

Theoretische Physik 3: Elektrodynamik

Prof. Dr. Bjoern Malte Schäfer

Mitschrift von

Christof Gehrig (christof.gehrig@stud.uni-heidelberg.de)

Josua Kugler (josua.kugler@stud.uni-heidelberg.de)

Christian Merten (christian.merten@stud.uni-heidelberg.de)

Rui Yang (rui.yang@stud.uni-heidelberg.de)

Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

A	Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen	3
A.1	Elektrisches Feld	3
A.2	Elektrische Feldstärke	3
A.3	Maxwell-Gleichungen	4
A.4	Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen	6
A.5	Erhaltung der elektrischen Ladung	6
A.6	Elektromagnetische Dualität	7
A.7	Elektrodynamik in Materie	7
A.8	elektrostatisches Potenzial	8
A.9	Dirac δ_D -Funktion	10
A.10	Eigenschaften der Dirac δ_D -Funktion	11
A.11	Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung	11
A.12	Randbedingungen von Feldern auf Oberflächen	12
A.13	Differentialoperatoren und Green-Funktionen	15
B	Potentialtheorie	16
B.1	Green-Theoreme	16
B.2	Eindeutigkeit der Potentiale	17
B.3	Green-Funktionen	18
B.4	Systematische Konstruktion von Green-Funktionen	18
B.5	Multipolentwicklung	20
B.6	Kugelflächenfunktionen: sphärisch harmonische Funktionen	22

Kapitel A

Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen

A.1 Elektrisches Feld

Satz A.1 (Coulomb Gesetz). Kraft zwischen zwei Ladungen

$$F = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}.$$

Im SI-System ist $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ mit A für Ampère und As = C für Coulomb.

Im Gauß-System ist $q = \frac{q^*}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$, so dass $k = 1$.



Abbildung A.1: Zwei Ladungen

A.2 Elektrische Feldstärke

Satz A.2 (Coulomb Kraft).

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Satz A.3 (Lorentz Kraft).

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

A.3 Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell Gleichungen bilden die axiomatische Verbindung zwischen Feldern $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ und den Ladungen $\rho, \vec{j}$ in Inertialsystemen (oder lokal in frei fallenden Systemen).

- (1) $\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = 4\pi\rho$. Mithilfe der 1. Maxwell-Gleichung kann aus dem elektrischen Feld die Ladung bestimmt werden oder aus der Ladungsverteilung auf ein elektrisches Feld geschlossen werden.

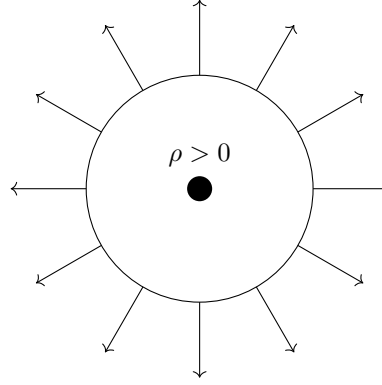


Abbildung A.2: Die 1. Maxwell-Gleichung

$$\int_V d^3r \text{div } \vec{E} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \underset{\text{el. Fluss}}{\Psi} = \int_V d^3r 4\pi\rho = 4\pi q$$

Setzen wir eine sphärische Symmetrie voraus, so erhalten wir

$$\int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{E} = 4\pi r^2 \cdot |\vec{E}(r)| = 4\pi q \implies |E| \sim \frac{q}{r^2}.$$

Damit haben wir also das Coulomb-Gesetz in Zusammenhang zu den Maxwell-Gleichungen gesetzt.

- (2) $\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = \partial_i B^i = 0$

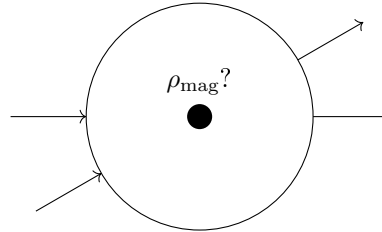


Abbildung A.3: Die 2. Maxwell-Gleichung

$$d^3r \text{div } \vec{B} = \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{B} = \underset{\text{mag. Fluss}}{\Phi} = 0$$

Es gibt keine magnetische Ladung (elektromagnetische Dualität)

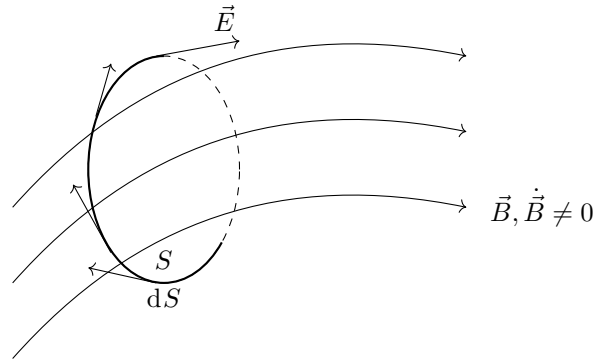


Abbildung A.4: Die 3. Maxwell-Gleichung

- (3) $\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B}$. Die 3. Maxwell-Gleichung ist auch bekannt als Induktionsgesetz von Faraday und stellt eine Verbindung her zwischen magnetischem Fluss durch eine Fläche und induzierter Spannung auf dem Rand der Fläche. Das – auf der rechten Seite führt zur Lenz-Regel.

