

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. Beh.: $f_k g_k \rightarrow fg$ in $L^1(X, \mu)$.

Beweis. (i) Es ist f integrierbar, also $\int_X f_+ d\mu < \infty$ und $\int_X f_- d\mu < \infty$, also folgt $\text{ess sup } f_+ < \infty$ und $\text{ess sup } f_- < \infty$, also folgt mit $f = f_+ - f_-$, auch $\text{ess sup } f = M < \infty$ für ein $M \in \mathbb{R}$.

(ii) Es ist $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|g_k\|_{L^\infty} \leq S < \infty$ für ein $S \in \mathbb{R}$, also auch $\text{ess sup } g < \infty$ (Ang.: es gäbe ein $A \in \mathcal{E}$ mit $\mu(A) > 0$ und $g(x) = \infty$ für $x \in A$, dann folgt $g_k(x) \not\rightarrow g(x)$, da $g_k(x) \leq S < \infty$ $\nrightarrow$). Also OE $\text{ess sup } g \leq S$.

(iii) Es ist $g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g$ μ fast überall, d.h.

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k - g| d\mu = 0.$$

(iv) Betrachte $h := 2S|f|$. Dann gilt $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$|f||g_k - g| \leq |f|(|g_k| + |g|) \stackrel{(i)}{\leq} 2S|f| = h.$$

h ist außerdem integrierbar, da f integrierbar, also f_+ und f_- integrierbar, insbesondere $|f| = f_+ + f_-$ integrierbar. Damit folgt mit dominierter Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f||g_k - g| d\mu &\stackrel{3.19}{=} \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} |f||g_k - g| d\mu \\ &\stackrel{(i)}{\leq} \int_X M \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k - g| d\mu \\ &\stackrel{(iii)}{=} 0. \end{aligned}$$

(v) Da $f_k \rightarrow f$ in L^1 folgt $\int_X |f_k - f| d\mu = \|f_k - f\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|f_k g_k - fg\|_{L^1} &= \int_X |f_k g_k - fg| d\mu \\ &= \int_X |f_k g_k - g_k f + g_k f - fg| d\mu \\ &\leq \int_X |g_k| |f_k - f| d\mu + \int_X |f| |g_k - g| d\mu \\ &\stackrel{(ii)}{\leq} M \underbrace{\int_X |f_k - f| d\mu}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\int_X |f| |g_k - g| d\mu}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Also $f_k g_k \rightarrow fg$ in L^1 .

□

Aufgabe 2. a) Beh.: $L^1(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu) \subseteq L^p(X, \mu)$ für $1 < p < \infty$ und

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{p-1}{p}} \quad \text{für alle } f \in L^1(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu).$$

Beweis. Sei $1 < p < \infty$ und $f \in L^1(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p d\mu &= \int_X |f|^1 |f|^{p-1} d\mu \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_1 \|f^{p-1}\|_\infty \\ &= \|f\|_1 \operatorname{ess\,sup}_X |f|^{p-1} \\ &\stackrel{p-1 > 0}{=} \|f\|_1 (\operatorname{ess\,sup}_X |f|)^{p-1} \\ &= \|f\|_1 \|f\|_\infty^{p-1} \\ &\stackrel{p < \infty}{<} \infty \end{aligned}$$

Da beide Seiten nicht-negativ, folgt durch Potenzieren mit $\frac{1}{p}$:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} < \infty.$$

Das zeigt beide Behauptungen. $\square$

b) Sei $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Beh.: $L^q(X, \mu) \subseteq L^p(X, \mu)$ und $\exists C \in \mathbb{R}$, s.d. $\forall f \in L^q(X, \mu)$

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q.$$

Beweis. Sei $f \in L^q(X, \mu)$. Dann wähle $r := \frac{q}{p} \geq 1$ und $r' = \frac{q}{q-p}$. Damit folgt

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = 1.$$

Dann betrachte

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p d\mu &= \int_X |f|^p \cdot 1 d\mu \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|1\|_{r'} \|f^p\|_r \\ &= \|1\|_{r'} \left(\int_X (|f|^p)^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\stackrel{r=q/p}{=} \|1\|_{r'} \left(\int_X |f|^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Da beide Seiten nichtnegativ, folgt durch Potenzieren mit $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_p \leq \|1\|_{r'}^{\frac{1}{p}} \|f\|_q$$

Für die Konstante folgt

$$\begin{aligned} \|1\|_{r'}^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_X 1^{r'} d\mu \right)^{\frac{1}{pr'}} \\ &\stackrel{r'=q/(q-p)}{=} \left(\int_X 1 d\mu \right)^{\frac{q-p}{pq}} \\ &= \mu(X)^{\frac{q-p}{pq}} =: C < \infty \end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q < \infty.$$

Also insbesondere $f \in L^p(X, \mu)$. $\square$

Beh.: Es ist $L^4((0, 1), \lambda) \subsetneq L^1((0, 1), \lambda)$.

