

Beispiel 0.2. Einheitssphäre $S_1(0) := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_2 = 1\}$. Als Teilmenge in $\mathbb{K}^n$ ist $S_1(0)$ abgeschlossen.

Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ und offen: Dann ist $M \cap S_1(0)$ als Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ weder offen noch abgeschlossen; als Teilmenge in $S_1(0)$ ist $M \cap S_1(0)$ relativ-offen bzgl. $S_1(0)$.

Extrembeispiel: $M = S_1(0)$ ist als Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen, aber bzgl. $S_1(0)$ relativ-offen und relativ-abgeschlossen.

- $M \cap G$ ($M \subset \mathbb{K}^n$, offen), $G \subset \mathbb{K}^n$, ist immer relativ-offen bzgl. G .
- $M \cap G$ ($M \subset \mathbb{K}^n$, abgeschlossen), $G \subset \mathbb{K}^n$, ist immer relativ-abgeschlossen bzgl. G .

Lemma 0.3. Sei $f : \overline{D} \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Dann gilt:

- 1) Das Urbild $f^{-1}(O)$, wobei $O \subset f(D)$ relativ-offen, ist relativ-offen in D .
- 2) Das Urbild $f^{-1}(A)$, wobei $A \subset f(\overline{D})$ abgeschlossen, ist abgeschlossen.
- 3) Das Bild $f(K)$, wobei $K \subset D$ kompakt, ist kompakt.
- 4) Das Bild $f(G)$, wobei $G \subset D$ zusammenhängend, ist zusammenhängend.

Beweis.

- 1) Sei $O \subset f(D)$ eine relativ-offene Menge. Für O gilt: $\forall f(a) \in O \exists$ relative Kugelumgebung in O :

$$(K_\varepsilon(f(a))) \cap f(D) \subset O \text{ für ein } \varepsilon > 0.$$

f stetig in $a \implies$ für dieses $\varepsilon \exists \delta > 0$ s.d. für $K_\delta(a) \cap D$ gilt $f(K_\delta(a) \cap D) \subset (K_\varepsilon(f(a)) \cap f(D)) \subset O \implies \forall a \in D$ (mit $f(a) \in O$) gilt

$$(K_\delta(a) \cap D) \subset f^{-1}(O) \implies f^{-1}(O)$$

relativ-offen.

- 2) Sei $(x_{k \in \mathbb{N}}^{(k)})$ eine konvergente Folge in $f^{-1}(A)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \in \overline{D}$. Aufgrund der Stetigkeit von f konvergiert die Bildfolge $(f(x^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{f(x^{(k)})}_{\in A} = f(x)$. Da A

abgeschlossen ist, gilt wegen der Charakterisierung über Folgenkonvergenz auch $f(x) \in A \implies x \in f^{-1}(A) \implies f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

3) **Z.Z** $f(K) \subset \mathbb{K}$ beschränkt und abgeschlossen ($\implies$ kompakt).

- Die Beschränktheit folgt aus der Beschränktheit von stetigen Funktionen auf kompakten Mengen.
- Abgeschlossenheit: Sei $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset f(K)$ eine beliebige Folge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = y \in \mathbb{K}$.

Die Urbildfolge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \left(= \underbrace{f^{-1}\left(y^{(k)}\right)}_{\text{Urbild von } y^{(k)}} \right)$ in K hat aufgrund der Kompaktheit von K eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = x \in K$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{f\left(x^{(k_j)}\right)}_{=y^{(k_j)}} = y \implies y \in f(K) \implies f(K)$ abgeschlossen.

4) Ann: $f(G)$ nicht zusammenhängend. Nach Definition existieren dann $U, V \in \mathbb{K}$, $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$, relativ offen, s.d. $f(G) = U \cup V$. Für die Urbildmengen gilt also

$$U' = \{x \in G \mid f(x) \in U\}, \quad V' = \{x \in G \mid f(x) \in V\}, \quad U' \cap V' = \emptyset, U' \neq \emptyset, V' \neq \emptyset,$$

nach 1) sind U' und V' relativ offen und $G = U' \cup V'$

$$\implies G \text{ nicht zusammenhängend } \nmid$$

$$\implies f(G) \text{ zusammenhängend.}$$

□

Satz 0.4. Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und D zusammenhängend. Dann nimmt f für alle $a, b \in D$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Insbesondere hat f eine Nullstelle in D , falls $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Beweis. Wegen Lemma 0.3 ist der Bildbereich $f(D) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend.

Z.Z. $f(D)$ ist ein (zusammenhängendes) Intervall.

Annahme: $f(D)$ ist kein Intervall $\implies \exists f(x), f(y) \in f(D)$ und $z \notin f(D)$ zwischen $f(x)$ und $f(y)$. Dann sind die Mengen

$$U := f(D) \cap (-\infty, z), \quad V := f(D) \cap (z, \infty)$$

disjunkt, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, U, V sind relativ-offen bzgl. $f(D)$ und $U \cup V = f(D)$

$$\implies f(D) \text{ nicht zusammenhängend } \nmid.$$

□

0.1 Vektor- und Matrix-wertige Funktionen

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^m \\ f : D \subset \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^{r \times s} \\ f : D \subset \mathbb{K}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{K}^{r \times s} \end{aligned}$$

- Mit Hilfe von Normen in $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^{m \times n}$ sind die Definitionen von Stetigkeit etc. übertragbar auf Vektor- und Matrix-wertige Funktionen. $\implies$ solche stetigen Abbildungen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig und beschränkt.
- $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ stetig $\Leftrightarrow$ alle Komponenten $f_i : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$ sind stetig (genauso für $f : D \subset \mathbb{K}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{K}^{r \times s}$ etc.)

Lemma 0.5. Seien $g : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow B \subset \mathbb{K}^m$ und $f : B \rightarrow \mathbb{K}^r$ stetig. Dann ist die Komposition $f \circ g : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^r$ stetig.

Beweis. Sei $x \in D$, $x^{(k)} \in D$ s.d. $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$. Es gilt

$$\begin{aligned} g \text{ stetig} &\implies y^{(k)} = g(x^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g(x) =: y \\ f \text{ stetig} &\implies (f \circ g)(x^{(k)}) = f(g(x^{(k)})) = f(y^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(y) \end{aligned}$$

Also ist $(f \circ g)$ stetig. □

Lemma 0.6. Sei $D \subset \mathbb{K}^n$ kompakt und $f : D \rightarrow B \subset \mathbb{K}^m$ injektiv und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow D$ stetig.

Beweis. Sei $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in B mit $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = y \in B$.

$$\textbf{Z.Z.} \quad \underbrace{f^{-1}(y^{(k)})}_{=: x^{(k)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \underbrace{f^{-1}(y)}_{=: x} \quad (\implies f^{-1} \text{ stetig}), \text{ d.h. } x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x.$$

Die Folge $(x^{(k)}) \subset D$ ist aufgrund der Beschränktheit von D auch beschränkt, also existiert eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = \xi \in D$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f(x^{(k_j)}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(\xi)$. Außerdem gilt

$$f(x^{(k_j)}) = y^{(k_j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y \implies y = f(\xi) \xrightarrow[f \text{ injektiv}]{y=f(x)} x = \xi.$$

Also konvergieren alle konvergenten Teilfolgen von $(x^{(k)})$ gegen $x \implies x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. □