$$\int_S dS \cdot \text{rot } \vec{E} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = \underset{\substack{U \\ \text{Spannung}}}{=} - \underbrace{\frac{d}{d(ct)}}_{\frac{1}{c} \frac{d}{dt}} \int d\vec{S} \cdot \vec{B} = - \frac{d}{d(ct)} \Phi$$

- (4) $\text{rot } \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$. Die 4. Maxwell-Gleichung ist auch bekannt als Ampere-Gesetz und stellt eine Verbindung her zwischen elektrischen Fluss oder sich änderndem $\vec{E}$ -Feld und einem magnetischen Feld auf dem Rand der Fläche. In integraler Form gilt also

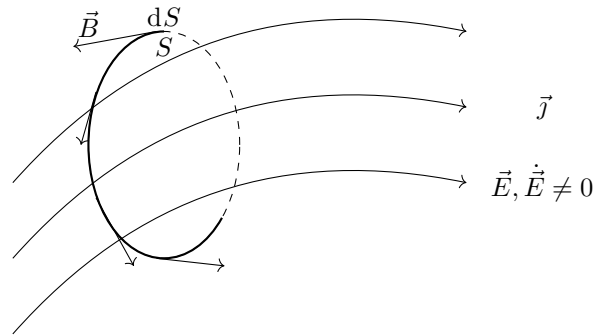


Abbildung A.5: Die 4. Maxwell-Gleichung

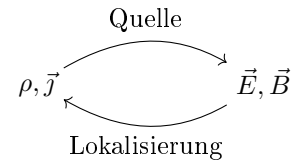
$$\int_S d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{B} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \frac{d}{d(ct)} \int_S \underbrace{d\vec{S} \cdot \vec{E}}_{=\Psi} + \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int d\vec{S} \cdot \vec{j}}_{=I \text{ Strom}}$$

Setzen wir zylindrische Symmetrie voraus, so erhalten wir

$$\int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B} = 4\pi r |\vec{B}(r)| = \frac{4\pi}{c} I \implies |\vec{B}| \sim \frac{1}{r}.$$

A.4 Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen

- Die Maxwell-Gleichungen sind lineare ($\rightarrow$ Superposition),
- partielle (Ableitungen in x^i und $ct \rightarrow \nabla, \partial_{ct}$),



- hyperbolische Differenzialgleichungen (wird später noch erklärt).
- Die Maxwell-Gleichungen ergeben nur Sinn in einem Bezugssystem, wir legen also ein Inertialsystem fest.
- Wir haben 2 div-Gleichungen und 2 rot-Gleichungen, also effektiv $1+1+3+3 = 8$ Gleichungen, wir untersuchen aber nur die Dynamik von $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feld ($3+3 = 6$ Komponenten). Sind die Maxwell-Gleichungen daher überbestimmt?

A.5 Erhaltung der elektrischen Ladung

Betrachte Maxwell (1) und (4):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \mid \partial_{ct} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \mid \operatorname{div}\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} &= 0 = \partial_{ct}\operatorname{div} \vec{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div} \vec{j} \\ &= 4\pi\partial_{ct}\rho + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div} \vec{j}\end{aligned}$$

Also insgesamt die sog. Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (\text{A.1})$$

In Integralform ergibt sich daraus:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho = \frac{d}{dt} q = - \int_V d^3r \operatorname{div} \vec{j} \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{j}.$$

Die Elektrodynamik ist eine Kontinuumstheorie. Ladung ist dabei eine Art „Fluid“.

A.6 Elektromagnetische Dualität

Betrachte die Maxwell-Gleichungen im Vakuum, d.h. $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Dann gilt

- (1) $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
- (2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
- (3) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B}$
- (4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E}$

Vertauschen wir $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, so ändert sich an den Maxwell-Gleichungen im Vakuum nichts (Dualität). Warum existieren eigentlich keine magnetischen Ladungen?

- (1) $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$
- (2) $\operatorname{div} \vec{B} = 4\pi\rho_m$
- (3) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m$
- (4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

Es folgt also, analog zu A.1, eine Kontinuitätsgleichung für die magnetische Ladung

$$\partial_t \rho_m + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

A.7 Elektrodynamik in Materie

Elektrodynamik in Materie ist im Allgemeinen sehr kompliziert. Im einfachsten Fall ist die Wirkung

- 1. linear
- 2. isotrop
- 3. instantan

Dann existiert eine effektive Beschreibung mithilfe von nur zwei Konstanten. Als erstes benötigen wir die Dielektrizitätskonstante ϵ und die Permeabilitätskonstante μ . Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \cdot \vec{H}\end{aligned}$$

im Vakuum (in diesem Fall $\epsilon = \mu = 1$)

