Aufgabe 1 (Differentialgleichungen)**.** Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

a) $y'(x) = y^2(x)\cosh(x)$

Durch Umformung erhalten wir folgende Form einer homogenen DGL 1. Ordnung:

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \cosh(x).$$

Durch Integration erhalten wir folgenden Ausdruck

$$\int \frac{dy}{dx \cdot y^2} dx = \int \sinh(x) dx \implies -\frac{1}{y} = \sinh(x) + C.$$

und damit:

$$y = -\frac{1}{\sinh(x) + C}.$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 4$ erhalten wir:

$$y = -\frac{1}{\sinh(x) - \frac{1}{4}}.$$

b) $y'(x) = \sin(x)\cos(x) - y(x)\sin(x)$

Hier liegt eine inhomogene DGL erster Ordnung vor, das heißt wir setzen nach Umformung den inhomogenen Teil Null.

$$y'(x) + y(x)\sin(x) = 0.$$

Durch Trennung der Variablen erhalten wir folgende Lösung der homogenen Gleichung:

$$y = ae^{\cos(x)}.$$

Durch Variation der Konstanten a durch eine Funktion $A(x)$ und einsetzen in die DLG erhalten wir

$$\begin{aligned} A'(x)e^{\cos(x)} - A(x)\sin(x)e^{\cos(x)} &= \sin(x)\cos(x) - A(x)\sin(x)e^{\cos(x)} \\ A'(x) &= \sin(x)\cos(x)e^{-\cos(x)}. \end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir folgenden Term für $A(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= \cos(x)e^{-\cos(x)} - \int -\sin(x)e^{-\cos(x)}dx \\ &= \cos(x)e^{-\cos(x)} + e^{-\cos(x)} + C \\ &= e^{-\cos(x)}(\cos(x) + 1) + C. \end{aligned}$$

und damit die allgemeine Lösung der DGL

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(e^{-\cos(x)}(\cos(x) + 1) + C\right)e^{\cos(x)} \\ &= \cos(x) + 1 + Ce^{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ergibt sich $C = \frac{-2}{e}$, und damit:

$$y(x) = \cos(x) + 1 - 2e^{\cos(x)-1}.$$

Aufgabe 2 (Start einer Rakete)**.**

a) Mit welcher Geschwindigkeit wird der Treibstoff aus der Sicht eines auf der Erde ruhenden Beobachters ausgestoßen?

Die Rakete bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_R nach oben, von dort wird der Tropfen mit der Geschwindigkeit v_T ausgestoßen.

$$v_T = v_R - v_0.$$

Welche Kraft erfährt die Rakete somit aus der Sicht des ruhenden Beobachters?

Für den Impuls eines Treibstoffteilchens der Masse Δm_T gilt:

$$p_T = \Delta m_T \cdot v_T = \Delta m_T \cdot (v_R - v_0)\,.$$

Für die Impulsänderung Δp_R in der Zeiteinheit Δt gilt:

$$\frac{\Delta p_R}{\Delta t} = \frac{\Delta m_T \cdot (v_R - v_0)}{\Delta t}.$$

Nun führen wir den Grenzübergang für $\Delta t \to 0$ durch:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta p_R}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta m_T \cdot (v_R - v_0)}{\Delta t}\right)$$
$$.$$

Daraus erhalten wir:

$$\dot{p} = \dot{m}(v_R - v_0).$$

Die Kraft, die auf die Rakete wirkt, setzt sich zusammen aus der Kraft F_A, die die Rakete antreibt und der Gewichtskraft $F_G = -mg$.

Aus dem zweiten Newton'schen Axiom:

$$\dot{p} = F$$

folgt:

$$F = \dot{m}\,(v_R - v_0) - mg.$$

b) Aus der Kraft F folgt mit $v_R = v$

$$\dot{m}v + m\dot{v} = \dot{m}\,(v - v_0) - mg$$

durch Umformung

$$\begin{aligned}\frac{\dot{m}v}{m} + \dot{v} &= \frac{\dot{m}}{m}\,(v - v_0) - g\\ &= \frac{\dot{m}}{m}v - \frac{\dot{m}}{m}v_0 - g.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\dot{m}}{m}v_0 = -g - \dot{v}.$$

c) Durch Integration des obenstehenden Ausdrucks ergibt sich:

$$\begin{aligned}&\ln(m)v_0 = -gt - v + m_0\\ \Longrightarrow\;& v(t) = -gt - \ln(m)v_0 + C.\end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ und der Anfangsmasse m_0 folgt:

