

Introduction à la théorie des schémas

Antoine Ducros

Juillet 2021

Table des matières

Introduction	5
0 Pré-requis et rappels	23
0.1 Anneaux	23
0.2 Modules	25
0.3 Le lemme de Zorn	27
0.4 Dimension des espaces vectoriels <i>via</i> les relations de dépendance abstraites	28
I Les outils de la géométrie algébrique	33
1 Le langage des catégories	35
1.1 Définitions et premiers exemples	35
1.2 Foncteurs	38
1.3 Morphismes de foncteurs et équivalences de catégories	40
1.4 Foncteurs représentables et lemme de Yoneda	47
1.5 Produits fibrés et sommes amalgamées	52
1.6 Limites et colimites	59
1.7 Adjonction	64
2 Algèbre commutative	69
2.1 Localisation	69
2.2 Idéaux premiers et maximaux	75
2.3 Endomorphismes d'un module et lemme de Nakayama	81
2.4 Le produit tensoriel : cas de deux modules	84
2.5 Produit tensoriel d'un module et d'une algèbre	95
2.6 Produit tensoriel de deux algèbres	100
2.7 Compléments : modules projectifs	105
2.8 Algèbres finies et algèbres entières	116
2.9 Rappels et compléments sur les extensions de corps	124
2.10 Algèbres de type fini sur un corps : normalisation de Noether, <i>Nullstellensatz</i>	132
3 Théorie des faisceaux	139
3.1 Préfaisceaux et faisceaux	139
3.2 Espaces annelés	155
3.3 Espaces localement annelés	169

3.4	Faisceaux localement libres de rang 1	177
-----	---	-----

II La théorie des schémas 183

4 Le spectre comme espace topologique 185

4.1	Spectre d'un anneau	185
4.2	Description de $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$ et $\text{Spec } k[S, T]$ lorsque k est algébriquement clos	197
4.3	Compléments sur la topologie de $\text{Spec } A$	205

5 La notion de schéma 215

5.1	La catégorie des schémas	215
5.2	Recollement de schémas, construction des produits fibrés	228
5.3	Faisceaux quasi-cohérents	238
5.4	Morphismes affines	247
5.5	Morphismes de type fini	258
5.6	Le foncteur des points d'un schéma, ou la revanche du point de vue ensembliste	264

6 Schémas projectifs 271

6.1	Le schéma $\text{Proj } B$	271
6.2	Le schéma $\mathbb{P}_A^n$	283
6.3	Le foncteur des points de $\mathbb{P}_A^n$	288
6.4	Quelques exemples de morphismes en géométrie projective	300
6.5	Séparation et propreté	311

Introduction

Ce livre est une version étoffée et remaniée d'un polycopié qui couvrait deux cours de master 2 consécutifs dispensés par l'auteur à l'université Pierre-et-Marie Curie (Paris 6) lors de l'année universitaire 2013-2014. Son but est de présenter une introduction aussi auto-suffisante que possible à la théorie des *schémas*, qui constitue le socle du gigantesque travail de refondation de la géométrie algébrique accompli par Grothendieck et son école autour de 1960. Aussi allons-nous commencer par une description brève et volontairement assez vague de cette dernière discipline dans sa variante classique, c'est-à-dire pré-schématique.

La géométrie algébrique classique

Fixons un corps k . Très grossièrement, on peut dire que la géométrie algébrique sur k s'intéresse aux *ensembles de solutions des systèmes d'équations polynomiales à coefficients dans k* . Donnons quelques précisions.

Les variétés algébriques affines

Soit Λ un ensemble fini (il sera souvent de la forme $\{1, \dots, n\}$, mais pas systématiquement). On désigne par k^Λ l'ensemble des applications de Λ dans k , c'est-à-dire encore l'ensemble des famille $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de k . La construction fondamentale sur laquelle repose la géométrie algébrique associe à une partie E de $k[T_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ l'ensemble

$$V(E) := \{x \in k^\Lambda, P(x) = 0 \quad \forall P \in E\},$$

que l'on appelle la *variété algébrique affine (sur le corps k) définie par le système d'équations E* . Faisons tout de suite deux remarques.

- Si I désigne l'idéal engendré par E , alors $V(E) = V(I) = V(F)$ pour n'importe quelle autre partie génératrice F de I .
- Comme $k[T_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ est noethérien, il existe un sous-ensemble fini E_0 de E qui engendre déjà I . Par la remarque précédente, $V(E) = V(E_0)$: ainsi, toute variété algébrique affine peut être définie par un nombre fini d'équations.

Les variétés algébriques générales ; l'exemple des variétés projectives

En fait, la géométrie algébrique ne considère pas seulement des variétés algébriques affines ; elle les utilise comme briques pour construire par un procédé

de recollement des objets plus généraux qui sont simplement appelés *variétés algébriques*, sans épithète ; nous allons maintenant en décrire quelques unes.

L'espace projectif de dimension n . Soit n un entier. On appelle *espace projectif de dimension n sur k* , et l'on note $\mathbb{P}^n(k)$, le quotient de l'ensemble des $(n+1)$ -uplets $(x_0, \dots, x_n)$ d'éléments *non tous nuls* de k par la relation de colinéarité. La classe d'un tel $(n+1)$ -uplet $(x_0, \dots, x_n)$ sera notée $[x_0 : \dots : x_n]$.

Soit $P \in k[T_0, \dots, T_n]$. Si $[x_0 : \dots : x_n]$ est un point de $\mathbb{P}^n(k)$, l'évaluation de P en $[x_0 : \dots : x_n]$ est mal définie : en effet, $P(x_0, \dots, x_n)$ dépend en général de $(x_0, \dots, x_n)$, et pas seulement de sa classe $[x_0 : \dots : x_n]$. Toutefois, *si le polynôme P est homogène d'un certain degré d* , la validité de l'égalité $P(x_0, \dots, x_n) = 0$ ne dépend que de $[x_0 : \dots : x_n]$: cela vient du fait que $P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ est égal à $\lambda^d P(x_0, \dots, x_n)$ pour tout $\lambda \in k$. Il est dès lors licite de parler dans ce cas de l'ensemble des points de $\mathbb{P}^n(k)$ en lesquels P s'annule (ou ne s'annule pas).