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{ct} \vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= +\partial_{ct} \frac{4\pi}{c} \vec{j}\end{aligned}$$

in Materie

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{ct} \vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= +\partial_{ct} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}\end{aligned}$$

A.8 elektrostatisches Potenzial

Dabei bedeutet elektrostatisch, dass alle Zeitableitungen 0 sind. Für das elektrische Feld aus

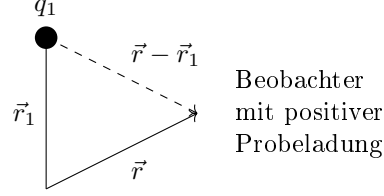


Abbildung A.6: Elektrisches Feld

Abbildung A.6 gilt daher

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \cdot \vec{e}_{\vec{r} - \vec{r}_1} = q_1 \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}.$$

Bei vielen felderzeugenden Ladungen berechnen wir einfach die Superposition

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i^n q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

Da es sich bei der Elektrodynamik um eine Kontinuumsstheorie handelt, gehen wir von q zu ρ über. Im Kontinuumsstages erhalten wir also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Im folgenden wirke ∇ auf r und ∇' auf r' . Es gilt

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Eingesetzt in die Gleichung von oben erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= - \int d^3r' \rho(\vec{r}') \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\nabla \underbrace{\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=:\phi(\vec{r})} \\ &\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Definition A.4. Das elektrostatische Potenzial ϕ ist gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Für die Elektrostatik gilt also $\text{rot } \vec{E} = -\text{rot } \nabla \phi = 0$. Aus den Maxwell-Gleichungen erhalten wir konsistenterweise $\text{rot } \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B} = 0$.

$$\begin{aligned} W_{AB} &= q \int_A^B d\vec{S} \cdot \vec{E} \sim \text{Verschiebearbeit} \\ &= q \cdot |\phi(\vec{r}_B) - \phi(\vec{r}_A)| \sim \text{Interpretation von } \phi \text{ als potentielle Energie} \end{aligned}$$

Aus

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r})$$

und dem Gauß-Gesetz

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

erhalten wir

$$-\text{div } \nabla \phi = -\Delta \phi = 4\pi\rho$$

Definition A.5 (Laplace-Operator).

$$\Delta = \text{div } \nabla = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$$

Satz A.6 (Poisson-Gleichung). Es gilt

$$\Delta \phi = -4\pi\rho$$

beziehungsweise im Vakuum

$$\Delta \phi = 0$$

Wir berechnen nun $\Delta \phi$ an einem Ort $\neq 0$ im Feld einer Punktladung.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} && \text{Potenzial einer Punktladung } \vec{r}' \\ \Delta \phi &= \Delta \frac{1}{r} && \text{sphärische Symmetrie} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\underbrace{r \cdot \frac{1}{r}}_{=\text{const}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nun möchten wir $\Delta \phi$ bei der Punktladung berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \Delta \phi &\stackrel{\Delta = \text{div } \nabla}{=} \int_V d^3r \text{div } \nabla \phi \\ &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \nabla \phi \\ &\stackrel{\text{sph. Symmetrie}}{=} \int_{\partial V} r^2 d\Omega \cdot \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial r}}_{=-\frac{1}{r^2}} \\ &= - \int_{\partial V} d\Omega \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta_D |\vec{r} - \vec{r}'|$$

kombiniert beide Fälle. Dabei ist δ_D die Dirac-Funktion.

A.9 Dirac δ_D -Funktion

Möchte man von der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ auf die Ladung im Volumen V schließen, berechnet man einfach

$$q = \int_V d^3r \rho(\vec{r}).$$

In die andere Richtung ist es nicht offensichtlich, hier gilt

$$\rho(\vec{r}) = q \delta_D(\vec{r} - \vec{r}')$$

wenn q bei $\vec{r}'$ liegt.

1. Für das Potenzial gilt

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \int_V d^3r' \rho(r') \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \delta_D(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

Es gilt $\int_V d^3r' \varphi(\vec{r}') \delta_D(\vec{r} - \vec{r}') = \varphi(\vec{r})$ und $\int d^3r' \delta_D(\vec{r} - \vec{r}') = 1$

$$= -4\pi \rho(\vec{r})$$

Man kann sich die Dirac δ -Funktion vorstellen als

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

2. Für diskrete Ladungen gilt

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ \Delta \phi(\vec{r}) &= \sum_i q_i \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ &= \sum_i q_i (-4\pi) \delta_D(\vec{r} - \vec{r}_i) \\ &= -4\pi \rho(\vec{r}), \end{aligned}$$

wobei wir die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta_D(\vec{r} - \vec{r}_i)$ erhalten.

