Christian Merten, Zichen Li

A1	A2	A3	A4	A5	Σ

A1 $A := \mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$, $\mathfrak{m} = (\bar{X}, \bar{Y})$

(a) Die Maximalideale von A sind genau die Max.ideale von $\mathbb{C}[X,Y]$, die $Y - X^2$ umfassen. Die Max.ideale von $\mathbb{C}[X,Y]$ sind nach VL von der Form $\mathfrak{m}_z = \ker(\varphi_z)$ mit φ_z Einsetzhom. für ein $z = (x,y) \in \mathbb{C}^2$.

Für $z \in \mathbb{C}^2$ bel. ist $(Y - X^2) \subseteq \mathfrak{m}_z = \ker(\varphi_z) \iff (Y-X^2)(z) = 0 \iff y - x^2 = 0 \iff y = x^2$.

Also ist $\operatorname{Specm}(A) = \{ \pi(\mathfrak{m}_z) \mid z = (x,y) \in \mathbb{C}^2 \text{ mit } y = x^2 \}$ wobei $\pi : \mathbb{C}[X,Y] \xrightarrow{\text{kan}} A$. □

(b) Es ist $(\bar{X}, \bar{Y}) = \pi[(X,Y)] = \pi(\mathfrak{m}_{(0,0)})$ also $\mathfrak{m} \subseteq A$ Maximalideal, insbes. Primideal, also $A_{\mathfrak{m}}$ wohldef.

Es ist $Y - X^2 \in \mathbb{C}[Y][X]$ irreduzibel also $(Y-X^2)$ Primideal in $\mathbb{C}[X,Y]$, insbes. ist A nullteilerfrei.

Sei $\tilde{\psi} : A_{\mathfrak{m}} \xhookrightarrow{\text{kan}} Q(A)$, $\frac{\bar{f}}{\bar{g}} \longmapsto \frac{\bar{f}}{\bar{g}}$. Da $\bar{g} \in A \setminus \mathfrak{m} \iff g \in \mathbb{C}[X,Y] \setminus (X,Y)$
$\iff g(0,0) \neq 0$

ist $\psi : A_{\mathfrak{m}} \xhookrightarrow{\text{kan}} B$ wohldefiniert. Es b.z.z., dass ψ surjektiv ist. Aber wegen der Äquivalenz $\bar{g} \in A \setminus \mathfrak{m} \iff g(0,0) \neq 0$ folgt die Beh. □

(c) Es ist $\mathbb{C}[X,Y]$ $\mathbb{C}$-VR und da $(Y - X^2)$ $\mathbb{C}[X,Y]$ Ideal, insbes. $\mathbb{C}$-UVR von $\mathbb{C}[X,Y]$, also A $\mathbb{C}$-VR. Nun ist analog $\mathfrak{m}$ $\mathbb{C}$-UVR und $\mathfrak{m}^2 \subseteq \mathfrak{m}$ $\mathbb{C}$-VR also $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ $\mathbb{C}$-VR.

A2) (a) Beh: Jede offene UG hat endlichen Index.

Bew.: Sei $H \leq G$ offene UG. Also ist G/H diskret. Sei außerdem $(U_i)_{i\in I}$ bel. offene Mengen in G/H mit $G/H = \bigcup_{i\in I} U_i$. Nach Def. der Faktorraumtopologie ist $\pi: G \to G/H$ stetig, also sind $(\pi^{-1}(U_i))_{i\in I}$ offen. Außerdem ist $\pi^{-1}(G/H) = G$ also ist $G = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(G/H)$.
Da G kompakt, ex. $U_1, \dots, U_n$ s.d. $G = \bigcup_{i=1}^n \pi^{-1}(U_i)$. Da π surj. ist, folgt
$G/H = \pi(G) = \pi\left(\bigcup_{i=1}^n \pi^{-1}(U_i)\right) = \bigcup_{i=1}^n \pi(\pi^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i=1}^n U_i$, also ist G/H kompakt. Diskrete, kompakte Räume sind endlich (betrachte die Familie $(\{x\})_{x\in G/H}$), also $(G:H) = \# G/H < \infty$.

$\square$

(b) Sei G proendlich. $H \leq G$ UG. Beh: $\overline{H} = \bigcap_{\substack{U \leq G \text{ offen} \\ H \leq U}} U =: V$

Bew.: „$\subseteq$" Da offene UG auch abgeschlossen sind ist V abgeschlossen. Da außerdem $H \subseteq V$ folgt $\overline{H} \subseteq V$.

„$\supseteq$": Sei $x \notin \overline{H}$. Dann ist $x \in G \setminus \overline{H} =: A$. Da $\overline{H}$ abgeschl., ist A offen und damit $x^{-1}A$ offene Umgebung der 1, also ex. $N \trianglelefteq G$ offen mit $N \subseteq x^{-1}A$, also $xN \subseteq A$. Insbes. ist $xN \cap H = \emptyset$. Ang.: $x \in NH$, dann ist $x = nh$ für $n \in N, h \in H$, also $\underbrace{n^{-1}x}_{\in Nx} \in H$ und da $N \trianglelefteq G$ ist $xN = Nx$ also $n^{-1}x \in xN \cap H$ ↯.
Also $x \notin NH$. Es ist $H \leq NH$ und NH Untergruppe da $N \trianglelefteq G$. Nun ist $\emptyset \neq N \subseteq NH$ und N offen, d.h. NH offen. Also $x \notin \bigcap_{\substack{U \leq G \text{ offen} \\ H \leq U}} U$.