Ainsi, choisissons i entre 0 et n , et notons Λ_i l'ensemble des entiers compris entre 0 et n et différents de i . Le polynôme T_i étant homogène (de degré 1), le sous-ensemble U_i de $\mathbb{P}^n(k)$ formé des points en lesquels T_i ne s'annule pas est bien défini ; il est immédiat que U_i est exactement l'ensemble des points de la forme $[x_0 : \dots : x_n]$ avec $x_i \neq 0$, et que

$$(x_j)_{j \in \Lambda_i} \mapsto [x_0 : x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$$

induit une bijection

$$k^{\Lambda_i} \simeq U_i$$

de réciproque $[x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$. Celle-ci permet d'identifier U_i à la variété algébrique affine k^{Λ_i} . Pour tout $j \in \Lambda_i$, la j -ième fonction coordonnée sur k^{Λ_i} sera notée τ_{ij} ; modulo l'identification entre k^{Λ_i} et U_i , on a $\tau_{ij} = \frac{T_j}{T_i}$ pour tout j .

Par construction, $\mathbb{P}^n(k)$ est la réunion des U_i ; c'est un premier exemple de variété algébrique, dont les U_i constituent un système de cartes affines.

Variétés projectives. Soit E un sous-ensemble de $k[T_0, \dots, T_n]$ constitué de polynômes *homogènes*. On désigne par $V(E)$ le sous-ensemble de $\mathbb{P}^n(k)$ constitué des points en lesquels tous les éléments de E s'annulent ; on dit que $V(E)$ est la *variété algébrique projective définie par le système d'équations homogènes E* . Soit I l'idéal engendré par E , soit I_h l'ensemble des éléments homogènes de I et soit F un autre système générateur de I constitué d'éléments homogènes. Il est immédiat que $V(E) = V(I_h) = V(F)$; comme $k[T_0, \dots, T_n]$ est noethérien, il existe un sous-ensemble fini E_0 de E qui engendre déjà I . Par la remarque précédente, $V(E) = V(E_0)$: ainsi, toute variété algébrique projective peut être définie par un nombre fini d'équations homogènes.

Fixons i . Pour tout $P \in k[T_0, \dots, T_n]$ notons $P^{[i]} \in k[\tau_{ij}]_{j \in \Lambda_i}$ le polynôme obtenu en *déshomogénéisant P par rapport à T_i* , c'est-à-dire en supprimant les termes en T_i et en remplaçant T_j par τ_{ij} pour $j \neq i$. Soit $E^{[i]}$ l'image de E par $P \mapsto P^{[i]}$. On vérifie immédiatement que $V(E) \cap U_i$ coïncide, modulo l'identification $k^{\Lambda_i} \simeq U_i$ décrite ci-dessus, avec la variété algébrique affine $V(E^{[i]}) \subset k^{\Lambda_i}$. Par construction, $V(E)$ est la réunion des $V(E) \cap U_i$; c'est

une variété algébrique, dont les $V(E) \cap U_i$ constituent un système de cartes affines.

À titre d'exemple, choisissons i entre 0 et n et décrivons $V(T_i)$. Par définition, ce dernier est le sous-ensemble de $\mathbb{P}^n(k)$ constitué des points de la forme

$$[x_0 : \dots : x_{i-1} : 0 : x_{i+1} : \dots : x_n] ;$$

en oubliant le terme nul à la place i et en décalant la numérotation des x_j pour $j > i$, on voit que $V(T_i)$ s'identifie à l'ensemble des familles $(x_0, \dots, x_{n-1})$ d'éléments non tous nuls de k modulo la relation de colinéarité, c'est-à-dire à $\mathbb{P}^{n-1}(k)$. On dit que $V(T_i)$ est l'*hyperplan à l'infini relatif à la carte affine* U_i .

Applications polynomiales entre variétés algébriques. Comme dans la plupart des théories mathématiques, on ne se contente pas en géométrie algébrique de manipuler des *objets* : on étudie également des *morphismes* entre eux. Il s'agit ici essentiellement des *applications polynomiales*, c'est-à-dire plus précisément des applications données, dans des cartes affines convenables de la source et du but, par des formules polynomiales.

Donnons un exemple de telle application. Soient $P_0, \dots, P_m$ des polynômes appartenant à $k[T_0, \dots, T_m]$ qui sont homogènes de même degré d , et sans zéro commun en dehors de l'origine dans k^{n+1} . Soient $x_0, \dots, x_n$ des éléments non tous nuls de k . Comme les P_j sont sans zéro commun en dehors de l'origine, les scalaires $P_0(x_0, \dots, x_n), \dots, P_m(x_0, \dots, x_n)$ sont non tous nuls ; comme les P_j sont tous homogènes de degré d , on a

$$P_j(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d P_j(x_0, \dots, x_n)$$

pour tout scalaire λ et tout j ; en conséquence,

$$[P_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : P_m(x_0, \dots, x_n)]$$

est bien défini et ne dépend que de $[x_0 : \dots : x_n]$. La formule

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto [P_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : P_m(x_0, \dots, x_n)]$$

décrit donc sans ambiguïté une application de $\mathbb{P}^n(k)$ vers $\mathbb{P}^m(k)$, qui est polynomiale par construction.

Les problèmes abordés en géométrie algébrique

Nous avons très brièvement présentés les objets et morphismes considérés en géométrie algébrique sans dire pour le moment un seul mot des questions que l'on s'y pose. Celles-ci sont extrêmement variées, et dépendent de manière cruciale du corps sur lequel on travaille. Nous allons en mentionner quelques unes à titre indicatif – la liste est très loin d'être exhaustive.

- 1) La question la plus élémentaire que l'on peut se poser face à une variété algébrique, disons affine (resp. projective) sur k est : a-t-elle des points ? Autrement dit, le système d'équations (resp. d'équations homogènes) correspondant admet-il une solution (resp. une solution non triviale) ?

