Aufgabe	A4	A5	A6	A7	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 4. (a) Beh ($*$).: R nullteilerfrei $\implies \forall f, g \in R[t]$ gilt $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

Beweis. Seien $f, g \in R[t]$. Falls $f \neq 0$ und $g \neq 0$ folgt $\mathrm{e}(f) \neq 0$ und $\mathrm{e}(g) \neq 0$. Wegen R nullteilerfrei folgt damit $\mathrm{e}(f \cdot g) \neq 0$. Aus der Multiplikation von Polynomen folgt somit direkt $\deg(f \cdot g) = f + g$.

Falls $f = 0$ und/oder $g = 0$: O.B.d.A.: $f = 0$. Dann ist $f \cdot g = 0$. Damit

$$\deg(f) + \deg(g) = -\infty + \deg(g) = -\infty = \deg(0) = \deg(f \cdot g).$$

$\square$

Beh.: R nullteilerfrei $\implies R[t]^\times = R^\times$

Beweis. „$\subset$": Sei $f \in R[t]^\times$. Dann ex. $g \in (R[t])^\times$ mit $f \cdot g = 1$. Dann folgt mit ($*$):

$$0 = \deg(1) = \deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g).$$

Wegen R nullteilerfrei folgt $R \neq 0$ und damit $f, g \neq 0$. Damit folgt $\deg(f) \in \mathbb{N}_0$ und $\deg(g) \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$\deg(f) = \deg(g) = 0.$$

Damit ex. $a, b \in R$ mit $f = a$, $g = b$ und $ab = 1$. D.h. $f = a \in R^\times$.

„$\supset$": Sei $a \in R^\times$. Dann ex. $b \in R^\times$ mit $ab = 1$. Es ist $a, b \in R[t] \implies a \in R[t]^\times$. $\square$

(b) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist wegen $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4} = \overline{0}$ und $\overline{2} \neq 0$ nicht nullteilerfrei. Hier ist $\overline{1} + \overline{2}t \in ((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[t])^\times$, wegen

$$(\overline{1} + \overline{2}t)(\overline{1} + \overline{2}t) = \overline{1} + \underbrace{\overline{4}t + \overline{4}t^2}_{=0} = \overline{1}.$$

Aber wegen $2 \neq 0$ ist $1 + \overline{2}t \notin (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$.

(c) Sei $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $f = \overline{2}t$. Dann ist wegen $f(\overline{2}) = \overline{4}t = \overline{0}$:

$$\#\{r \in R | f(r) = 0\} = \#\{\overline{0}, \overline{2}\} = 2 > 1 = \deg(f).$$

Aufgabe 5. (a) Beh.: φ ist surjektiver Ringhomomorphismus.

Beweis. Zunächst ist $\varphi(1) = 1$. Seien $f, g \in \mathbb{R}[t]$ beliebig. Dann gilt

$$\varphi(f + g) = (f + g)(i) = f(i) + g(i) = \varphi(f) + \varphi(g)$$
$$\varphi(f \cdot g) = (f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i) = \varphi(f) \cdot \varphi(g).$$

$\implies \varphi$ Ringhomomorphismus.

Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig, dann ex. $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z = a + ib$. Wähle nun $f := a + bt \in \mathbb{R}[t]$. Damit folgt $\varphi(f) = a + ib = z$. $\implies \varphi$ surjektiv. $\square$

(b) Beh.: $t^2 + 1 \in \ker \varphi$ und $\forall f \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$ mit $\deg(f) < 2$ gilt $\varphi(f) \neq 0$.

Beweis. $\varphi(t^2 + 1) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \implies t^2 + 1 \in \ker \varphi$.

Sei $f \in \mathbb{R}[t]$ mit $\deg(f) < 2$. Dann ex. $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f = a + bt$. Damit folgt $\varphi(f) = a + ib$. Falls $b \neq 0$ dann ist $ib \notin \mathbb{R} \implies -a \neq ib \implies \varphi(f) \neq 0$.
Falls $b = 0$, dann ist wegen $f \neq 0$: $\varphi(f) = a \neq 0$. $\square$

(c) Beh.: $\ker \varphi = (t^2 + 1)$.