$\square$

A3 (a) **Beh.** $T_2 \Rightarrow$ nüchtern

Bew. Sei Z irreduzibel und abgeschlossen. Also $Z \neq \emptyset$. Falls $Z = \{x\}$ ist $\overline{\{x\}} = Z$ da $\{x\}$ abgeschlossen.

Ang. es ex. $x_1 \neq x_2 \in Z$. Dann ex. offene $U_1, U_2 \subseteq X$ mit $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Also sind $Z \cap U_1, Z \cap U_2$ offen in Z, insbes. $Z \setminus (Z \cap U_1)$, $Z \setminus (Z \cap U_2)$ abgeschlossen. Da $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ sind $Z \cap U_1 \neq \emptyset \neq Z \cap U_2$ und da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist

$Z \setminus (Z \cap U_1) \cup Z \setminus (Z \cap U_2) = Z$ ↯. □

(b) **Beh** nüchtern $\Rightarrow T_0$

Bew. Seien $x_1 \neq x_2 \in X$. Es sind $\overline{\{x_1\}}$ und $\overline{\{x_2\}}$ abgeschl. und irreduzibel. Da $x_1 \neq x_2$ folgt, wegen der Eindeutigkeit des gen. Punktes im nüchternen Raum X, $\overline{\{x_1\}} \neq \overline{\{x_2\}}$.

Ang. $x_1 \in \overline{\{x_2\}}$ und $x_2 \in \overline{\{x_1\}}$. Dann ist $\overline{\{x_2\}} \subseteq \overline{\{x_1\}}$ und $\overline{\{x_1\}} \subseteq \overline{\{x_2\}}$ ↯

Also oE $x_1 \notin \overline{\{x_2\}}$. Damit setze $U := X \setminus \overline{\{x_2\}}$. Dann ist $x_1 \in U$ aber $x_2 \notin U$ und U offen, da $\overline{\{x_2\}}$ abgeschl. □

(c) **Beh.** $T_0 \wedge \exists$ gen. Punkte von abg. irred. TM $\Rightarrow$ nüchtern

Bew. Sei Z abg. und irred. und $Z = \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Ang. $x \neq y$. Dann ex. oE wegen T_0 ein $U \subseteq X$ offen mit $x \in U$ und $y \notin U$. Also ist $\{y\} \subseteq X \setminus U$ und $X \setminus U$ abgeschl., also $\overline{\{y\}} \subseteq X \setminus U$ aber $x \notin X \setminus U$, also $x \notin \overline{\{y\}}$ ↯ Also $x = y$ und damit X nüchtern. □

(e) **Beh.** $X = \{a, b\}$ mit $\mathcal{U} = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ als offene Mengen ist nüchtern, aber nicht T_1

Bew. X hat genau drei abgeschlossene TM: $X, \emptyset$ und $\{b\}$. Dabei ist $\emptyset$ leer also nicht irreduzibel, $\{b\} = \overline{\{b\}}$ und $X = \overline{\{a\}}$, da $\{a\} \not\subseteq \{b\}$. Also $(X, \mathcal{U})$ nüchtern.

Aber $\{a\}$ nicht abgeschlossen, da $X \setminus \{a\} = \{b\} \notin \mathcal{U}$. □

(d) **Beh.** $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \{ A \subseteq X \mid \#(X \setminus A) < \infty \text{ oder } A = \emptyset \}$

Bew. Seien $A, B \in \mathcal{U}$. Dann ist $\#(X \setminus (A \cap B)) = \#(X \setminus A \cup X \setminus B) < \infty$ falls $A \neq \emptyset \neq B$. Sonst klar.

Außerdem ist für $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{U}$: $\#(X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i) = \#(\bigcap_{i \in I} X \setminus A_i) < \infty$ falls ein $A_i \neq \emptyset$. Sonst klar.

Außerdem sind $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.

Dann ist X T_1, denn für $x \in X$ ist auch $\#(X \setminus (X \setminus \{x\})) = \#\{x\} = 1 < \infty$ also $\{x\}$ abgeschlossen. Aber X ist abgeschlossen, da $X = X \setminus \emptyset$ und irreduzibel, da $\#X = \infty$ und alle echten abg. TM von X sind endlich. Aber X erfüllt T_1, d.h. $\overline{\{x\}} = \{x\}$ $\forall x \in X$ also X nicht nüchtern. □

A4 (a) Beh. Spec (A) nüchtern

Bew. Sei Z abgeschl. und irreduzibel. Also $Z = V(a) = V(r(a))$ für ein $a \in A$.

