

Theoretische Physik 3: Elektrodynamik

Prof. Dr. Bjoern Malte Schäfer

Mitschrift von

Christof Gehrig (christof.gehrig@stud.uni-heidelberg.de)

Josua Kugler (josua.kugler@stud.uni-heidelberg.de)

Christian Merten (christian.merten@stud.uni-heidelberg.de)

Rui Yang (rui.yang@stud.uni-heidelberg.de)

Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

A	Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen	3
A.1	Elektrisches Feld	3
A.2	Elektrische Feldstärke	3
A.3	Maxwell-Gleichungen	4
A.4	Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen	6
A.5	Erhaltung der elektrischen Ladung	6
A.6	Elektromagnetische Dualität	7

Kapitel A

Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen

A.1 Elektrisches Feld

Satz A.1 (Coulomb Gesetz). Kraft zwischen zwei Ladungen

$$F = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}.$$

Im SI-System ist $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ mit A für Ampère und As = C für Coulomb.

Im Gauß-System ist $q = \frac{q^*}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$, so dass $k = 1$.



Abbildung A.1: Zwei Ladungen

A.2 Elektrische Feldstärke

Satz A.2 (Coulomb Kraft).

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Satz A.3 (Lorentz Kraft).

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

A.3 Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell Gleichungen bilden die axiomatische Verbindung zwischen Feldern $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ und den Ladungen $\rho, \vec{j}$ in Inertialsystemen (oder lokal in frei fallenden Systemen).

- (1) $\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = 4\pi\rho$. Mithilfe der 1. Maxwell-Gleichung kann aus dem elektrischen Feld die Ladung bestimmt werden oder aus der Ladungsverteilung auf ein elektrisches Feld geschlossen werden.

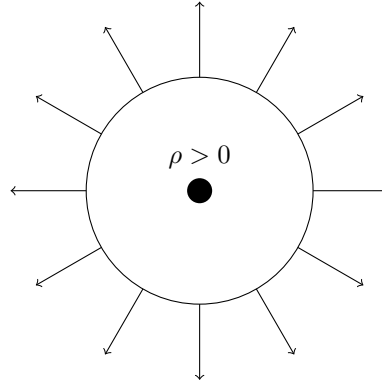


Abbildung A.2: Die 1. Maxwell-Gleichung

$$\int_V d^3r \text{div } \vec{E} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \underset{\text{el. Fluss}}{\Psi} = \int_V d^3r 4\pi\rho = 4\pi q$$

Setzen wir eine sphärische Symmetrie voraus, so erhalten wir

$$\int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{E} = 4\pi r^2 \cdot |\vec{E}(r)| = 4\pi q \implies |E| \sim \frac{q}{r^2}.$$

Damit haben wir also das Coulomb-Gesetz in Zusammenhang zu den Maxwell-Gleichungen gesetzt.

- (2) $\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = \partial_i B^i = 0$

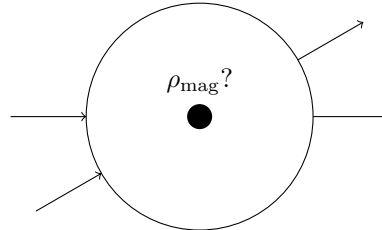


Abbildung A.3: Die 2. Maxwell-Gleichung

$$d^3r \text{div } \vec{B} = \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{B} = \underset{\text{mag. Fluß}}{\Phi} = 0$$

Es gibt keine magnetische Ladung (elektromagnetische Dualität)

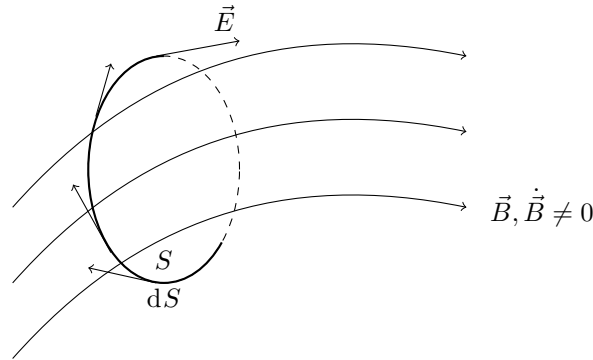


Abbildung A.4: Die 3. Maxwell-Gleichung

- (3) $\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B}$. Die 3. Maxwell-Gleichung ist auch bekannt als Induktionsgesetz von Faraday und stellt eine Verbindung her zwischen magnetischem Fluss durch eine Fläche und induzierter Spannung auf dem Rand der Fläche. Das $-$ auf der rechten Seite führt zur Lenz-Regel.