- 1a) Le problème est bien compris lorsque k est algébriquement clos ou lorsqu'il est égal à $\mathbb{R}$. On dispose dans chacune de ces situations de critères théoriques pour que ce soit le cas, et d'algorithmes permettant de décider si ces critères sont satisfaits, et donc *in fine* si une variété donnée est vide ou non : on dit que le corps k est *décidable*.
- 1b) Si k est un corps fini, il est décidable : l'existence d'un algorithme permettant de savoir si une variété algébrique sur k est vide ou non est en effet immédiate, puisqu'il suffit de tester toutes les valeurs possibles des coordonnées.
- 1c) La question de l'existence de points sur une variété est beaucoup plus délicate, et partant beaucoup plus intéressante, lorsque k est un corps de nombres. On ignore à l'heure actuelle si $\mathbb{Q}$ est décidable¹ ; des critères théoriques et parfois effectifs assurant la présence ou l'absence de points ont néanmoins été dégagés pour des classes importantes de variétés algébriques.
- 2) On peut également s'intéresser dans différentes situations à des problèmes de *comptage des points*.
 - 2a) Supposons que le corps k est fini. Toute variété algébrique sur k a alors un nombre fini de points. S'il semble qu'il n'y ait en général rien de particulier à dire sur ce nombre *considéré isolément*, il est par contre extrêmement intéressant de comprendre comment il varie lorsqu'on part d'un système fixé d'équations polynomiales à coefficients dans un certain corps fini k_0 et lorsque k parcourt l'ensemble des extensions finies de k_0 ; c'était là le sujet de la célèbre *conjecture de Weil*, dont nous parlerons un peu plus bas.
 - 2b) Supposons que k est un corps de nombres. S'intéresser au nombre de points des variétés algébriques sur k n'a guère de sens *a priori*, celui-ci étant souvent infini ; néanmoins, certains problèmes intéressants de comptage *asymptotique* se posent dans ce cadre. Nous allons en donner une description brève en supposant pour simplifier que $k = \mathbb{Q}$, et qu'on travaille avec une variété projective $V(E) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$. Tout point x de la variété $V(E) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ admet alors une écriture de la forme $[x_0 : \dots : x_n]$, où les x_i appartiennent à $\mathbb{Z}$ et sont premiers entre eux dans leur ensemble ; de plus, une telle écriture est unique à multiplication par ± 1 près, et le maximum des $|x_i|$ ne dépend donc que de x ; on le note $h(x)$ (c'est la *hauteur* du point x). Pour tout entier N , l'ensemble des points $x \in V(E)$ tels que $h(x) \leq N$ est fini ; soit $c(N)$ son cardinal. Sous l'impulsion de Manin, le développement asymptotique de $c(N)$ lorsque N tend vers l'infini a été abondamment étudié pour certaines classes de variétés (son terme dominant est typiquement de la forme $\kappa N^a (\log N)^b$ où les constantes κ, a et b ont des interprétations arithmétiques et/ou géométriques profondes).
 - 3) Supposons que k soit un *corps topologique*, c'est-à-dire qu'il soit muni d'une topologie pour laquelle l'addition, la multiplication et l'inversion sont continues ; les exemples fondamentaux sont $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, ainsi que ce qu'on

1. On sait depuis les travaux de Matiashevich que l'anneau $\mathbb{Z}$ ne l'est pas ; autrement dit, il n'existe aucun algorithme permettant de décider si un système quelconque d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ a une solution dans $\mathbb{Z}$.

appelle les *corps p -adiques*. Pour tout ensemble fini Λ , on munit k^Λ de la topologie produit. Toute variété algébrique affine $V(E) \subset k^\Lambda$ hérite alors de la topologie induite, et par recollement, toute variété algébrique sur k se retrouve munie d'une topologie naturelle; mentionnons incidemment que si k est localement compact (c'est le cas des différents exemples cités ci-dessus), on vérifie sans difficulté que $\mathbb{P}^n(k)$ est compact.

Se pose alors la question de l'allure que peuvent revêtir les variétés algébriques sur k vues comme espaces topologiques.

3a) Celle-ci a été abondamment considérée lorsque $k = \mathbb{C}$, notamment en ce qui concerne les variétés projectives et *lisses* (nous ne définirons pas ici cette dernière condition, qui s'énonce en termes des dérivées partielles du système d'équations considéré; indiquons seulement que si P est un polynôme homogène en $T_0, \dots, T_n$ alors $V(P) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est lisse si les $\partial P / \partial T_i$ ne s'annulent pas simultanément sur $V(P)$). Donnons à titre d'exemple deux types de problèmes qui ont fait et font encore plus particulièrement l'objet d'études intensives.

- Quels sont les groupes qui apparaissent comme le groupe fondamental d'une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$?

- Si X est une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ et si Y est une sous-variété de X , on peut naturellement associer à Y une classe de cohomologie² sur l'espace topologique X à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (par exemple, on fabrique un cycle singulier en triangulant Y , cycle qui définit une classe d'homologie sur l'espace topologique X , puis une classe de cohomologie en degré complémentaire par dualité). Quelles sont les classes que l'on obtient par ce biais? Leur description est prédite par la célèbre *conjecture de Hodge*, encore ouverte à ce jour.

3b) La topologie des variétés algébriques projectives *réelles* a elle aussi fait l'objet de nombreux travaux, et nous allons nous contenter ici d'évoquer le *seizième problème de Hilbert*. Il consiste à décrire les courbes projectives réelles lisses et planes, c'est-à-dire les variétés projectives réelles de la forme $V(P) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ où P est un polynôme homogène de degré > 0 en trois variables tel que P et ses dérivées partielles ne s'annulent pas simultanément sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Il est facile de voir que les composantes connexes d'une telle variété sont topologiquement des cercles, mais il reste à comprendre, en fonction du degré de P , les valeurs que peut prendre le nombre de ces composantes (c'est connu) et la combinatoire de leur disposition dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (ça ne l'est qu'en petit degré, et il est probablement illusoire d'espérer une réponse systématique).

4) Comme dans toute théorie mathématique se pose en géométrie algébrique le problème de la classification des objets étudiés, modulo diverses relations d'identification – la plus fine étant l'isomorphie. Celui-ci a conduit à différents types de travaux.

2. Nous ne rappellerons pas dans cette introduction les différentes définitions des groupes ou espaces vectoriels de cohomologie d'un espace topologique, car nous n'en aurons pas besoin dans le cours. Indiquons simplement que ceux-ci codent algébriquement un certain nombre d'informations sur la «forme» de l'espace étudié, comme par exemple la présence de «trous». Nous renvoyons le lecteur intéressé à un ouvrage de topologie algébrique.

