

Theoretische Physik 3: Elektrodynamik

Prof. Dr. Bjoern Malte Schäfer

Mitschrift von

Christof Gehrig (christof.gehrig@stud.uni-heidelberg.de)

Josua Kugler (josua.kugler@stud.uni-heidelberg.de)

Christian Merten (christian.merten@stud.uni-heidelberg.de)

Rui Yang (rui.yang@stud.uni-heidelberg.de)

Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

A	Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen	3
A.1	Elektrisches Feld	3
A.2	Elektrische Feldstärke	3
A.3	Maxwell-Gleichungen	4
A.4	Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen	6
A.5	Erhaltung der elektrischen Ladung	6
A.6	Elektromagnetische Dualität	7
A.7	Elektrodynamik in Materie	7
A.8	elektrostatisches Potenzial	8
A.9	Dirac δ_D -Funktion	10
A.10	Eigenschaften der Dirac δ_D -Funktion	11
A.11	Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung	11

Kapitel A

Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen

A.1 Elektrisches Feld

Satz A.1 (Coulomb Gesetz). Kraft zwischen zwei Ladungen

$$F = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}.$$

Im SI-System ist $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ mit A für Ampère und As = C für Coulomb.

Im Gauß-System ist $q = \frac{q^*}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$, so dass $k = 1$.



Abbildung A.1: Zwei Ladungen

A.2 Elektrische Feldstärke

Satz A.2 (Coulomb Kraft).

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Satz A.3 (Lorentz Kraft).

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

A.3 Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell Gleichungen bilden die axiomatische Verbindung zwischen Feldern $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ und den Ladungen $\rho, \vec{j}$ in Inertialsystemen (oder lokal in frei fallenden Systemen).

- (1) $\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = 4\pi\rho$. Mithilfe der 1. Maxwell-Gleichung kann aus dem elektrischen Feld die Ladung bestimmt werden oder aus der Ladungsverteilung auf ein elektrisches Feld geschlossen werden.

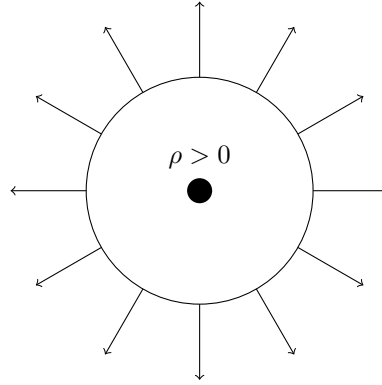


Abbildung A.2: Die 1. Maxwell-Gleichung

$$\int_V d^3r \text{div } \vec{E} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \underset{\text{el. Fluss}}{\Psi} = \int_V d^3r 4\pi\rho = 4\pi q$$

Setzen wir eine sphärische Symmetrie voraus, so erhalten wir

$$\int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{E} = 4\pi r^2 \cdot |\vec{E}(r)| = 4\pi q \implies |E| \sim \frac{q}{r^2}.$$

Damit haben wir also das Coulomb-Gesetz in Zusammenhang zu den Maxwell-Gleichungen gesetzt.

- (2) $\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = \partial_i B^i = 0$

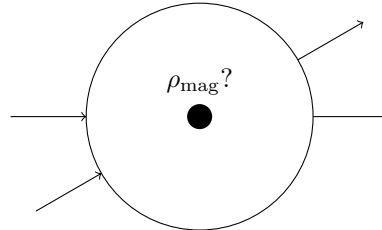


Abbildung A.3: Die 2. Maxwell-Gleichung

$$d^3r \text{div } \vec{B} = \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{B} = \underset{\text{mag. Fluß}}{\Phi} = 0$$

Es gibt keine magnetische Ladung (elektromagnetische Dualität)