A.10 Eigenschaften der Dirac δ_D -Funktion

1. Normierung $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_D(x) = 1$
2. Verschiebung $\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) \delta_D(x - a) = \varphi(a)$
3. Skalierung $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_D(ax) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{a} \delta_D(y)$
4. Ableitung $\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) \delta'_D(x - a) = \underbrace{\varphi(x) \delta_D(x - a)}_{\rightarrow 0} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi'(x) \delta_D(x - a) = \varphi'(a).$

A.11 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

- (1) Bei einer Ladung q_1 an der Stelle $\vec{r}_1$ erhalten wir das Potenzial $\phi_1 = \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$.
- (2) Nun schieben wir eine Ladung q_2 aus dem Unendlichen an die Stelle $\vec{r}_2$. Dabei verrichten wir eine Arbeit $W_2 = q_2 \phi_1(\vec{r}_2)$.
- (3) Wir schieben eine dritte Ladung q_3 an die Stelle $\vec{r}_3$ und verrichten die Arbeit $W_3 = q_3(\phi_1(\vec{r}_3) + \phi_2(\vec{r}_3))$.
- $\vdots$
- (n) Schließlich schieben wir die Ladung q_n an die Stelle $\vec{r}_n$ und verrichten die Arbeit $W_n = q_n \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i(\vec{r}_n)$

Als Gesamtenergie ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ges}} &= \sum_{n=1}^N W_n \\
 &= \sum_{n=1}^N q_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\
 &\stackrel{\text{Doppelzählung}}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}
 \end{aligned}$$

Gehen wir nun zum Kontinuum über, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \cdot \underbrace{\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=\phi(\vec{r})} \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \cdot \phi(\vec{r}) \\
 &\stackrel{\Delta\phi = -4\pi\rho}{=} -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \Delta\phi \cdot \phi
 \end{aligned}$$

Es gilt die Produktregel $\phi \nabla \phi = \phi \operatorname{div} \nabla \phi = \operatorname{div}(\phi \nabla \phi) - \nabla \phi \cdot \nabla \phi$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \operatorname{div}(\phi \nabla \phi) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla \phi)^2 \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\vec{E}|^2 \\
 &= \int d^3r W_{\text{el}}
 \end{aligned}$$

Definition A.7 (Energiedichte). Wir definieren die Energiedichte $W_{\text{el}} = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}|^2$.

A.12 Randbedingungen von Feldern auf Oberflächen

Wir definieren die Oberflächenladung (siehe Abb. ??) als

$$\sigma(\vec{r}) := \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta S}.$$

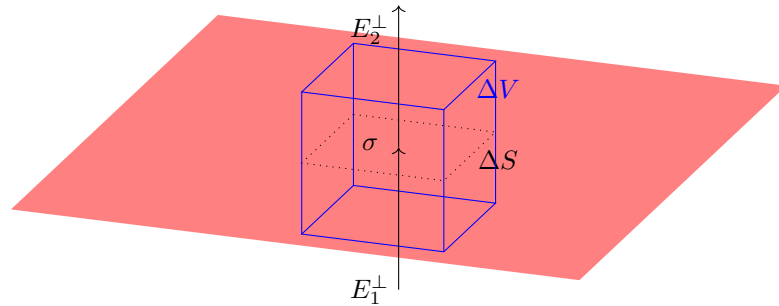


Abbildung A.7: Senkrechte Komponenten eines elektrischen Feldes durch Oberfläche mit Oberflächenladung σ .

Für das Integrationsvolumen betrachten wir die Divergenz des elektrischen Felds:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta V} d^3r \operatorname{div} \vec{E} &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\Delta S} d\vec{S} \cdot \vec{E} \\
 &= 4\pi q \\
 &= 4\pi \int_{\Delta S} dS \cdot \sigma \\
 &\stackrel{\text{Vernachlässigung der Seiten}}{=} \Delta S (E_2^\perp - E_1^\perp)
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$E_2^\perp = E_1^\perp + 4\pi\sigma.$$

Es liegt Elektrostatik vor. Damit ist $\vec{E} = -\nabla\phi$, also folgt $\operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \nabla\phi = 0$, da die Rotation von Gradientenfeldern verschwindet.

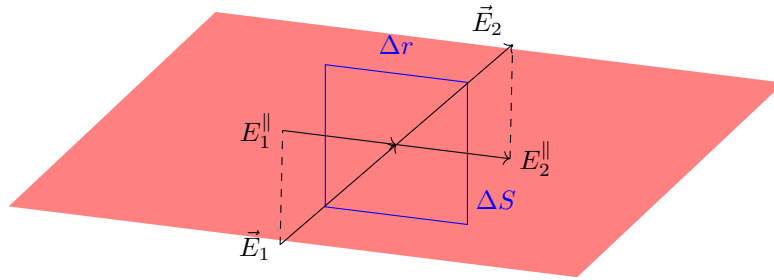


Abbildung A.8: Parallele Komponenten eines elektrischen Feldes durch Oberfläche.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta S} d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{E} & \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial \Delta S} d\vec{r} \cdot \vec{E} \\
 & \stackrel{\text{Vernachlässigung der Höhe}}{=} \Delta r (E_2^{\parallel} - E_1^{\parallel}) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$E_2^{\parallel} = E_1^{\parallel}.$$

Im Vergleich fällt auf, dass das elektrische Feld senkrecht zur Oberfläche einen Sprung macht bei Durchstoßen der Oberfläche, sobald die Fläche eine Oberflächenladung besitzt. Dahingegen verändert sich die parallele Komponente nicht.