- 4a) La définition d'invariants «discrets» des variétés algébriques, permettant un premier tri relativement grossier : l'un des plus simples est la dimension, mais beaucoup d'autres ont été construits, le plus souvent inspirés par ce qui se fait en topologie algébrique : groupe fondamental, espaces vectoriels de cohomologie, groupes de K-théorie...
- 4b) La construction d'espaces de modules : on fixe une collection de variétés (qui peut par exemple être définie par les valeurs de certains des invariants évoqués ci-dessus), et l'on cherche à montrer que l'ensemble des (classes d'isomorphie de) variétés appartenant à cette collection s'identifie lui-même naturellement à une variété algébrique, puis à étudier les propriétés de cette dernière. C'est en général un problème difficile, mais nous allons à titre d'illustration décrire un exemple très simple de ce type de situation : l'ensemble des droites de $k^{\{0,\dots,n\}}$ passant par l'origine s'identifie de façon naturelle à $\mathbb{P}^n(k)$ (en envoyant une telle droite sur la classe de n'importe lequel de ses vecteurs directeurs).
- 4c) La géométrie birationnelle. Nous avons évoqué plus haut les applications polynomiales entre variétés. Mais il arrive fréquemment en pratique que l'on ait à considérer des applications qui sont données (localement, dans des cartes affines convenables) par des fractions rationnelles, et qui ne sont donc pas définies partout en général : on doit *a priori* travailler en dehors des pôles. On parle alors d'application rationnelle. On peut composer deux telles applications (en faisant attention aux domaines de définition), et partant définir la notion d'isomorphisme birationnel : c'est une application rationnelle f telle qu'il existe une application rationnelle g vérifiant $f \circ g = \text{Id}$ et $g \circ f = \text{Id}$. La classification des variétés à isomorphisme près peut donc en principe se dérouler en deux temps : on peut les classer à isomorphisme birationnel près puis étudier séparément chaque classe d'isomorphie birationnelle. C'est essentiellement à ce dernier point que s'est attaqué le programme de Mori, appelé aussi MMP (*Minimal model program*), qui visait *grosso modo* à exhiber, dans chaque classe d'isomorphie birationnelle de variétés projectives sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, une variété aussi simple que possible, ou encore «minimale», en un sens à préciser.

Les limites du point de vue ensembliste

Soit k un corps, soit S un système d'équations polynomiales (usuelles ou homogènes) à coefficients dans k et soit V la variété algébrique (affine ou projective) qu'il décrit. Nous avons défini V comme l'ensemble des solutions de S à coordonnées dans k . Mais cette vision «naïve» s'avère en fait insuffisante : l'expérience a en effet montré que l'on avait intérêt à développer un formalisme gardant une trace du système S . Nous allons indiquer deux bonnes raisons à l'appui de cette pétition de principe.

L'extension du corps de base

Il peut tout d'abord arriver que l'on ait besoin (au cours d'une démonstration, ou pour disposer d'un énoncé élégant) de s'intéresser également à l'ensemble des solutions de S à coordonnées dans une certaine extension L de k . Or cet ensemble, auquel on a envie de penser en termes géométriques comme à celui des L -points de la variété V , et qu'on souhaiterait pouvoir noter $V(L)$, ne dépend pas que de V , mais bien de S en général.

Ainsi, supposons que k est le corps des nombres réels, et travaillons en deux variables affines x et y . Prenons pour S le système constitué de l'unique équation $x^2 + y^2 = 0$, et soit S' le système de deux équations

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} ;$$

on note V' la variété algébrique réelle définie par S' .

Il est immédiat que $V = V' = \{(0, 0)\}$. Par contre, les ensembles des solutions *complexes* de S et de S' diffèrent considérablement : le premier est la réunion des deux droites d'équations respectives $x - iy = 0$ et $x + iy = 0$, et le second est (encore) le singleton $\{(0, 0)\}$. On souhaiterait dès lors pouvoir en un sens raisonnable considérer V et V' (qui sont pourtant naïvement identiques) comme deux variétés algébriques réelles *différentes*, de manière à être autorisé à écrire

$$V(\mathbb{C}) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, x = iy \text{ ou } x = -iy\} \text{ et } V'(\mathbb{C}) = \{(0, 0)\},$$

l'égalité désormais incorrecte $V = V'$ devant être remplacée par l'égalité avérée $V(\mathbb{R}) = V'(\mathbb{R}) = \{(0, 0)\}$.

Les multiplicités

La seconde raison justifiant de ne pas oublier S est la nécessité de prendre en compte, d'une façon ou d'une autre, la notion de *multiplicité*. Pour expliquer grossièrement de quoi il retourne, supposons que S est un singleton $\{f\}$, où f n'est pas constant, et posons $S' = \{f^2\}$. Pour toute extension L de k , les systèmes S et S' ont évidemment même ensemble de solutions à coordonnées dans L .

Il est pourtant préférable, pour certaines questions, de penser que les variétés algébriques respectivement décrites par les équations $f = 0$ et $f^2 = 0$ diffèrent, la seconde étant une variante *avec multiplicité*, ou si l'on préfère *infinitésimalement épaissie*, de la première.

Deux exemples

Fixons une clôture algébrique $\bar{k}$ de k . Nous allons illustrer ce qui précède à travers deux théorèmes simples et élégants qui nécessitent à la fois la prise en compte des points à coordonnées dans $\bar{k}$ et celle des multiplicités ; le second montrera de surcroît l'intérêt de travailler en géométrie projective plutôt qu'affine.

Racines d'un polynôme en une variable

Soit $f \in k[T]$ un polynôme de degré $d > 0$ et soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k . On sait que le polynôme f a exactement d racines dans le corps $\bar{k}$ *comptées*

avec *multiplicités*. Géométriquement, cela signifie que la k -variété algébrique affine V définie par l'équation $f = 0$ compte exactement d points à *coordonnées dans $\bar{k}$ et comptés avec multiplicités*.

Ainsi, supposons $k = \mathbb{R}, \bar{k} = \mathbb{C}$ et $f = T^4 - 2T^3 + 2T - 1$. On a

$$f = (T - 1)^2(T^2 + 1) = (T - 1)^2(T - i)(T + i).$$

La variété d'équation $f = 0$ comprend trois points complexes, à savoir $1, i$ et $(-i)$. Le point 1 est «moralement» défini par l'équation $(T - 1)^2 = 0$ et est donc double; les points i et $(-i)$ sont eux respectivement définis par les équations $T - i = 0$ et $T + i = 0$, et sont donc simples. On a bien en conséquence quatre points en tenant compte des multiplicités.

