

1 Motivation

Aus der kommutativen Algebra ist für einen kommutativen Ring A und einen A -Modul N die Adjunktion

$$- \otimes_A N \dashv \text{Hom}_A(N, -)$$

bekannt. In der klassischen homologischen Algebra definiert man die Funktoren $\text{Ext}_A^i(N, -)$ und $\text{Tor}_i^A(-, N)$ als Ableitungen der Funktoren $\text{Hom}_A(N, -)$ und $- \otimes_A N$. Nun stellt sich die Frage, ob zwischen diesen ein analoges Adjunktionsresultat gilt.

Satz 1.1. *Ext ist nicht rechtsadjungiert.*

Proof. Angenommen $\text{Ext}_A^i(N, -)$ ist rechtsadjungiert, dann ist $\text{Ext}_A^i(N, -)$ linksexakt sei. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

in $\mathbb{Z}$ -Mod liefert die exakte Folge

$$\underbrace{\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}_{\neq 0} \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) .$$

Aber $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$ und $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, also ist $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ nicht injektiv. $\square$

2 Neuer Ableitungsbegriff

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien, $\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive und $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sei additiv und linksexakt.

Bemerkung 2.1 (Erinnerung). Sei $X \in \mathcal{A}$.

- (1) Es existiert eine injektive Auflösung von X , also ein Komplex $I^\bullet$ in $\mathcal{A}$ mit injektiven Objekten, sodass

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow \cdots \end{array} \quad (1)$$

ein Quasiisomorphismus ist, das heißt ein Komplexhomomorphismus, der Isomorphismen auf den Kohomologiegruppen induziert.

- (2) Die Ableitungen von F bei X sind nun die Kohomologiegruppen des Komplexes $F(I^\bullet)$.
 (3) Wohldefiniert.

Bemerkung 2.2 (Idee). Identifiziere X bzw. $X[0]$ mit seinen Auflösungen.

Definition 2.3. Sei $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ die Kategorie mit:

- Objekten: Komplexe von $\mathcal{A}$.
- Morphismen: Komplexhomomorphismen modulo Homotopie.

Definition 2.4 (Derivierte Kategorie). Sei $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ die derivierte Kategorie von $\mathcal{A}$ mit

- Objekte: Komplexe von $\mathcal{A}$

und einem kanonischen Funktor $Q_{\mathcal{A}}: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$, sodass Quasiisomorphismen Isomorphismen induzieren in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Bemerkung 2.5 (Mengentheorie). Es gibt mengentheoretische Probleme.

F induziert natürlicherweise einen Funktor $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$.

Definition 2.6 (Totalableitung). Sei $F: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ ein additiver Funktor plus $(*)$. Die (Rechts-)Ableitung von F ist nun (falls existent) ein Funktor $RF: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ mit einer natürlichen Transformation $\varphi: Q_{\mathcal{B}} \circ F \rightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}}$, die eine gewissen universelle Eigenschaft erfüllen.

Bemerkung 2.7 (Universelle Eigenschaft). Für jeden Funktor $G: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ und jede natürliche Transformation $\psi: Q_{\mathcal{B}} \circ F \rightarrow G \circ Q_{\mathcal{A}}$ eine eindeutige natürliche Transformation $\eta: RF \rightarrow G$ existiert, sodass

$$\begin{array}{ccc} Q_{\mathcal{B}} \circ F & \xrightarrow{\phi} & RF \circ Q_{\mathcal{A}} \\ & \searrow \psi & \downarrow \eta \\ & & G \circ Q_{\mathcal{A}} \end{array} .$$

Bemerkung 2.8. (1) In der klassischen Situation existiert RF auf der Unterkategorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})^+$.

(2) Kohomologiegruppen $H^i RF(X[0])$ stimmen mit den klassischen Rechtsableitungen $R^i F(X)$ überein.

(3) φ induziert Isomorphismen auf der Klasse der nach unten beschränkten Komplexe mit injektiven Objekten.

Satz 2.9. Sei $\mathcal{J}$ eine Klasse von Komplexen in $\mathcal{A}$.

(1) Für $I^\bullet \in \mathcal{J}$ gilt: $I^\bullet$ exakt $\implies F(I^\bullet)$ exakt.

(2) Für alle $X^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ existiert ein Quasiisomorphismus $X^\bullet \rightarrow I^\bullet$ mit $I^\bullet \in \mathcal{J}$.

Dann existiert $RF: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ und $\varphi(I^\bullet)$ ist ein Isomorphismus für alle $I^\bullet \in \mathcal{J}$.

3 Ableitungen von Hom und Tensorprodukt

Erweitern von Hom und Tensorprodukt auf $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$.