$$v(0) = 0 = -v_0 \cdot \ln(m_0) + C \implies C = v_0 \ln(m_0).$$

Damit:

$$v(t) = -gt + v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m}\right).$$

d) Sei die Treibstoffausstoßrate μ gegeben als $\mu = \frac{m}{t}$, so folgt:

$$m(t) = m_0 - \mu t.$$

Für eine Treibstoffmasse $m_T < m_0$ ergibt sich ein Zeitpunkt t_e zu dem der gesamte Treibstoff aufgebraucht ist:

$$m(t_e) = m_0 - m_T \implies t_e = \frac{m_T}{\mu}.$$

Mit der Rate μ ergibt sich für $v(t)$:

$$v(t) = -gt + v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right).$$

Zum Zeitpunkt t_e

$$v(t_e) = -gt_e + v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_T}\right).$$

Für die Höhe muss die Geschwindigkeit $v(t)$ einmal integriert werden, mit $h_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int v(t)dt = \int \left(-gt + v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right)\right) dt + h_0 \\
&= -\frac{1}{2}gt^2 - v_0 \int \ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0}t\right) \\
&= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \frac{m_0}{\mu}\left[\left(1 - \frac{\mu}{m_0}t\right)\ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0}t\right) - \left(1 - \frac{\mu}{m_0}t\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \frac{m_0}{\mu}\left(1 - \frac{\mu}{m_0}t\right)\left[\ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0}t\right) - 1\right] \\
&= -\frac{1}{2}gt^2 + \left(v_0 \frac{m_0}{\mu} - v_0 t\right)\left[\ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0}t\right)\right].
\end{aligned}$$

Für $s(t_e)$ und $t_e = \frac{m_T}{\mu}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
s(t_e) &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{m_T}{\mu}\right)^2 + v_0\left(\frac{m_0}{\mu} - \frac{m_T}{\mu}\right)\left[\ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0}\frac{m_T}{\mu}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}g\left(\frac{m_T}{\mu}\right)^2 + v_0\left(\frac{m_0 - m_T}{\mu}\right)\left[\ln\left(1 - \frac{m_T}{m_0}\right)\right]
\end{aligned}$$

.

e) Die Geschwindigkeit, wenn der ganze Treibstoff aufgebraucht ist, ergibt sich durch

$$v(t_e) = -gt_e + v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_T}\right).$$

Wenn $m_0 = m_T$ geht der obenstehnde Ausdruck gegen ∞.

Eine Rakete die nur aus Treibstoff besteht, ist logischerweise nicht physikalisch sinnvoll. Das Ergebnis, dass ein Objekt mit der Masse Null unendliche Geschwindigkeiten erreicht, ist dahingegen denkbar.

f) Zum Zeitpunkt t_e hat die Rakete die Geschwindigkeit

$$v(t_e) = v_E.$$

Danach ist die Geschwindigkeit der Rakete durch

$$v(t) = v_E - gt$$

beschrieben. Für die Steighöhe ergibt sich daraus

$$s(t) = v_E t - \frac{1}{2}gt^2 + h_0.$$

Aus $v(t) = 0$ folgt $\hat{t} = \frac{v_E}{g}$ und damit

$$\begin{aligned} h(\hat{t}) &= \frac{v_E^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_E^2}{g^2} + h_0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{v_E^2}{g} + h_0. \end{aligned}$$

g) Wasserrakete mit $v_0 = 25\,\mathrm{ms}^{-1}$ und $m_T = \frac{4}{5} m_0$ und $\mu = 2 m_T \mathrm{s}^{-1}$

$$\begin{aligned} v\left(\frac{1}{2}\mathrm{s}\right) &= -g\frac{1}{2}\mathrm{s} + 25\,\mathrm{ms}^{-1} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \frac{4}{5} m_0}\right) \\ &= -9.81\,\mathrm{ms}^{-2} 0.5\,\mathrm{s} + 25\,\mathrm{ms}^{-1} \ln(5) \\ &= 45.14\,\mathrm{ms}^{-1} \\ s(0.5\,\mathrm{s}) &= -\frac{1}{2} g \left(\frac{m_T}{2 m_T \mathrm{s}^{-1}}\right)^2 + 25\,\mathrm{ms}^{-1} \left(\frac{m_0 - m_T}{2 m_T \mathrm{s}^{-1}}\right) \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= -\frac{1}{2} g \left(\frac{1}{2}\mathrm{s}\right)^2 + 25\,\mathrm{ms}^{-1} \left(\frac{1}{8}\mathrm{s}\right) \ln\left(\frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$