Le théorème de Bézout

Nous allons en donner l'énoncé, puis regarder en détail comment il se traduit dans quelques cas particuliers instructifs.

Théorème. Soient f et g deux polynômes irréductibles de $k[T_0, T_1, T_2]$ non associés, de degrés respectifs d et δ . La variété projective X définie par le système d'équations

$$\begin{cases} f &= 0 \\ g &= 0 \end{cases}$$

compte alors $d\delta$ points à *coordonnées dans $\bar{k}$ et comptés avec multiplicités*.

À partir de maintenant, on suppose que $k = \mathbb{R}$ et que $\bar{k} = \mathbb{C}$. On désigne par U la carte affine $D(T_2) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, que l'on identifie à $\mathbb{C}^2$, en notant τ_0 et τ_1 ses fonctions coordonnées T_0/T_2 et T_1/T_2 . Son complémentaire est la droite à l'infini $\Delta := V(T_2)$, qui s'identifie à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, avec T_0 et T_1 comme coordonnées homogènes. Nous aurons également besoin de travailler avec la carte affine $V := D(T_0)$, dont nous noterons σ_1 et σ_2 les fonctions coordonnées T_1/T_0 et T_2/T_0 .

Nous allons vérifier le théorème de Bézout dans différentes situations. Elles illustreront l'importance de travailler avec des points complexes et pas seulement réels (exemple 2b), de prendre en compte les multiplicités (exemples 2c et 2d) et de se placer dans le cadre projectif plutôt qu'affine (exemples 1c et 2d).

- 1) Commençons par la plus simple : l'étude de l'intersection de *deux droites* à équations réelles.

On suppose que le polynôme f est de la forme $aT_0 + bT_1 + cT_2$ et que le polynôme g est de la forme $\alpha T_0 + \beta T_1 + \gamma T_2$, où (a, b, c) et (α, β, γ) sont deux triplets de nombres réels qui ne sont pas proportionnels et tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. L'intersection du lieu des zéros de f (resp. g) avec U est la variété affine d'équation $a\tau_0 + b\tau_1 + c = 0$ (resp. $\alpha\tau_0 + \beta\tau_1 + \gamma = 0$), et c'est donc une droite affine. Le théorème de Bézout assure que X doit compter exactement un point complexe de multiplicité un; nous allons nous en assurer, et constaterons du même coup que ce point est à coordonnées réelles.

- 1a) Nous allons tout d'abord nous intéresser à l'intersection du lieu des zéros de $aT_0 + bT_1 + cT_2$ et de la droite à l'infini $V(T_2)$. Cette intersection est décrite par le système

$$\begin{cases} aT_0 + bT_1 + cT_2 &= 0 \\ T_2 &= 0 \end{cases}$$

et consiste donc en un unique point, à savoir $[-b : a : 0]$, qui est à coordonnées réelles. On dit parfois par abus que ce point est le «point à l'infini» de la droite affine d'équation $a\tau_0 + b\tau_1 = -c$. De même, le point à l'infini de la droite affine d'équation $\alpha\tau_0 + \beta\tau_1 = -\gamma$ est égal à $[-\beta : \alpha : 0]$. Il coïncide avec $[-b : a : 0]$ si et seulement si (a, b) et (β, α) sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si les deux droites affines considérées sont parallèles ; autrement dit, *le point à l'infini d'une droite affine code sa direction*.

Nous pouvons maintenant revenir à l'étude de X , en distinguant deux cas.

- 1b) *Supposons que (a, b) et (α, β) ne soient pas proportionnels.* Les droites affines d'équations $a\tau_0 + b\tau_1 = -c$ et $\alpha\tau_0 + \beta\tau_1 = -\gamma$ ne sont alors pas parallèles ; elles n'ont donc pas le même point à l'infini (cf. 1a), ce qui signifie que $X \cap \Delta = \emptyset$. Quant à $X \cap U$, c'est l'intersection des deux droites affines évoquées ci-dessus, qu'on calcule en résolvant le système

$$\begin{cases} a\tau_0 + b\tau_1 &= -c \\ \alpha\tau_0 + \beta\tau_1 &= -\gamma \end{cases}.$$

Son unique solution est à coordonnées réelles, et elle est simple (pour une raison évidente : aucun exposant n'apparaît dans les équations lorsqu'on applique la méthode du pivot).

Ainsi, X consiste en un point simple réel, situé à distance finie.

- 1c) *Supposons que (a, b) et (α, β) soient proportionnels.* Les droites affines d'équations $a\tau_0 + b\tau_1 = -c$ et $\alpha\tau_0 + \beta\tau_1 = -\gamma$ sont alors parallèles, et non confondues puisque (a, b, c) et (α, β, γ) ne sont pas proportionnels. Par conséquent, $X \cap U = \emptyset$. Il résulte par ailleurs de 1a) que l'intersection $X \cap \Delta$ consiste en exactement un point, à savoir $[-b : a : 0] = [-\beta : \alpha : 0]$ (ce point correspond simplement à la direction commune aux deux droites parallèles en jeu). Il est simple pour le même type de raison qu'en 1b) : on peut en effet le calculer dans la carte $D(T_0)$ (si $b \neq 0$) ou dans la carte $D(T_1)$ (si $a \neq 0$) par application de la méthode du pivot à un système linéaire, qui ne fait pas apparaître d'exposants.

Ainsi, en géométrie projective, deux droites parallèles à équations réelles se rencontrent à l'infini, en un point simple réel.

- 2) Nous allons maintenant nous intéresser à l'intersection d'une droite et d'une conique projectives à équations réelles. On suppose que

$$f = aT_0^2 + bT_1^2 + cT_2^2 \text{ et } g = \alpha T_0 + \beta T_1 + \gamma T_2,$$

où a, b et c sont des réels tous non nuls, et où α, β et γ sont des réels non tous nuls. Notons C et D les variétés projectives d'équations respectives $f = 0$ et $g = 0$.

Remarquons que $C \cap U$ est la conique affine d'équation $a\tau_0^2 + b\tau_1^2 + c = 0$, et que $D \cap U$ a pour équation $\alpha\tau_0 + \beta\tau_1 + \gamma = 0$, et que c'est donc ou bien une droite affine (si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$) ou bien l'ensemble vide.