Definition 3.1. Für $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ definieren wir $\text{Hom}^\bullet(M^\bullet, N^\bullet) \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, sodass

- $\text{Hom}^\bullet$ auf eingradigen Komplexen mit $\text{Hom}_{\mathcal{A}}$ übereinstimmt,
- und

$$H^0(\text{Hom}^\bullet(M^\bullet, N^\bullet)) = \text{Mor}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(M^\bullet, N^\bullet).$$

Definition 3.2. Für $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{K}(A\text{-Mod})$ definiert man nun $M^\bullet \otimes_A N^\bullet$ so, dass man, analog zur klassischen Adjunktion, für $P^\bullet \in \mathcal{K}(A\text{-Mod})$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A N^\bullet, P^\bullet) = \text{Hom}^\bullet(M^\bullet, \text{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet))$$

erhält.

Das Ziel ist nun die Funktoren $\text{Hom}^\bullet(N^\bullet, -)$, $\text{Hom}^\bullet(-, N^\bullet)$ und $- \otimes_A N^\bullet$ abzuleiten. Dafür suchen wir jeweils eine Klasse $\mathcal{I}$ von Komplexen, die die Bedingungen (1) und (2) für den entsprechenden Funktor erfüllt.

Für $\text{Hom}^\bullet(N^\bullet, -)$ definieren wir dafür

Definition 3.3. Ein Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ heißt *K-injektiv*, wenn der Funktor $\text{Hom}^\bullet(-, I^\bullet)$ Exaktheit von Komplexen erhält. Eine *K-injektive Auflösung* eines Komplexes $M^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ ist ein Quasiisomorphismus $M^\bullet \rightarrow I^\bullet$ mit einem K-injektiven Komplex $I^\bullet$.

Bemerkung 3.4. $I^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ ist genau dann K-injektiv, wenn jeder Komplexhomomorphismus von einem exakten Komplex nach $I^\bullet$ nullhomotop ist.

Beispiel 3.5. Jeder nach unten beschränkte Komplex mit injektiven Objekten ist K-injektiv (Algebra II).

Sei nun $\mathcal{I}$ die Klasse der K-injektiven Komplexe. Die Bedingung (1) ist für diese Wahl erfüllt, denn:

Lemma 3.6. *Ein exakter K-injektiver Komplex ist in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ der Nullkomplex.*

Proof. Sei $I^\bullet \in \mathcal{K}$ exakt und K-injektiv. Dann ist

$$\text{id}_{I^\bullet} \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(I^\bullet, I^\bullet) = H^0 \text{Hom}^\bullet(I^\bullet, I^\bullet) = 0.$$

□

Der schwierige Teil ist Bedingung (2) nachzuweisen.

Beispiel 3.7. Falls $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive hat, hat jeder nach unten beschränkte Komplex eine Auflösung durch einen nach unten beschränkten Komplex mit injektiven Objekten. Das konstruiert man induktiv, indem man schrittweise in injektive Objekte einbettet.

Das funktioniert nur nicht für unbeschränkte Komplexe.

Idee: Wir bedienen uns der Auflösung beschränkter Komplexe, konstruieren damit ein inverses System und der Limes liefert dann eine K-injektive Auflösung.

Sei $\mathcal{J}$ eine Klasse von Komplexen.

Definition 3.8. Ein $\mathcal{J}$ -spezielles inverses System ist ein abzählbares inverses System $(I_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass

$$(1) \quad I_1^\bullet = 0$$

$$(2) \quad \text{Für } n > 1 \text{ ist die kurze Folge}$$

$$0 \longrightarrow \ker p_n \longrightarrow I_n^\bullet \xrightarrow{p_n} I_{n-1}^\bullet \longrightarrow 0$$

exakt, zerfällt stufenweise und $\ker p_n$ liegt in $\mathcal{J}$.

Wir zeigen nun zunächst, dass die Klasse $\mathcal{I}$ der K-Injektiven abgeschlossen unter speziellen inversen Systemen ist, das heißt, dass der inverse Limes $\mathcal{I}$ -spezieller inverser Systeme wieder in $\mathcal{I}$ liegt.

Dazu beobachtet man

Lemma 3.9. *Die Klasse der exakten Komplexe ist abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.*

Proof. Diagrammjagd. □

Lemma 3.10. *Sei $\mathcal{B}$ eine weitere abelsche Kategorie, $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}(\mathcal{B})$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites. Angenommen inverse Limites existieren in $\mathcal{A}$ und sei $F: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ ein kovarianter Funktor der mit inversen Limites vertauscht und gradweise zerfallende kurze exakte Folgen erhält.*

Dann ist $F^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Proof. Das liegt daran, dass $F F^{-1}(\mathcal{J})$ -spezielle inverse Systeme in $\mathcal{J}$ -spezielle inverse Systeme überführt. $\square$

Korollar 3.11. *Die Klasse $\mathcal{I}$ der K-injektiven Komplexe ist abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.*