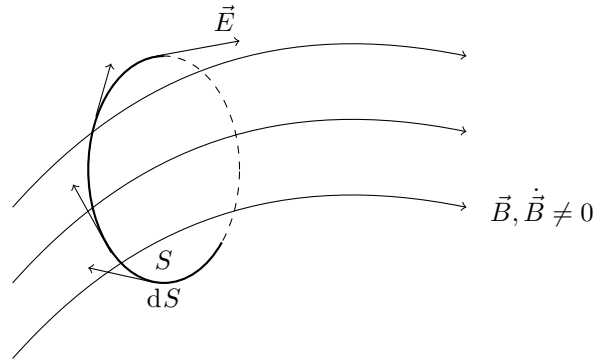


Abbildung A.4: Die 3. Maxwell-Gleichung

- (3) $\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B}$. Die 3. Maxwell-Gleichung ist auch bekannt als Induktionsgesetz von Faraday und stellt eine Verbindung her zwischen magnetischem Fluss durch eine Fläche und induzierter Spannung auf dem Rand der Fläche. Das – auf der rechten Seite führt zur Lenz-Regel.

$$\int_S dS \cdot \text{rot } \vec{E} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = \underset{\substack{U \\ \text{Spannung}}}{=} - \underbrace{\frac{d}{d(ct)}}_{\frac{1}{c} \frac{d}{dt}} \int d\vec{S} \cdot \vec{B} = - \frac{d}{d(ct)} \Phi$$

- (4) $\text{rot } \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$. Die 4. Maxwell-Gleichung ist auch bekannt als Ampere-Gesetz und stellt eine Verbindung her zwischen elektrischen Fluss oder sich änderndem $\vec{E}$ -Feld und einem magnetischen Feld auf dem Rand der Fläche. In integraler Form gilt also

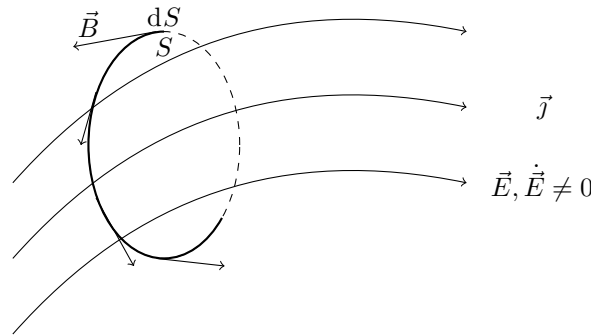


Abbildung A.5: Die 4. Maxwell-Gleichung

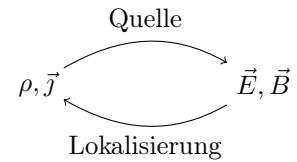
$$\int_S d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{B} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \frac{d}{d(ct)} \int_S \underbrace{d\vec{S} \cdot \vec{E}}_{=\Psi} + \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int d\vec{S} \cdot \vec{j}}_{=I \text{ Strom}}$$

Setzen wir zylindrische Symmetrie voraus, so erhalten wir

$$\int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B} = 4\pi r \left| \vec{B}(r) \right| = \frac{4\pi}{c} I \implies \left| \vec{B} \right| \sim \frac{1}{r}.$$

A.4 Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen

- Die Maxwell-Gleichungen sind lineare ($\rightarrow$ Superposition),
- partielle (Ableitungen in x^i und $ct \rightarrow \nabla, \partial_{ct}$),



- hyperbolische Differenzialgleichungen (wird später noch erklärt).
- Die Maxwell-Gleichungen ergeben nur Sinn in einem Bezugssystem, wir legen also ein Inertialsystem fest.
- Wir haben 2 div-Gleichungen und 2 rot-Gleichungen, also effektiv $1+1+3+3 = 8$ Gleichungen, wir untersuchen aber nur die Dynamik von $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feld ($3+3 = 6$ Komponenten). Sind die Maxwell-Gleichungen daher überbestimmt?

A.5 Erhaltung der elektrischen Ladung

Betrachte Maxwell (1) und (4):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \mid \partial_{ct} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \mid \operatorname{div}\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} &= 0 = \partial_{ct}\operatorname{div} \vec{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div} \vec{j} \\ &= 4\pi\partial_{ct}\rho + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div} \vec{j}\end{aligned}$$

Also insgesamt die sog. Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (\text{A.1})$$

In Integralform ergibt sich daraus:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho = \frac{d}{dt} q = - \int_V d^3r \operatorname{div} \vec{j} \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{j}.$$

Die Elektrodynamik ist eine Kontinuumstheorie. Ladung ist dabei eine Art „Fluid“.