Ang: $r(a)$ kein PI, dann ex. $x, y \in A$ mit $xy \in r(a)$ und $x, y \notin r(a)$. Dann ist

$V(x) \cup V(y) = V(xy) \supseteq V(r(a)) = Z$. Also sind $B_1 := V(x) \cap Z$, $B_2 := V(y) \cap Z$

abgeschlossene Mengen in Z und es gilt $B_1 \cup B_2 = Z \cap (\underbrace{V(x) \cup V(y)}_{\supseteq Z}) = Z$.

Außerdem ist $x, y \notin r(a) = \bigcap_{\substack{p \text{ PI} \\ a \subseteq p}} p$. Also ex. $p_1, p_2 \in V(r(a)) = Z$ sd. $x \notin p_1$ und $y \notin p_2$.

Also $p_1 \notin V(x)$ und $p_2 \notin V(y)$. Also $B_1 \subsetneq Z \supsetneq B_2$ und damit $\lightning$ zu Z irreduzibel.

Also ist $r(a) = p$ für ein PI $p \subseteq A$. Nach Zettel 3 A5 ist $\overline{\{p\}} = V(I(\{p\})) = V(p) = Z$.

Es ist also p generischer Punkt von Z. Sei $q \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\overline{\{q\}} = Z$ also

$V(p) = V(q)$. Dann folgt $p \underset{p \text{ Prim}}{=} r(p) = \bigcap_{g \in V(p)} g = \bigcap_{g \in V(q)} g = r(q) \underset{q \text{ Prim}}{=} q$. □

(b) Sei A noethersch. Beh. $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$.

Bew. $(4) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$ ist trivial.

$(2) \Rightarrow (3)$:

Spec (A) erfülle T_1. Dann ist jede einel. Menge abgeschl. Da A noethersch genügt es zu zeigen, dass für p PI, p bereits maximal. Nun ist wegen T_1 $\{p\} = V(a)$ für ein $a \subseteq A$ Ideal. Da p PI mit $p \supseteq a$ ist $a \subsetneq A$ also ex. ein Max.ideal m, sd. $a \subseteq m$. Da Max.ideale insbes. PI folgt $m = p$ also p Max.ideal.

$(3) \Rightarrow (4)$: Da in artinschen Ringen jedes PI maximal und nur endl. viele Max.ideale existieren, ist Spec (A) endlich. Sei nun $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ bel. Dann setze $a := \bigcap_{p \in Y} p$. Dann ist für $p \in Y$: $a \subseteq p$ also $Y \subseteq V(a)$. Sei nun q PI mit $q \supseteq a = \bigcap_{p \in Y} p$. Da Y endlich, wegen Spec (A) endlich, ist nach Primvermeidung $q \supseteq p$ für ein $p \in Y$. Da aber q und p im artin. Ring A Max.ideale, folgt $q = p \in Y$. Also $Y = V(a)$, also abgeschl. Da Y bel., ist Spec (A) diskret.

□

A5 (a) Sei X top. Raum mit $(f_i : X \to T_i)_{i\in I}$ stetig.

Nach univ. Eigenschaft des Produkts in Set ex. genau ein $f: X \to \prod_{i\in I} T_i = P$, so dass $f_i = p_i \circ f$ $\forall i \in I$. Es z.z., dass f stetig ist. Sei also $U \subseteq P$ offen.

Da f^{-1} mit Vereinigungen vertauscht und bel. Vereinigungen offener Mengen offen, sei oE $U = \prod_{i\in I} U_i$ mit $U_i \subseteq T_i$ offen $\forall i \in I$ und $U_i = T_i$ f.f.a. $i \in I$. Nun ist

$$f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in \prod_{i\in I} U_i\} = \{x \in X : p_i(f(x)) \in U_i \ \forall i \in I\}$$
$$= \{x \in X : f_i(x) \in U_i \ \forall i \in I\}$$
$$= \{x \in X : f^{-1}(U_i) \ \forall i \in I\}$$
$$= \bigcap_{i\in I} f^{-1}(U_i)$$

Da nun ff.a. $i \in I$: $U_i = T_i$ also $f^{-1}(U_i) = X$ ist $f^{-1}(U) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i)$ für geeignete U_i. Da f_i stetig sind $f^{-1}(U_i)$ offen und damit folgt die Beh.

$\square$

(b) Sei X top. Raum und $(g_i : X \to T_i)_{i\in I}$ stetig mit $g_i = \varphi_{i,j} \circ g_j$ $\forall i \le j$ in I. Nach univ. Eig. des proj. Limes in Set ex. genau eine Abb $g: X \to \varprojlim_{i\in I} T_i = T$ mit $g_i = q_i \circ g$ $\forall i \in I$. Es z.z., dass g stetig ist. Sei also $U \subseteq \varprojlim_{i\in I} T_i$ offen. Dann ex. ein $V \subseteq \prod_{i\in I} T_i$ offen bezügl. Produkttop. sd $U = T \cap V$. Also gilt $g^{-1}(U) = g^{-1}(T) \cap g^{-1}(V) = X \cap g^{-1}(V) = g^{-1}(V)$. Mit den (exakt) selben Argumenten wie in (a) folgt die Beh.

$\square$