Wiederholung

Elektrisches Feld $\vec{E}$ und elektrostatisches Potential ϕ . Dann ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

Bei mehreren Ladungen folgt mit Superpositionsprinzip

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i^n q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Im Kontinuumslimit ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Aus 3. Maxwell Gleichung folgt im statischen Fall $\text{rot } \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B} = 0$, d.h. es muss ein Potential ϕ geben, mit $\vec{E} = -\nabla \phi$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = - \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \nabla \underbrace{\int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=\phi(\vec{r})} = -\nabla \phi$$

Aus der 1. Maxwell Gleichung ($\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$) folgt

$$\text{div } \vec{E} = -\text{div } \nabla \phi = -\Delta \phi = 4\pi\rho \quad (\text{Poisson-Gleichung}).$$

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben eine Kontinuums-Theorie. Wie können dann Punktladungen in dieser Theorie beschrieben werden? Für Punktladung an der Stelle $\vec{r}'$ ist

$$\rho(\vec{r}) = q \cdot \underbrace{\delta_D(\vec{r} - \vec{r}')}_{\sim \text{Volumen}^{-1}}.$$

Wieso hat die Dirac Funktion die Einheit eines reziproken Volumens? Das folgt aus der Normierung

$$\int d^3r \delta_D(\vec{r} - \vec{r}') = 1$$

woraus direkt

$$\int d^3r \rho \vec{r} = q$$

folgt.

Dirac-Funktion als Kontinuumslimites des Kronecker δ

- | | | |
|--|-----|---|
| • $\sum_{i=1}^n \delta_{ij} = 1$ | vs. | • $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_D(x - x') = 1$ |
| • $\sum_{i=a}^b \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq j \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ | | • $\int_a^b dx \delta_D(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq x' \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ |
| • $\sum_{i=1}^n \delta_{ij} A^i = A_j$ | | • $\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) \delta_D(x - x') = \varphi(x')$ (Faltungsintegral) |

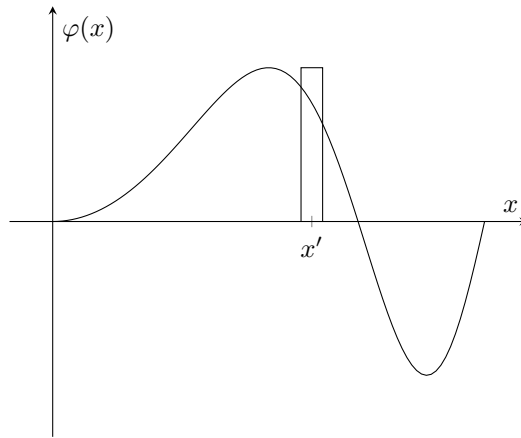


Abbildung A.9: Gestalt der Dirac Funktion

Verbindung der kontinuierlichen Welt der Maxwell-Gleichungen mit der Intuition der diskreten Punktladungen.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = -\nabla \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = -\nabla \phi(\vec{r}).$$

Wie wird nun $\text{div } \vec{E} = -\nabla \phi$ berechnet?

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta_D(\vec{r} - \vec{r}').$$

Die δ_D Funktion ist die Kontinuumsbeschreibung von Punktladungen.

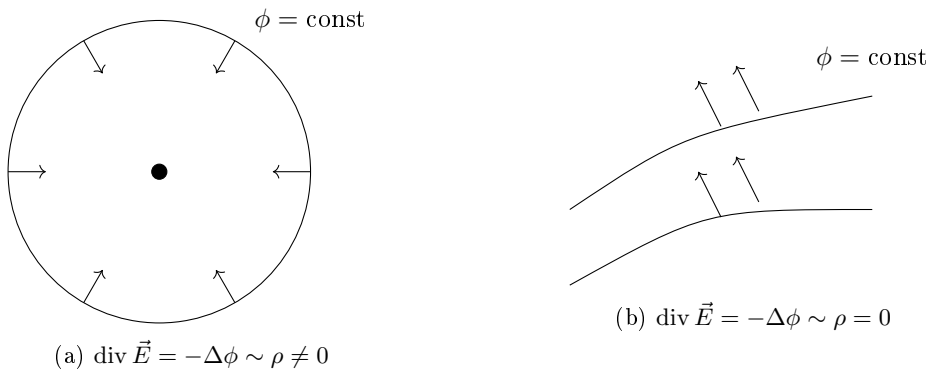
A.13 Differentialoperatoren und Green-Funktionen

Nach Poisson-Gleichung ist

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}), \text{ gelöst von } \phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Delta\phi = \Delta \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot (-4\pi)\delta_D(\vec{r}-\vec{r}') = -4\pi\rho(\vec{r}).$$

Interpretation von links nach rechts: $\Delta\phi = -4\pi\rho$: Lokalisierung von Ladungen aus ϕ heraus.