Le théorème de Bézout affirme que $C \cap D$ doit être constituée de deux points comptés avec multiplicité. Nous allons regarder ce qu'il en est pour certaines valeurs particulières des paramètres.

- 2a) On suppose que $a = b = 1$, que $c = (-1)$, que $\alpha = \gamma = 0$ et que $\beta = 1$. Commençons par étudier $\Delta \cap C \cap D$. Cette intersection est définie par le système d'équations

$$\begin{cases} T_2 & = & 0 \\ T_0^2 + T_1^2 - T_2^2 & = & 0 \\ T_1 & = & 0 \end{cases},$$

lequel équivaut immédiatement à $T_0 = T_1 = T_2 = 0$, et $\Delta \cap C \cap D$ est donc *vide* (car un point de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est la classe d'un triplet de nombres complexes *non tous nuls*).

Intéressons-nous ensuite à $C \cap D \cap U$. C'est la variété algébrique affine définie par le système d'équations

$$\begin{cases} \tau_0^2 + \tau_1^2 - 1 & = & 0 \\ \tau_1 & = & 0 \end{cases}$$

(autrement dit, c'est l'intersection du cercle unité centré à l'origine avec l'axe des abscisses). Ce système équivaut à

$$\tau_1 = 0 \text{ et } (\tau_0 - 1)(\tau_0 + 1) = 0,$$

et admet en conséquence exactement deux solutions, à savoir $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, qui sont simples (informellement, parce que les deux équations $\tau_0 - 1 = 0$ et $\tau_0 + 1 = 0$ sont sans exposant). On est donc ici dans un cas particulièrement agréable : l'intersection $C \cap D$ consiste en deux points réels simples, situés à distance finie.

- 2b) On suppose que $a = b = 1$, que $c = (-1)$, que $\alpha = 0$, que $\beta = 1$, et que $\gamma = 2$. Commençons par étudier $\Delta \cap C \cap D$. Cette intersection est définie par le système d'équations

$$\begin{cases} T_2 & = & 0 \\ T_0^2 + T_1^2 - T_2^2 & = & 0 \\ T_1 & = & 2T_2 \end{cases},$$

lequel équivaut immédiatement à $T_0 = T_1 = T_2 = 0$, et $\Delta \cap C \cap D$ est donc *vide*.

Intéressons-nous ensuite à $C \cap D \cap U$. C'est la variété algébrique affine définie par le système d'équations

$$\begin{cases} \tau_0^2 + \tau_1^2 - 1 & = & 0 \\ \tau_1 & = & 2 \end{cases}$$

(autrement dit, c'est l'intersection du cercle unité centré à l'origine avec la droite horizontale d'ordonnée 2). Ce système équivaut à

$$\tau_1 = 2 \text{ et } (\tau_0 - i\sqrt{3})(\tau_0 + i\sqrt{3}) = 0,$$

et admet en conséquence exactement deux solutions, à savoir $(i\sqrt{3}, 0)$ et $(-i\sqrt{3}, 0)$, qui sont simples (là encore, c'est parce que les deux équations $\tau_0 - i\sqrt{3} = 0$ et $\tau_0 + i\sqrt{3} = 0$ sont sans exposant). On est donc ici dans un cas un peu plus subtil : l'intersection $D \cap C$ consiste encore en deux points simples situés à distance finie, mais ils ne sont plus réels.

- 2c) On suppose que $a = b = 1$, que $c = (-1)$, que $\alpha = 0$, que $\beta = 1$, et que $\gamma = 1$. Commençons par étudier $\Delta \cap C \cap D$. Cette intersection est définie par le système d'équations

$$\begin{cases} T_2 & = & 0 \\ T_0^2 + T_1^2 - T_2^2 & = & 0 \\ T_1 & = & T_2 \end{cases},$$

lequel équivaut immédiatement à $T_0 = T_1 = T_2 = 0$, et $\Delta \cap C \cap D$ est donc *vide*.

Intéressons-nous ensuite à $C \cap D \cap U$. C'est la variété algébrique affine définie par le système d'équations

$$\begin{cases} \tau_0^2 + \tau_1^2 - 1 & = & 0 \\ \tau_1 & = & 1 \end{cases}$$

(autrement dit, c'est l'intersection du cercle unité centré à l'origine avec la droite horizontale d'ordonnée 1). Ce système équivaut à

$$\tau_1 = 1 \text{ et } \tau_0^2 = 0$$

et admet une solution, à savoir $(0, 1)$, qui est *double* en raison de l'exposant 2 qui figure dans l'équation $\tau_0^2 = 0$. L'intersection $D \cap C$ consiste donc ici en un point réel à distance finie qui est double. Cette duplicité traduit le fait que D est tangente à C , ce qui rend moralement leur unique point de contact «un peu plus épais» qu'un point usuel.

- 2d) On suppose que $a = 1$, que $b = c = (-1)$, que $\alpha = 1$ et que $\beta = -1$; nous allons décrire la situation en fonction de γ .

Intéressons-nous pour commencer à $C \cap D \cap U$. Cette variété algébrique est décrite par le système d'équations

$$\begin{cases} \tau_0^2 - \tau_1^2 & = & 1 \\ \tau_0 - \tau_1 & = & \gamma \end{cases}$$

(c'est l'intersection de l'hyperbole d'équation $\tau_0^2 - \tau_1^2 = 1$ avec la droite d'équation $\tau_0 - \tau_1 = \gamma$, droite qui est parallèle à son asymptote d'équation $\tau_0 - \tau_1 = 0$).

Il y a deux cas à distinguer : si $\gamma \neq 0$ ce système a une unique solution, à savoir $(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma}, \frac{1-\gamma^2}{2\gamma})$ (remplacer τ_0 par $\tau_1 + \gamma$ dans la première équation) ; si $\gamma = 0$ il n'en a aucune.

Étudions maintenant $\Delta \cap C \cap D$. Cette intersection est définie par le système d'équations homogènes

$$\begin{cases} T_2 &= 0 \\ T_0^2 - T_1^2 - T_2^2 &= 0 \\ T_0 - T_1 + \gamma T_2 &= 0 \end{cases}$$

qui équivaut à

$$T_2 = 0 \text{ et } T_0 = T_1,$$

qui possède une unique solution, à savoir $[1 : 1 : 0]$.