Beweis. „$\subset$": Sei $f \in \ker \varphi$. Teile f durch t^2+1 mit Rest. Dann ex. $g, h \in \mathbb{R}[t]$ mit

$$f = g \cdot (t^2+1) + h \qquad \deg(h) < \deg(t^2+1) = 2.$$

Wegen $\varphi(f) = 0$ und φ Ringhomomorphismus folgt

$$\varphi(f) = \varphi(g)\varphi(i^2+1) + \varphi(h) \overset{(b)}{=} \varphi(h) = 0.$$

Wegen $\varphi(h) = 0$, $\deg(h) < 2$ und (b) folgt also $h = 0$. Damit ist $f = g \cdot (t^2+1) \in (t^2+1)$.

„$\supset$": Sei $f \in (t^2+1)$. Dann ex. $g \in \mathbb{R}[t]$ mit $f = g \cdot (t^2+1)$. Damit folgt $\varphi(f) = \varphi(g)\varphi(t^2+1) \overset{(b)}{=} 0 \implies f \in \ker \varphi$. □

(d) Beh.: $\mathbb{R}[t]/(t^2+1) \overset{\sim}{=} \mathbb{C}$ und $(t^2+1) \subset \mathbb{R}[t]$ ist maximales Ideal.

Beweis. Folgt mit $\ker \varphi = (t^2+1)$ und φ surjektiv, also im $\varphi = \mathbb{C}$ aus dem Homomorphiesatz. Damit ist $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ isomorph zum Körper $\mathbb{C}$, damit selbst ein Körper. Damit folgt mit Bem. 1.23, dass (t^2+1) ein maximales Ideal ist. □

Aufgabe 6. (a) Beh.: $\sqrt{I}$ ist ein Ideal in R mit $I \subset \sqrt{I}$.

Beweis. $r \in I \implies r^1 \in I \implies r \in \sqrt{I} \implies I \subset \sqrt{I}$.

(I1) I Ideal $\implies 0 \in I \implies 0^1 \in I \implies 0 \in \sqrt{I}$.

(I2) Seien $a, b \in \sqrt{I}$: Dann ex. $n, m \in \mathbb{N}$ mit $a^n \in I$ und $b^m \in I$. Definiere $k := n \cdot m$. Dann ist wegen I Ideal $a^k = (a^n)^m \in I$ und $b^k = (b^m)^n \in I$. Dann folgt mit binomischer Formel und da jeder Summand entweder einen Faktor a^n oder b^m enthält:

$$(a+b)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} b^l = a^k + \ldots + \binom{\cdots}{\cdots} a^n b^m + \ldots + b^k \in I.$$

Mit $\binom{k}{l}\cdot$ ist hier die $\binom{k}{l}$-fache Summe des Einselements in R gemeint. Damit ist $a+b \in \sqrt{I}$.

(I3) Sei $a \in \sqrt{I}$: Dann ex. ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n \in I$. Sei $r \in R$ beliebig. Dann ist wegen I Ideal

$$r^n a^n \in I \implies (r \cdot a)^n \in I \implies r \cdot a \in \sqrt{I}.$$

$\implies \sqrt{I}$ ist ein Ideal □

(b) Beh.: Ist I ein Primideal, so gilt $\sqrt{I} = I$.

Beweis. Sei $r \in \sqrt{I}$ und I Primideal. Dann ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $r^n \in I$. Mit $r^n = \underbrace{r \cdot \ldots \cdot r}_{n\text{-mal}}$ folgt durch sukzessives Anwenden der Primidealeigenschaft auf I: $r \in I$. $\implies \sqrt{I} \subset I$ und damit wegen (a) $\sqrt{I} = I$. □

(c) Wähle R beliebig und $I = R$, dann ist I nach Definition kein Primideal, aber wegen $R = I \subset \sqrt{I} \subset R \implies \sqrt{I} = R = I$.