Beweis. Betrachte $f = x^{-\frac{1}{2}}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f|^4 d\lambda &= \int_0^1 x^{-2} d\lambda = -x^{-1} \Big|_0^1 = -1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = \infty \\ \int_0^1 |f| d\lambda &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} d\mu = 2(\sqrt{1} - \sqrt{0}) = 2 < \infty.\end{aligned}$$

Also ist $f \in L^1((0, 1), \lambda)$, aber $f \notin L^4((0, 1), \lambda)$. □

Aufgabe 3. a) Beh.: $f_k \rightarrow f$ in $L^1(X, \mu) \iff$

$$\int_X |f_k| d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_X |f| d\mu.$$

Beweis. • „ $\implies$ “. Sei $\|f_k - f\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}0 &\leq \left| \int_X |f_k| d\mu - \int_X |f| d\mu \right| \\ &= \left| \int_X (|f_k| - |f|) d\mu \right| \\ &\stackrel{\triangle}{\leq} \int_X ||f_k| - |f|| d\mu \\ &\stackrel{\nabla}{=} \int_X |f_k - f| d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

- „ $\impliedby$ “. Sei $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k| d\mu = \int_X |f| d\mu$ (*). Es ist zunächst $|f_k - f| = |f_k + (-f)| \leq |f_k| + |f|$. Dann betrachte $g_k := |f_k| + |f| - |f_k - f| \geq 0$. Da $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ μ -f.ü., folgt $g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2|f|$ μ -f.ü. Damit folgt mit Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}\int_X 2|f| d\mu &= \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu \\ &\stackrel{3.18}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_X 2|f_k| d\mu + \int_X 2|f| d\mu - \int_X |f_k - f| d\mu \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_X |f| d\mu + \int_X |f| d\mu - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu\end{aligned}$$

Umstellen liefert

$$0 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu \leq 0$$

Wegen $0 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu \leq 0$ folgt

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu.$$

Also $f_k \rightarrow f$ in $L^1(X, \mu)$. □

b) Beh.: $f_k \rightarrow f$ in $L^1(X, \mu)$.

Beweis. Definiere $g_k := g := 1$. Dann ist $g = g_k$ integrierbar, da

$$\int_X g d\mu = \int_X 1 d\mu = \mu(X) < \infty.$$

Außerdem sind f_k, f integrierbar, insbesondere messbar. Außerdem gilt $f_k g_k = f_k \cdot 1 = f_k$ und $f g = f \cdot 1 = g$. Dann folgt die Aussage aus Aufgabe 1. □

Aufgabe 4. Beh.: $f := \prod_{j=1}^n f_j \in L^p(X, \mu)$ und

$$\|f\|_{L^p(X, \mu)} \leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p_j}(X, \mu)}.$$

Beweis. per Induktion über n . $n = 1$: Dann gilt $p_1 = p$ und $f = f_1$, also trivial. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit Aussage gezeigt für n . Sei $1 \leq p \leq \infty$ und seien $1 \leq p_j < \infty$ für $j \in \{1, \dots, n+1\}$ und

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{p}.$$

Dann ist $p \leq p_j$ für $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Definiere $q := \frac{pp_{n+1}}{p_{n+1}-p} \geq 1$. Dann ist

$$\frac{1}{q} = \frac{p_{n+1}-p}{pp_{n+1}} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_{n+1}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j}.$$

Außerdem definiere $r := \frac{p_{n+1}}{p} \geq 1$. Dann ist $r' = \frac{p_{n+1}}{p_{n+1}-p}$, denn $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{p_{n+1}-p}{p_{n+1}} + \frac{p}{p_{n+1}} = 1$. Seien nun $f_j \in L^{p_j}(X, \mu)$ für $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Damit betrachte

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p d\mu &= \int_X \left| \prod_{j=1}^{n+1} f_j \cdot f_{n+1} \right| d\mu \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left\| \left(\prod_{j=1}^n f_j \right)^p \right\|_{r'} \|f_{n+1}^p\|_r \\ &= \left(\int_X \left| \prod_{j=1}^n f_j \right|^{\frac{pp_{n+1}}{p_{n+1}-p}} d\mu \right)^{\frac{p_{n+1}-p}{p_{n+1}}} \left(\int_X |f_{n+1}|^{p_{n+1}} d\mu \right)^{\frac{p}{p_{n+1}}} \end{aligned}$$

Da beide Seiten nicht-negativ sind, folgt durch Potenzieren mit $\frac{1}{p}$

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq \left\| \prod_{j=1}^n f_j \right\|_q \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{p_j} \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} \|f_j\|_{p_j}. \end{aligned}$$

□