Interpretation von rechts nach links: Achtung: Gefährlicher Unfug:

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \quad | \quad \Delta^{-1} \text{ „inverser Differentialoperator“}$$

$$\Rightarrow \phi = \Delta^{-1}[-4\pi\rho] = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

$\int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} [\dots]$ ist die inverse Operation zu $\Delta[\dots]$. In Worten der Funktionalanalysis heißt dann

$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ die Green-Funktion des Differentialoperators Δ . Für uns Green-Funktion immer gleich dem Potential einer Punktladung.

Kapitel B

Potentialtheorie

Ziel: Lösen von Poisson-Problemen.

B.1 Green-Theoreme

Seien φ, ψ zwei skalare Felder. Dann ist

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}') &= \varphi(\vec{r}') \cdot \nabla' \psi(\vec{r}') \\ \operatorname{div}' A(\vec{r}') &= \nabla' \varphi \cdot \nabla' \psi + \varphi \Delta' \psi \quad (\text{Produktregel})\end{aligned}$$

Mit Satz von Gauß folgt dann

$$\int_V d^3 r' \operatorname{div}' \vec{A}(\vec{r}') = \int_{\partial V} d\vec{S}' \cdot \vec{A}(\vec{r}') \quad d\vec{S} = \vec{n} \cdot ds.$$

Damit folgen die Green-Theoreme:

Satz B.1 (1. Green-Theorem).

$$\begin{aligned}\int_V d^3 r' \operatorname{div}' \vec{A}(\vec{r}') &= \int_V d^3 r' \operatorname{div}' (\varphi \nabla' \psi) = \int_V d^3 r' [\nabla' \varphi \cdot \nabla' \psi + \varphi \Delta' \psi] \\ &= \int_{\partial V} dS' \varphi \cdot \underbrace{\nabla' \psi \cdot \vec{n}'}_{\frac{\partial \psi}{\partial n'}}.\end{aligned}$$

Vertausche nun φ und ψ und subtrahiere zwei Kopien des ersten Green-Theorems. Dabei fällt $\nabla' \varphi \cdot \nabla' \psi$ heraus.

Satz B.2 (2. Green-Theorem).

$$\int_V d^3 r' [\varphi \cdot \nabla' \psi - \psi \nabla' \varphi] = \int_{\partial V} dS' \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right].$$

Nun Anwendung durch Wahl der Felder: $\psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$, damit $\Delta' \psi = -4\pi \delta_D(\vec{r} - \vec{r}')$. Weiter sei $\varphi = \phi$ Potential, also $\nabla' \phi = -4\pi \rho(\vec{r}')$ (Poisson-Gleichung).

Substitution in das 2. Green-Theorem:

$$\begin{aligned} \int_V d^3r' \left[\underbrace{\phi(\vec{r}')}_{\varphi} \cdot \underbrace{(-4\pi)\delta_D(\vec{r}-\vec{r}')}_{\Delta\psi} + \underbrace{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\psi} \underbrace{4\pi\rho(\vec{r}')}_{\Delta\phi} \right] &= -4\pi\phi(\vec{r}) + 4\pi \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= \int_{\partial V} dS' \left[\phi(\vec{r}') \cdot \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\partial}{\partial n'} \phi(\vec{r}') \right]. \end{aligned}$$

Auflösen nach ϕ ergibt

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dS' \left[\underbrace{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial n'} \phi}_{\text{Neumann-Randbedingung}} - \underbrace{\phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{Dirichlet-Randbedingung}} \right].$$

$\nabla\phi \text{ auf } \partial V$
 $\phi \text{ auf } \partial V$

Falls ∂V unendlich weit weg ist, bleibt nur der erste Term übrig. Bei der Festlegung der Randbedingungen, darf jeweils auf einem Flächenelement nur eine Neumann-Randbedingung oder eine Dirichlet-Randbedingung festgelegt werden, da sonst Probleme bezüglich der Bestimmtheit des Potentialproblems entstehen.

B.2 Eindeutigkeit der Potentiale

Seien ϕ_1, ϕ_2 Potentiale und Lösungen der Poisson-Gleichung, also

$$\Delta\phi_1 = -4\pi\rho = \Delta\phi_2 \implies \Delta(\underbrace{\phi_1 - \phi_2}_{=u}) = 0.$$

Mit 1. Green-Theorem folgt

$$\int_V d^3r' \left[\underbrace{u \Delta' u}_{=0} - (\nabla' u)^2 \right] = \int_{\partial V} dS' u \frac{\partial u}{\partial n'}.$$

Fallunterscheidung nach Wahl der Randbedingung für Potentialproblem:

- Neumann-Randbedingungen: $\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\phi_2}{\partial n} \implies \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂V .
- Dirichlet-Randbedingungen: $\phi_1 = \phi_2 \implies u = 0$ auf ∂V .

