

Theoretische Physik 3: Elektrodynamik

Prof. Dr. Bjoern Malte Schäfer

Mitschrift von

Christof Gehrig (christof.gehrig@stud.uni-heidelberg.de)

Josua Kugler (josua.kugler@stud.uni-heidelberg.de)

Christian Merten (christian.merten@stud.uni-heidelberg.de)

Rui Yang (rui.yang@stud.uni-heidelberg.de)

Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

1	Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen	3
1.1	Elektrisches Feld	3
1.2	Elektrische Feldstärke	3
1.3	Maxwell-Gleichungen	4
1.4	Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen	5
1.5	Erhaltung aus elektrischer Ladung	5
1.6	Elektromagnetische Dualität	5

Kapitel 1

Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen

1.1 Elektrisches Feld

Satz 1.1 (Colomb Gesetz). Kraft zwischen zwei Ladungen

$$F = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}.$$

Im SI-System ist $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ mit A für Ampère und As = C für Coulomb.

Im Gauß-System ist $q = \frac{q^*}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$, so dass $k = 1$.



Abbildung 1.1: Zwei Ladungen

1.2 Elektrische Feldstärke

Satz 1.2 (Coulomb Kraft).

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Satz 1.3 (Lorentz Kraft).

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

1.3 Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell Gleichungen bilden die axiomatische Verbindung zwischen Feldern $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ und den Ladungen $\rho, \vec{j}$ in Inertialsystemen (oder lokal in frei fallenden Systemen).

(1)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = 4\pi\rho$$

Integralform

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} d^3x \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \underbrace{\Psi}_{\text{elektrischer Fluss}} = \int_V 4\pi\rho d^3r = \underbrace{4\pi q}_{\text{Ladung}}$$

Im Fall von sphärischer Symmetrie gilt

$$\int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{E} = 4\pi r^2 |\vec{E}(r)| = 4\pi q \implies |E| \sim \frac{q}{r^2}.$$

(2)

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = \partial_i B^i = 0$$

Integralform

$$\int_V d^3r \operatorname{div} \vec{B} = \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{B} = \underbrace{\Phi}_{\text{magnetischer Fluss}} = 0.$$

Es gibt keine magnetische Ladung, es gilt also immer $\rho_m = 0$. Elektromagnetische Dualität.

(3) Faraday-Induktionsgesetz

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \underbrace{-}_{\text{Lenz-Regel}} \partial_{ct} \vec{B}$$

Integralform

$$\int_S d\vec{S} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = \underbrace{U}_{\text{Spannung}} = -\frac{d}{d(ct)} \int d\vec{S} \cdot \vec{B} = -\frac{d}{d(ct)} \Phi.$$

(4) Ampère-Gesetz

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Integralform

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \frac{d}{dct} \underbrace{\int_S d\vec{S} \cdot \vec{E}}_{\Psi} + \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int d\vec{S} \cdot \vec{j}}_{I \text{ Strom}}$$

Im Fall von zylindrischer Symmetrie gilt:

$$\int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B} = 4\pi r |\vec{B}(r)| = \frac{4\pi}{c} I \implies |\vec{B}| \sim \frac{1}{r}.$$

1.4 Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen

- linear ($\rightarrow$ Superposition)
- partiell
- hyperbolisch
- Inertialsystem
- Überbestimmtheit?

1.5 Erhaltung aus elektrischer Ladung

Betrachte Maxwell (1) und (4):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \mid \partial_{ct} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \mid \operatorname{div}\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} &= 0 = \partial_{ct}\operatorname{div} \vec{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div} \vec{j} \\ &= 4\pi\partial_{ct}\rho + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div} \vec{j}\end{aligned}$$

Also insgesamt die sog. Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.1)$$

In Integralform ergibt sich daraus:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho = \frac{d}{dt} q = - \int_V d^3r \operatorname{div} \vec{j} \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{j}.$$

Die Elektrodynamik ist eine Kontinuumstheorie. Ladung ist dabei eine Art „Fluid“.

1.6 Elektromagnetische Dualität

Betrachte die Maxwell-Gleichungen im Vakuum, d.h. $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Dann gilt

- (1) $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
- (2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
- (3) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct}\vec{B}$
- (4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct}\vec{E}$

Vertauschung $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$: Dualität

Warum existieren eigentlich keine magnetischen Ladungen?

$$(1) \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$(2) \operatorname{div} \vec{B} = 4\pi\rho_m$$

$$(3) \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct}\vec{B} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m$$

$$(4) \operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Es folgt also direkt $\partial_t\rho_m + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ analog zu 1.1.