

Endlich étale Morphismen, Vortrag 9

Sei A ein (kommutativer) Ring.

Erinnerung 1. Endlich (treu-)projektiv ist stabil unter Basiswechsel und Komposition. Insbesondere kommutiert für $A \rightarrow B$ endlich projektiv und $A \rightarrow C$ Ringhomomorphismus das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} C & \xrightarrow{\quad} & \operatorname{Spec} A \\ & \searrow \scriptstyle [B \otimes_A C : C] \quad \swarrow \scriptstyle [B : A] & \\ & \mathbb{Z} & \end{array}.$$

Übung 2. Sei B endliche, projektive A -Algebra. Dann ist

- (a) $B = 0 \iff [B : A] = 0$.
- (b) $A \rightarrow B$ Isomorphismus $\iff [B : A] = 1$.
- (c) $\operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ surjektiv $\iff B$ treuprojektive A -Algebra.

Definition 3 (Zariskiüberdeckung). Wir nennen Elemente $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq A$ eine Zariskiüberdeckung von A , wenn $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$.

Satz 4 (Äquivalente Charakterisierungen von endlich étale). Sei $A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Dann sind äquivalent

- (i) $A \rightarrow B$ endlich étale, das heißt endlich, flach und unverzweigt.
- (ii) $A \rightarrow B$ endlich, projektiv und separabel.
- (iii) Es existiert eine Zariskiüberdeckung $\{f_i\}_{i \in I}$ von A , sodass $A_{f_i} \rightarrow B_{f_i}$ endlich étale ist für alle $i \in I$.
- (iv) Es existiert eine Zariskiüberdeckung $\{f_i\}_{i \in I}$ von A , sodass $A_{f_i} \rightarrow B_{f_i}$ endlich frei und separabel ist für alle $i \in I$.

Satz 5. Endlich étale ist stabil unter Basiswechsel und Komposition.

Übung 6. Sei A ein Ring und $(B_i)_{i \in I}$ A -Algebren mit I endlich. Sei weiter $B = \prod_{i \in I} B_i$. Dann ist B genau dann endlich étale, wenn jedes B_i endlich étale ist. In diesem Fall gilt $[B : A] = \sum_{i \in I} [B_i : A]$.

Übung 7. Seien $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$ Ringe mit I endlich und sei B_i endlich étale A_i -Algebra für alle $i \in I$. Dann ist $\prod_{i \in I} B_i$ endlich étale $\prod_{i \in I} A_i$ -Algebra. Außerdem ist jede endlich étale $\prod_{i \in I} A_i$ Algebra von dieser Form. Weiter ist

$$\left[\prod_{i \in I} B_i : \prod_{i \in I} A_i \right] \Big|_{\operatorname{Spec} A_j} = [B_j : A_j].$$

Definition 8 (Total zerlegbare Algebren). Eine A -Algebra B ist total zerlegbar, wenn A ein endliches Produkt von Ringen A_n ist mit $n \geq 0$ und B isomorph ist zu $\prod_{n \geq 0} A_n^n$, sodass

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\sim} & \prod_{n \geq 0} A_n^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\sim} & \prod_{n \geq 0} A_n \end{array}$$

kommutiert.

Theorem 9. Sei B eine A -Algebra. Dann ist $A \rightarrow B$ genau dann endlich étale, wenn eine treuprojektive A -Algebra C existiert, sodass $C \rightarrow B \otimes_A C$ total zerlegbar ist.

Definition 10. Sei E eine endliche Menge. Dann sei $A^E = \prod_{e \in E} A$. Für eine Abbildung endlicher Mengen $\phi: D \rightarrow E$ bezeichne mit $\hat{\phi}: A^E \rightarrow A^D$ den von $A^E \rightarrow A$, $(a_e)_{e \in E} \mapsto a_{\phi(d)}$ für $d \in D$ induzierten A -Algebrahomomorphismus. Ein solches $\hat{\phi}$ ist endlich étale.

Lemma 11. Seien A, B, C Ringe und $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow C$ total zerlegbar und $h: C \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus mit $f = hg$. Sei weiter $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Dann existiert ein $a \in A$, sodass $a \notin \mathfrak{p}$ und f, g und h trivial über $D(a)$ sind. Das heißt es existieren endliche Mengen D und E und Isomorphismen $\alpha: A_a^D \rightarrow B_a$ und $\beta: A_a^E \rightarrow C_a$ und eine Abbildung $\phi: D \rightarrow E$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 B_a & \xleftarrow{h} & & & C_a \\
 & \nwarrow \alpha & & \nearrow \beta & \\
 & A_a^D & \xleftarrow{\hat{\phi}} & A_a^E & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 A_a & \xleftarrow{\text{id}_{A_a}} & A_a & & A_a
 \end{array}$$

kommutiert.

Satz 12. Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: A \rightarrow C$ endlich étale Ringhomomorphismen und $h: C \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus mit $f = hg$. Dann ist h endlich étale.