Proof. Sei $\mathcal{E}$ die Klasse der exakten Komplexe in $\mathcal{A}$, dann ist für jeden exakten Komplex $T^\bullet$ in $\mathcal{A}$ die Klasse $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)^{-1}(\mathcal{E})$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites. Mit

$$\mathcal{I} = \bigcap_{T^\bullet \in \mathcal{E}} \text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)^{-1}(\mathcal{E})$$

folgt jetzt die Behauptung. $\square$

Sei nun $M^\bullet \in \mathcal{K}$ ein beliebiger Komplex. Wir wollen ein $\mathcal{I}$ -spezielles inverses System konstruieren, dessen Limes eine Auflösung von $M^\bullet$ liefert.

Definition 3.12 (Abschneiden). Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Komplex $\tau^{\geq -n} M^\bullet$

$$0 \longrightarrow \text{coker } d_M^{-n-1} \longrightarrow M^{-n+1} \longrightarrow M^{-n+2} \longrightarrow \dots$$

Bemerkung 3.13. Dann ist für $i \geq -n$

$$H^i(\tau^{\geq -n} M^\bullet) = H^i(M^\bullet).$$

Satz 3.14. *Es existiert ein $\mathcal{I}$ -spezielles inverses System $(I_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ mit einem inversen System von Quasiisomorphismen $f_n: \tau^{\geq -n} M^\bullet \rightarrow I_n^\bullet$.*

Proof. Wir gehen induktiv vor: Setze $I_1 = 0$ und $f_1 = 0$. Sei $M_n^\bullet = \tau^{\geq -n} M^\bullet$. Dann ist $M_2^\bullet$ nach unten beschränkt, also existiert ein K-injektiver Komplex $I_2^\bullet$ und ein Quasiisomorphismus $f_2: M_2^\bullet \rightarrow I_2^\bullet$.

Sei nun $n \geq 3$, $I_{n-1}^\bullet$ und f_{n-1} bereits konstruiert. Aus $I_{n-1}^\bullet$ und $M_n^\bullet$ konstruiert man einen neuen nach unten beschränkten Komplex, der wieder durch einen K-injektiven aufgelöst werden kann. Durch geeignete Modifikation erhält man dann $I_n^\bullet$ und f_n . $\square$

Wir nehmen nun an, dass in $\mathcal{A}$ inverse Limites existieren.

Bemerkung 3.15. (a) Sei $I^\bullet$ der Limes des Systems $(I_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ und $f: M^\bullet \rightarrow I^\bullet$ der Limes des Systems $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Dann sind zwar die f_n Quasiisomorphismen, aber f a priori kein Quasiisomorphismus, da der inverse Limes im Allgemeinen, insbesondere für $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$, nicht exakt ist.

(c) Abhilfe: Mittag Leffler + Diagrammjagd. Also f für $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$ ein Quasiisomorphismus.

Korollar 3.16. *Existenz von $R\text{Hom}^\bullet(N^\bullet, -)$.*

Bemerkung 3.17 (Umdrehen der Pfeile). Dual dazu definieren wir K-projektive Komplexe und Auflösungen und zeigen, dass jeder Komplex in $A\text{-Mod}$ ebenfalls eine K-projektive Auflösung hat.

Korollar 3.18. *Existenz von $R\text{Hom}^\bullet(-, N^\bullet)$.*

Definition 3.19 (K-flach). Analog zu K-injektiv für $- \otimes_A N^\bullet$.

Satz 3.20. *K-projektiv $\implies$ K-flach*

Korollar 3.21. *Es existieren K-flache Auflösungen.*

Korollar 3.22. *Abgeleitetes Tensorprodukt existiert.*

Die K-flachen Komplexe hängen noch auf wichtige Weise mit den K-injektiven zusammen:

Satz 3.23. *Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann ist $M^\bullet$ genau dann K -flach, wenn $\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, I^\bullet)$ K -injektiv ist für jeden K -Injektiven $I^\bullet \in \mathcal{K}$.*

Korollar 3.24. *Seien $M^\bullet, N^\bullet, P^\bullet \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A^L N^\bullet, P^\bullet) = R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, R\mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)).$$

Proof. Da in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ Quasiisomorphismen Isomorphismen induzieren und wir die Existenz der verschiedenen Auflösungen kennen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $P^\bullet$ K -injektiv und $N^\bullet$ K -flach ist. Dann ist

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A^L N^\bullet, P^\bullet) &= \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A^L N^\bullet, P^\bullet) \\ &= \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A N^\bullet, P^\bullet) \\ &= \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, \mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)) \\ &= \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, \mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)) \\ &= R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, \mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)) \\ &= R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, R\mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)). \end{aligned}$$

□

Die eigentliche Adjunktion bekommen wir durch Anwenden von H^0