A.6 Elektromagnetische Dualität

Betrachte die Maxwell-Gleichungen im Vakuum, d.h. $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Dann gilt

- (1) $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
- (2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
- (3) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B}$
- (4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E}$

Vertauschen wir $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, so ändert sich an den Maxwell-Gleichungen im Vakuum nichts (Dualität). Warum existieren eigentlich keine magnetischen Ladungen?

- (1) $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$
- (2) $\operatorname{div} \vec{B} = 4\pi\rho_m$
- (3) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m$
- (4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

Es folgt also, analog zu A.1, eine Kontinuitätsgleichung für die magnetische Ladung

$$\partial_t \rho_m + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

A.7 Elektrodynamik in Materie

Elektrodynamik in Materie ist im Allgemeinen sehr kompliziert. Im einfachsten Fall ist die Wirkung

- 1. linear
- 2. isotrop
- 3. instantan

Dann existiert eine effektive Beschreibung mithilfe von nur zwei Konstanten. Als erstes benötigen wir die Dielektrizitätskonstante ϵ und die Permeabilitätskonstante μ . Es gilt

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

im Vakuum (in diesem Fall $\epsilon = \mu = 1$)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{ct} \vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= +\partial_{ct} \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

in Materie

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{ct} \vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= +\partial_{ct} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

A.8 elektrostatisches Potenzial

Dabei bedeutet elektrostatisch, dass alle Zeitableitungen 0 sind. Für das elektrische Feld aus

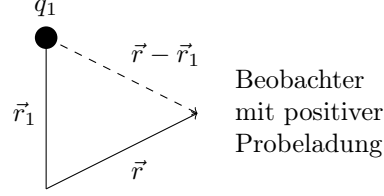


Abbildung A.6: Elektrisches Feld

Abbildung A.6 gilt daher

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \cdot \vec{e}_{\vec{r} - \vec{r}_1} = q_1 \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}.$$

Bei vielen felderzeugenden Ladungen berechnen wir einfach die Superposition

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i^n q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

Da es sich bei der Elektrodynamik um eine Kontinuumsstheorie handelt, gehen wir von q zu ρ über. Im Kontinuumsstages erhalten wir also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Im folgenden wirke ∇ auf r und ∇' auf r' . Es gilt

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Eingesetzt in die Gleichung von oben erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= - \int d^3r' \rho(\vec{r}') \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\nabla \underbrace{\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=:\phi(\vec{r})} \\ \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla \phi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Definition A.4. Das elektrostatische Potenzial ϕ ist gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Für die Elektrostatik gilt also $\text{rot } \vec{E} = -\text{rot } \vec{\phi} = 0$. Aus den Maxwell-Gleichungen erhalten wir konsistenterweise $\text{rot } \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B} = 0$.

$$\begin{aligned} W_{AB} &= q \int_A^B d\vec{S} \cdot \vec{E} \sim \text{Verschiebearbeit} \\ &= q \cdot |\phi(\vec{r}_B) - \phi(\vec{r}_A)| \sim \text{Interpretation von } \phi \text{ als potentielle Energie} \end{aligned}$$

Aus

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$$

und dem Gauß-Gesetz

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

erhalten wir

$$-\text{div } \nabla\phi = -\Delta\phi = 4\pi\rho$$

Definition A.5 (Laplace-Operator).

$$\Delta = \text{div } \nabla = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$$

Satz A.6 (Poisson-Gleichung). Es gilt

$$\Delta\phi = -4\pi\rho$$

beziehungsweise im Vakuum

$$\Delta\phi = 0$$

Wir berechnen nun $\Delta\phi$ an einem Ort $\neq 0$ im Feld einer Punktladung.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} && \text{Potenzial einer Punktladung } \vec{r}' \\ \Delta\phi &= \Delta \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\underbrace{r \cdot \frac{1}{r}}_{=\text{const}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nun möchten wir $\Delta\phi$ bei der Punktladung berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \Delta\phi &\stackrel{\Delta=\text{div } \nabla}{=} \int_V d^3r \text{div } \nabla\phi \\ &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \nabla\phi \\ &\stackrel{\text{sph. Symmetrie}}{=} \int_{\partial V} r^2 d\Omega \cdot \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial r}}_{=-\frac{1}{r^2}} \\ &= - \int_{\partial V} d\Omega \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta_D |\vec{r} - \vec{r}'|$$

kombiniert beide Fälle. Dabei ist δ_D die Dirac-Funktion.