Damit verschwindet die rechte Seite immer und es folgt

$$\int_V d^3r' \underbrace{(\nabla' u)^2}_{\geq 0} = 0.$$

Also folgt bereits $\nabla' u = 0$, also $\phi_2 = \phi_1 + \text{const.}$ Bei Dirichlet-Randbedingungen folgt damit, wegen $u = 0$ auf ∂V , dass $\phi_1 = \phi_2$.

B.3 Green-Funktionen

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta_D(\vec{r} - \vec{r}') \text{ mit } G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}').$$

$F(\vec{r}, \vec{r}')$ hat die Eigenschaft $\Delta F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$: Vakuum. Erfüllen von Randbedingungen („Spiegelabbildungen“).

$$\begin{aligned} \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') &= -4\pi\delta_D(\vec{r} - \vec{r}') \quad | \cdot \rho(\vec{r}), \int_V d^3r' \\ \int_V d^3r' \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}') &= \Delta \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \Delta\phi \\ &= -4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \delta_D(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi\rho. \end{aligned}$$

Green-Funktionen sind für lineare Feldgleichungen $\implies$ Superpositionsprinzip.

B.4 Systematische Konstruktion von Green-Funktionen

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = (-4\pi)\delta_D(\vec{r} - \vec{r}') \quad | \int d^3r' \rho(\vec{r}')$$

Durch Superposition der Coulomb-Felder der Einzelladungen folgt damit

$$\Delta \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \Delta\phi = -4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \delta_D(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi\rho(\vec{r}).$$

Jetzt: Green-Funktionen für andere Differentialoperatoren, z.B.: $\Delta - m^2$ oder $\square = \partial_{ct}^2 - \Delta$.

(1) Lösung der Feldgleichung: algebraisch statt differentiell. Dafür: Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -4\pi\rho \quad \text{Poisson-Gleichung} \\ \rho(\vec{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rho(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r}) \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} \rho(\vec{k}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \\ \phi(\vec{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r}) \xleftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} \phi(\vec{k}) = \int d^3r \phi(\vec{r}) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation angewendet auf die Poisson-Gleichung ergibt dann

$$\Delta\phi(\vec{r}) = \Delta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) (ik)^2 \exp(i\vec{k}\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-4\pi)\rho(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r}).$$

Durch Integrandenvergleich folgt

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \text{ im Fourier-Raum: } -k^2\phi(\vec{k}) = -4\pi\rho(\vec{k}).$$

Wir erhalten also eine algebraische Gleichung im Fourier-Raum, die sehr leicht gelöst werden kann:

$$\phi(\vec{k}) = \frac{4\pi}{k^2} \rho(\vec{k}).$$

Damit ergibt sich folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \phi(\vec{k}) & \xrightarrow{\cdot \frac{k^2}{4\pi}} & \rho(\vec{k}) \\ \mathcal{F}^{-1} \downarrow & & \uparrow \mathcal{F} \\ \phi(\vec{r}) & \xrightarrow{\Delta} & \rho(\vec{r}) \end{array} \quad .$$

Damit folgt als Lösung der Poisson-Gleichung:

$$\phi(\vec{r}) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{4\pi}{k^2} \mathcal{F}[\rho(\vec{r})] \right].$$

Fourier-Transformationen sind numerisch extrem effizient berechenbar mithilfe von „fast Fourier-transform“.

- (2) Faltungen im Realraum sind Produkte im Fourier-Raum.

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi(\vec{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\varphi(\vec{k}) \cdot \psi(\vec{k})] \exp(i\vec{k}\vec{r}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3r' \varphi(\vec{r}') \exp(-i\vec{k}\vec{r}') \int d^3r'' \psi(\vec{r}'') \exp(-i\vec{k}\vec{r}'') \exp(i\vec{k}\vec{r}) \\ &= \int d^3r' \varphi(\vec{r}') \int d^3r'' \psi(\vec{r}'') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}'')] \end{aligned}$$

In einer ebenen Welle ist nur eine Frequenz enthalten, deren Spektrum aufgrund von Normierung divergieren muss. Die Fouriertransformierte der ebenen Welle ist also wieder die Dirac-Funktion

$$\begin{aligned} &= \int d^3r' \varphi(\vec{r}') \int d^3r'' \psi(\vec{r}'') \delta_D((\vec{r} - \vec{r}') - \vec{r}'') \\ &= \int d^3r' \varphi(\vec{r}') \psi(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned}$$

Wir erhalten also tatsächlich eine Faltung zwischen φ und ψ .