Aufgabe 7. (a) Beh.: $\Phi\colon \{\text{Ideale in } R/I\} \to \{\text{Ideale } \tilde{I} \text{ in } R \text{ mit } I \subset \tilde{I}\}$, $J \mapsto \pi^{-1}(J)$ ist wohldefiniert und inklusionserhaltend.

Beweis. Sei $J \in \{\text{Ideale in } R/I\}$ beliebig. Wegen J Ideal in R/I und π Ringhomomorphismus ist $\Phi(J) = \pi^{-1}(J) := \tilde{I}$ Ideal in R.

Außerdem ist wegen J Ideal, $I = 0 + I = 0 \in J$. Damit folgt $I = \ker \pi \subset \pi^{-1}(J) = \tilde{I}$.

Seien nun J, J' Ideale in R/I mit $J \subset J'$. Sei $r \in \pi^{-1}(J)$. Dann ist $\pi(r) \in J \subset J' \implies r \in \pi^{-1}(J')$. Damit folgt $\Phi(J) \subset \Phi(J')$. □

Beh.: $\Psi\colon \{\text{Ideale } \tilde{I} \text{ in } R \text{ mit } I \subset \tilde{I}\} \to \{\text{Ideale in } R/I\}$, $\tilde{I} \mapsto \pi(\tilde{I})$ und inklusionserhaltend.

Beweis. Sei $\tilde{I}$ ein Ideal in R mit $I \subset \tilde{I}$. Wegen π surjektiver Ringhomomorphismus ist $\pi(\tilde{I})$ ein Ideal in R/I.

Seien nun $\tilde{I}, \tilde{I}'$ Ideale in R mit $I \subset \tilde{I} \subset \tilde{I}'$. Sei $A \in \Psi(\tilde{I})$. Dann ex. ein $r \in \tilde{I} \subset \tilde{I}'$ mit $\pi(r) = A$. Dann ist $\pi(r) = A \in \pi(\tilde{I}') = \Psi(\tilde{I}')$. Damit folgt $\Psi(\tilde{I}) \subset \Psi(\tilde{I}')$. □

(b) Beh.: $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$

Beweis. Sei J ein Ideal in R/I. Definiere $\tilde{I} := \Phi(J) = \pi^{-1}(J)$. Nach (a) ist $\tilde{I}$ ein Ideal in R mit $I \subset \tilde{I}$.

- Zz.: $J \subset \Psi(\Phi(J))$: Sei $A \in J$. Dann ex. $r \in R$ mit $\pi(r) = A$. Es gilt $r \in \pi^{-1}(J) = \tilde{I}$. Damit folgt $A = \pi(r) \in \pi(\tilde{I}) = \Psi(\Phi(J))$.
- Zz.: $\Psi(\Phi(J)) \subset J$. Sei $A \in \Psi(\Phi(J))$. Wegen $A \in \pi(\Phi(J))$ ex. ein $r \in \Phi(J) = \pi^{-1}(J)$ mit $\pi(r) = A$. Damit folgt $\exists B \in J$ mit $B = \pi(r) = A \implies A \in J$.

□

Beh.: $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$

Beweis. Analog. □

(c) Beh.: Ideale in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ sind $\{(\overline{1}), (\overline{3}), (\overline{5})\}$.

Beweis. Bestimme alle Teiler von 15: $1, 3, 5$. Diese bilden alle Ideale $\tilde{I}$ in $\mathbb{Z}$ mit $(15) \subset \tilde{I}$. Mit (b) und $(1) = \mathbb{Z}$ folgt damit direkt für alle Ideale in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$: $\{\Psi(\mathbb{Z}), \Psi((3)), \Psi((5))\} = \{(\overline{1}), (\overline{3}), (\overline{5})\}$. □