A.9 Dirac δ_D -Funktion

Möchte man von der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ auf die Ladung im Volumen V schließen, berechnet man einfach

$$q = \int_V d^3r \rho(\vec{r}).$$

In die andere Richtung ist es nicht offensichtlich, hier gilt

$$\rho(\vec{r}) = q \delta_D(\vec{r} - \vec{r}')$$

wenn q bei $\vec{r}'$ liegt.

1. Für das Potenzial gilt

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3R' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \int_V d^3r' \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \delta_D(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \int_V d^3r' \varphi(\vec{r}') \delta_D(\vec{r} - \vec{r}') &= \varphi(\vec{r}) \text{ und } \int d^3r' \delta_D(\vec{r} - \vec{r}') = 1 \\ &= -4\pi \rho(\vec{r}) \end{aligned}$$

Man kann sich die Dirac δ -Funktion vorstellen als

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

2. Für diskrete Ladungen gilt

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ \Delta \phi(\vec{r}) &= \sum_i q_i \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ &= \sum_i q_i (-4\pi) \delta_D(\vec{r} - \vec{r}_i) \\ &= -4\pi \rho(\vec{r}) \\ &= \sum_i q_i \delta_D(\vec{r} - \vec{r}_i) \end{aligned}$$

A.10 Eigenschaften der Dirac δ_D -Funktion

1. Normierung $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_D(x) = 1$
2. Verschiebung $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \delta_D(x - a) = \varphi(a)$
3. Skalierung $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_D(ax) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \delta_D(y)$
4. Ableitung $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \delta'_D(x - a) = \underbrace{\varphi(x) \delta_D(x - a) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\rightarrow 0} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi'(x) \delta_D(x - a) = \varphi'(a).$

A.11 Potenzielle Energie einer Ladungsverteilung

- (1) Bei einer Ladung q_1 an der Stelle $\vec{r}_1$ erhalten wir das Potenzial $\phi_1 = \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$.
- (2) Nun schieben wir eine Ladung q_2 aus dem Unendlichen an die Stelle $\vec{r}_2$. Dabei verrichten wir eine Arbeit $W_2 = q_2 \phi_1(\vec{r}_2)$.
- (3) Wir schieben eine dritte Ladung q_3 an die Stelle $\vec{r}_3$ und verrichten die Arbeit $W_3 = q_3(\phi_1(\vec{r}_3) + \phi_2(\vec{r}_3))$.
- $\vdots$
- (n) Schließlich schieben wir die Ladung q_n an die Stelle $\vec{r}_n$ und verrichten die Arbeit $W_n = q_n \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i(\vec{r}_n)$

Als Gesamtenergie ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ges}} &= \sum_{n=1}^N W_n \\
 &= \sum_{n=1}^N q_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\
 &\stackrel{\text{Doppelzählung}}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}
 \end{aligned}$$

Gehen wir nun zum Kontinuum über, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \cdot \underbrace{\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=\phi(\vec{r})} \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \cdot \phi(\vec{r}) \\
 &\stackrel{\Delta\phi = -4\pi\rho}{=} -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \Delta\phi \cdot \phi
 \end{aligned}$$

Es gilt die Produktregel $\phi \nabla \phi = \phi \operatorname{div} \nabla \phi = \operatorname{div}(\phi \nabla \phi) - \nabla \phi \cdot \nabla \phi$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \operatorname{div}(\phi \nabla \phi) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla \phi)^2 \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\vec{E}|^2 \\
 &= \int d^3r W_{\text{el}}
 \end{aligned}$$

Definition A.7 (Energiedichte). Wir definieren die Energiedichte $W_{\text{el}} = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}|^2$.