- (3) Berechnung der Fourier-Transformierten der Green-Funktion Idee: $\frac{4\pi}{k^2}$ ist die Green-Funktion von $\Delta(\sim -k^2)$ im Fourier-Raum.

$$\phi(\vec{r}) = \underbrace{\int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')}_{\text{Faltung}} \xrightarrow{\text{Fourier}} \phi(\vec{k}) = \underbrace{G(\vec{k}) \cdot \rho(\vec{k})}_{\text{Produkt}}.$$

Zu zeigen:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} G(\vec{k}) = \frac{4\pi}{k^2}.$$

Es ist

$$G = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r})$$

Da $G(\vec{k})$ sphärisch symmetrisch, verwenden wir Kugelkoordinaten. Mit $\mu := \cos \angle(\vec{k}, \vec{r})$ ist $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr\mu$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 G &= \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 d\mu \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \frac{4\pi}{k^2} \exp(ikr\mu) \\
 &= \int_0^\infty \frac{4\pi}{(2\pi)^2} dk \cdot \int_{-1}^1 d\mu \exp(-ikr\mu) \\
 &= \int_0^\infty \frac{4\pi}{(2\pi)^2} dk \cdot \frac{\exp(-ikr) - \exp(ikr)}{-ikr} \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kr)}{kr} \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{r} \underbrace{\int_0^\infty d(kr) \frac{\sin(kr)}{kr}}_{=\frac{\pi}{2} \text{ siehe Funkttheo}}.
 \end{aligned}$$

B.5 Multipolentwicklung

Betrachte eine komplizierte Ladungsverteilung. Von sehr weit weg, geht das elektrische Feld in ein Coulomb-Feld über, das heißt Details in der Ladungsverteilung werden weniger relevant.

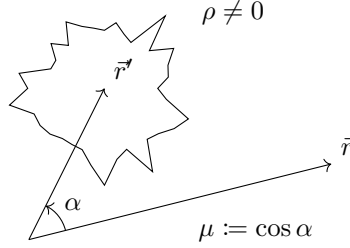


Abbildung B.1: Komplizierte Ladungsverteilung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\mu + r'^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\mu + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}$$

Annahme, dass $r \gg r' \sim$ Beobachter weit weg im Vergleich zur Ausdehnung von ρ .

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \underbrace{P_l(\mu)}_{\text{Legendre-Polynome}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\mu).$$

Für die Legendre-Polynome gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu x + x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu) x^l.$$

Durch die Operation $\frac{d^l}{dx^l}$ und anschließendes Setzen von $x = 0$ erhalten wir das l -te Legendre Polynom. Damit folgt

$$P_0(\mu) = 1, P_1(\mu) = \mu, P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu^2).$$

alternativ Formel von Rodriguez:

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l.$$

Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi) \rightarrow P_l(\cos \alpha)$ Legendre-Polynome.

$$P_l(\mu) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \quad (\text{Additionstheorem}).$$

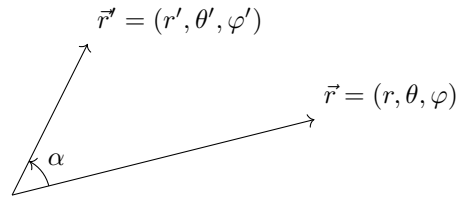


Abbildung B.2: Situation

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot \underbrace{\int d^3 r' r'^l \rho(\vec{r}') Y_{lm}^*(\theta', \varphi')}_{=q_{lm} \text{ Multipolmomente}} \\ \phi(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot q_{lm}. \end{aligned}$$

Multipolmomente

- (1) Information über die Ladungsverteilung: Größe, Stärke und Form
- (2) Einfluss nimmt mit $\frac{1}{r^{l+1}}$ ab. Dominierender Term $\frac{1}{r}$ -Term bei großem Abstand

Monopol $l = 0$, also nur 1 Koeffizient, $m = 0 \sim$ Gesamtladung.

$$q_{00} = \int d^3 r' r'^0 \rho(\vec{r}') \cdot \underbrace{Y_{00}^*(\theta, \varphi)}_{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}} = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}.$$

Dipol $l = 1$, also 3 Koeffizienten, $m \in \{-1, 0, 1\}$.

$$q_{1m} = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') r' Y_{1m}^*(\theta', \varphi') \sim \text{Ladung} \times \text{Abstand}.$$

Quadrupol $l = 2$, also 5 Koeffizienten, $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$$q_{2m} = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') r'^2 Y_{2m}^*(\theta', \varphi') \sim \text{Ladung} \times \text{Fläche}.$$

Oktupol $l = 3$

Hexadekupol $l = 4$

Hermitizität:

$$Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \varphi)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} q_{lm}^* &= \int d^3r' r'^l \rho(\vec{r}') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') = (-1)^m \int d^3r' r'^l \rho(\vec{r}') Y_{l,-m}(\theta', \varphi') \\ &= (-1)^m q_{l,-m}. \end{aligned}$$

Für reelle Ladungsverteilungen existieren also $(l+1)$ unabhängige Multipole.

B.6 Kugelflächenfunktionen: sphärisch harmonische Funktionen

$$\begin{aligned} \Delta \exp(\pm i k \vec{r}) &= -k^2 \exp(\pm i k \vec{r}) \implies (\Delta + k^2) \exp(\pm i k \vec{r}) = 0 \quad (\text{Helmholtz-Differentialgleichung}) \\ \Delta_{\theta,\varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \implies (\Delta_{\theta,\varphi} + l(l+1)) Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0. \end{aligned}$$