En conséquence, l'intersection $D \cap C$ possède toujours un point à l'infini, à savoir $[1 : 1 : 0]$ (qui ne dépend pas de γ ; notons que ce point correspond à la direction de l'asymptote d'équation $\tau_0 - \tau_1 = 0$); et si γ est non nul, elle possède de surcroît un point à distance finie, de coordonnées $(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma}, \frac{1-\gamma^2}{2\gamma})$.

D'après le théorème de Bézout, on doit avoir affaire à deux points simples lorsque $\gamma \neq 0$, et à un point double sinon. Pour le vérifier, on peut travailler dans la carte V au moyen des fonctions coordonnées σ_1 et σ_2 . L'intersection $C \cap D \cap V$ est décrite par le système d'équations suivant, obtenu en déshomogénéisant les équations initiales par rapport à T_0 :

$$\begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 &= 1 \\ \sigma_1 - \gamma \sigma_2 &= 1 \end{cases}$$

(on observe que dans cette nouvelle carte la conique initiale est «devenue» un cercle).

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} (1 + \gamma^2)\sigma_2^2 + 2\gamma\sigma_2 &= 0 \\ \sigma_1 &= 1 + \gamma\sigma_2 \end{cases},$$

soit encore

$$\begin{cases} \sigma_2((1 + \gamma^2)\sigma_2 + 2\gamma) &= 0 \\ \sigma_1 &= 1 + \gamma\sigma_2 \end{cases}.$$

Si $\gamma \neq 0$ la première ligne a deux racines simples, à savoir 0 et $\frac{-2\gamma}{1+\gamma^2}$, et le système a donc deux solutions simples qui sont

$$(1, 0) \text{ et } \left(\frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2}, \frac{-2\gamma}{1 + \gamma^2} \right).$$

Si $\gamma = 0$ la première ligne s'écrit $\sigma_2^2 = 0$, et elle a une unique racine double, à savoir 0. Le système admet alors $(1, 0)$ pour unique solution, et celle-ci est double. Le lecteur remarquera que c'est là encore un phénomène de tangence qui est mis en évidence : le cas où $\gamma = 0$ est celui où l'on intersecte le cercle d'équation $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$ avec sa tangente d'équation $\tau_2 = 1$.

Du point de vue de la carte affine U , on peut résumer informellement ce qui précède comme suit. L'intersection d'une hyperbole H et d'une

droite $\mathcal{D}$ parallèle à l'une de ses asymptotes A (ces trois courbes étant définies par des équations réelles) consiste :

- en deux points réels simples, l'un à distance finie et l'autre à l'infini (ce dernier correspond nécessairement à la direction de A) si $\mathcal{D} \neq A$;
- en un unique point réel à l'infini (là encore, il correspond nécessairement à la direction de A) si $\mathcal{D} = A$; ce point est alors double, car l'asymptote y est tangente à l'hyperbole.

Le langage des schémas

On a expliqué à la section précédente l'importance de mettre au point un formalisme qui garde la trace des systèmes d'équations utilisés pour décrire les variétés.

La réponse classique

En géométrie algébrique classique, on répond à cette requête de manière simple quoique imparfaite *en travaillant le plus souvent possible sur un corps algébriquement clos*. On dispose en effet sur un tel corps k d'un théorème d'algèbre commutative, le *Nullstellensatz*, qui assure qu'une variété algébrique V contient « beaucoup d'information » sur le système S utilisé pour la définir. Par exemple, si l'on se donne une extension L de k , l'ensemble des solutions de S à coordonnées dans L ne dépend que de V et pas du choix de S , et peut donc être noté sans ambiguïté $V(L)$. Mais notez bien qu'il n'y a aucun espoir que V permette de reconstituer intégralement le système S , ou disons simplement l'idéal qu'il engendre ; on ne pourra en effet jamais détecter les multiplicités de S à partir de V (pour f donnée, les équations $f = 0$ et $f^2 = 0$ ont même lieu des zéros alors que les idéaux (f) et (f^2) diffèrent sauf exceptions).

La géométrie algébrique classique manipule donc le plus souvent des variétés algébriques (affines, projectives ou générales) au sens de la section précédente *sur un corps de base k algébriquement clos*, quitte à fixer un sous-corps k_0 de k et à se demander à l'occasion si certaines variétés ou certains morphismes sont « définis sur k_0 », c'est-à-dire susceptibles d'être décrits par des équations ou des formules à coefficients dans k_0 .

Un cas fréquemment rencontré est celui où k est une clôture algébrique de k_0 , et où les questions de définition sur k_0 peuvent alors être abordées par des méthodes galoisiennes ; ainsi, dans cette optique, faire de la géométrie algébrique sur $\mathbb{R}$ consiste à faire de la géométrie algébrique sur $\mathbb{C}$ en prenant de surcroît en compte la conjugaison complexe.

Mais mentionnons également le point de vue d'André Weil qui consistait, le corps k_0 auquel on s'intéresse étant donné, à prendre pour k un corps algébriquement clos contenant k_0 *et de degré de transcendance infini sur ce dernier* : même si k_0 est algébriquement clos, considérer des points à valeurs dans un corps beaucoup plus gros peut être utile pour un grand nombre de problèmes.

Et dans tous les cas, comme nous l'avons mentionné ci-dessus, cette approche ne dit rien sur les multiplicités : celles-ci doivent être traitées à part, et ne

sont pas dans le cadre classique partie intégrante de la définition d'une variété algébrique.

La réponse de Grothendieck : la théorie des schémas

La géométrie sur un corps

En ce qui concerne la géométrie algébrique sur un corps, la théorie des schémas répond *complètement* à la requête formulée plus haut, comblant de manière naturelle toutes les lacunes du point de vue ensembliste précédemment signalées. Pour être un peu plus précis, fixons un corps k non nécessairement algébriquement clos et un système d'équations polynomiales S (usuelles ou homogènes) à coefficients dans k . L'avatar schématique X de la variété algébrique (affine ou projective) définie par S est un objet à la structure très riche. En effet :

- X est un espace topologique qui n'est pas uniquement constitué des solutions de S à coordonnées dans k , puisque toute solution de S à coordonnées dans *n'importe quelle* extension de k fournit un point de X , qui de surcroît «garde en mémoire» le plus petit corps sur lequel on peut le définir ;
- à tout ouvert U de X est associée une k -algèbre $\mathcal{O}_X(U)$, souvent appelée «algèbre des fonctions sur U ».