$$\int_S dS \cdot \text{rot } \vec{E} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = \underset{\substack{U \\ \text{Spannung}}}{=} - \underbrace{\frac{d}{d(ct)}}_{\frac{1}{c} \frac{d}{dt}} \int d\vec{S} \cdot \vec{B} = - \frac{d}{d(ct)} \Phi$$

- (4) $\text{rot } \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$. Die 4. Maxwell-Gleichung ist auch bekannt als Ampere-Gesetz und stellt eine Verbindung her zwischen elektrischen Fluss oder sich änderndem $\vec{E}$ -Feld und einem magnetischen Feld auf dem Rand der Fläche. In integraler Form gilt also

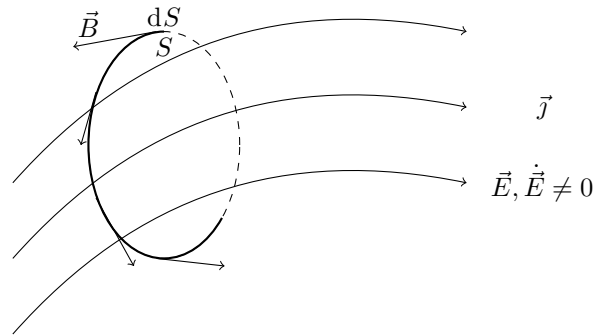


Abbildung A.5: Die 4. Maxwell-Gleichung

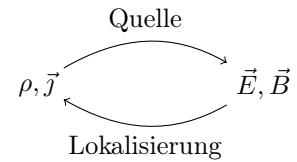
$$\int_S d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{B} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \frac{d}{d(ct)} \int_S \underbrace{d\vec{S} \cdot \vec{E}}_{=\Psi} + \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int d\vec{S} \cdot \vec{j}}_{=I \text{ Strom}}$$

Setzen wir zylindrische Symmetrie voraus, so erhalten wir

$$\int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{B} = 4\pi r |\vec{B}(r)| = \frac{4\pi}{c} I \implies |\vec{B}| \sim \frac{1}{r}.$$

A.4 Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen

- Die Maxwell-Gleichungen sind lineare ($\rightarrow$ Superposition),
- partielle (Ableitungen in x^i und $ct \rightarrow \nabla, \partial_{ct}$),



- hyperbolische Differenzialgleichungen (wird später noch erklärt).
- Die Maxwell-Gleichungen ergeben nur Sinn in einem Bezugssystem, wir legen also ein Inertialsystem fest.
- Wir haben 2 div-Gleichungen und 2 rot-Gleichungen, also effektiv $1+1+3+3 = 8$ Gleichungen, wir untersuchen aber nur die Dynamik von $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feld ($3+3 = 6$ Komponenten). Sind die Maxwell-Gleichungen daher überbestimmt?

A.5 Erhaltung der elektrischen Ladung

Betrachte Maxwell (1) und (4):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \mid \partial_{ct} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \mid \operatorname{div}\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} &= 0 = \partial_{ct}\operatorname{div} \vec{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div} \vec{j} \\ &= 4\pi\partial_{ct}\rho + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div} \vec{j}\end{aligned}$$

Also insgesamt die sog. Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (\text{A.1})$$

In Integralform ergibt sich daraus:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho = \frac{d}{dt} q = - \int_V d^3r \operatorname{div} \vec{j} \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{j}.$$

Die Elektrodynamik ist eine Kontinuumstheorie. Ladung ist dabei eine Art „Fluid“.

A.6 Elektromagnetische Dualität

Betrachte die Maxwell-Gleichungen im Vakuum, d.h. $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Dann gilt

$$(1) \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$(2) \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$(3) \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B}$$

$$(4) \operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E}$$

Vertauschen wir $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, so ändert sich an den Maxwell-Gleichungen im Vakuum nichts (Dualität). Warum existieren eigentlich keine magnetischen Ladungen?

$$(1) \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$(2) \operatorname{div} \vec{B} = 4\pi\rho_m$$

$$(3) \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m$$

$$(4) \operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Es folgt also, analog zu A.1, eine Kontinuitätsgleichung für die magnetische Ladung

$$\partial_t \rho_m + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$