La collection des algèbres de fonctions $\mathcal{O}_X(U)$ (pour U variable) contient toutes les informations utiles sur le système S , et code notamment ses multiplicités, qui se manifestent par la présence de fonctions *nilpotentes*.

La géométrie sur un anneau

Mais la théorie des schémas ne se contente pas de remédier aux défauts de l'approche naïve de la géométrie algébrique sur un corps. Elle offre également un avantage radicalement nouveau : grâce à elle, on peut raisonner en termes géométriques relativement proches de l'intuition classique sur les systèmes d'équations polynomiales à coefficients dans un anneau (commutatif unitaire) quelconque et pas seulement dans un corps.

Ainsi, soit S un système d'équations polynomiales (usuelles ou homogènes) à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Pour tout nombre premier p , le système S définit par réduction modulo p un système d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, et partant une variété algébrique affine ou projective sur $\mathbb{F}_p$, ou de façon plus sophistiquée un schéma sur $\mathbb{F}_p$ que nous noterons $X_{\mathbb{F}_p}$. Par ailleurs, on peut oublier que le système S est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et se contenter de le voir comme à coefficients dans $\mathbb{Q}$; là encore, il définit une variété affine ou projective sur $\mathbb{Q}$, ou de façon plus sophistiquée un schéma sur $\mathbb{Q}$ que nous noterons $X_{\mathbb{Q}}$.

Le système S fournit ainsi une famille de schémas définis sur des corps différents (les $\mathbb{F}_p$ et $\mathbb{Q}$). Mais il fournit également un schéma «global» X , qui incorpore de façon naturelle les $X_{\mathbb{F}_p}$ et $X_{\mathbb{Q}}$: ceux-ci peuvent en effet s'interpréter comme les différentes fibres d'un certain morphisme de source X . Ce dernier met donc un certain *liant* entre les $X_{\mathbb{F}_p}$ (et $X_{\mathbb{Q}}$), et permet d'y penser comme à une «famille à paramètres de variétés algébriques» ; il est en conséquence très utile, aussi bien techniquement que psychologiquement, pour arriver à comparer les propriétés des différents $X_{\mathbb{F}_p}$ et de $X_{\mathbb{Q}}$ en dépit de la variation du corps de base.

Nous allons donner au paragraphe suivant un magnifique exemple d'une telle comparaison.

La conjecture de Weil

La motivation essentielle qui a présidé à la refondation de toute la géométrie algébrique sous l'égide de Grothendieck était d'arriver à prouver une conjecture de Weil, ce qui advint finalement, la pierre finale à l'édifice ayant été apportée par Pierre Deligne en 1974 – cela lui valut la médaille Fields. Expliquons maintenant en quoi elle consiste, dans un langage classique – sans théorie des schémas.

Soit N un entier et soit S un système d'équations polynomiales homogènes en $n + 1$ variables à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit p un nombre premier. Pour tout entier non nul n , il existe une extension $\mathbb{F}_{p^n}$ de $\mathbb{F}_p$ de degré n , unique à isomorphisme près (non canonique si $n > 1$), et l'on note $x_{p,n}$ le cardinal du sous-ensemble de $\mathbb{P}^N(\mathbb{F}_{p^n})$ défini par la réduction modulo p du système d'équations S . On pose

$$Z_p = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{x_{p,n} T^n}{n} \right) \in \mathbb{Q}((T)).$$

On peut par ailleurs voir S comme un système d'équations homogènes à coefficients dans $\mathbb{C}$, qui définit donc une variété projective complexe $V \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. On suppose que V est lisse (nous avons déjà évoqué cette notion plus haut, rappelons que c'est par exemple le cas dès que S consiste en une équation f dont les dérivées partielles ne s'annulent pas simultanément sur V). Pour tout i , on note h^i la dimension du i -ème espace de cohomologie de V à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{C}$ est de dimension réelle 2, la dimension de V est un entier pair $2d$, et $h^i = 0$ dès que $i > 2d$.

On démontre alors (Weil, Dwork, Grothendieck, Deligne) les assertions suivantes :

- 1) Pour tout p , la série Z_p est une fraction rationnelle.
- 2) Pour tout p *suffisamment grand*, on peut plus précisément écrire

$$Z_p = \frac{\prod_{0 \leq i \leq 2d, i \text{ impair}} R_{i,p}}{\prod_{0 \leq i \leq 2d, i \text{ pair}} R_{i,p}}$$

où $R_{i,p}$ est pour tout i un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré h^i dont toutes les racines complexes ont pour module $p^{i/2}$.

On met ainsi au jour un lien fascinant entre le nombre de solutions de S dans les extensions de $\mathbb{F}_p$ pour p grand et la topologie de l'ensemble de ses solutions complexes.

À propos de ce livre

La théorie des schémas a un immense avantage : elle fournit un cadre de travail d'une souplesse et d'une généralité absolument exceptionnelles, qui rend

possible le recours à l'intuition et au raisonnement géométriques dans maintes situations qui pourraient sembler *a priori* purement algébriques.

Mais tout a un prix, et elle présente également un lourd inconvénient : elle est d'un accès redoutablement difficile, sur le plan technique mais aussi et surtout sur le plan psychologique. Son formalisme très abstrait, l'ésotérisme apparent des objets qu'elle considère, le type de raisonnements sur lequel elle repose et l'état d'esprit général qui l'imprègne, tout concourt à déstabiliser celui qui la découvre.

Le but de ce livre est d'aider à surmonter cet obstacle initial. Nous avons dès lors choisi de nous limiter aux bases de la théorie, sans aborder des thèmes absolument cruciaux mais techniquement plus délicats (par exemple, nous ne disons pratiquement rien sur la platitude, la lissité ou la cohomologie des faisceaux cohérents). Nous avons voulu avant tout permettre au lecteur de se familiariser avec la notion de schéma, d'apprendre à la manipuler dans des cas relativement simples, et de se forger une intuition à son propos ; cela devrait lui être utile pour poursuivre, s'il le souhaite, l'apprentissage de la théorie dans des ouvrages plus avancés. Nous nous sommes donc efforcé, autant que faire se pouvait, de motiver les définitions introduites, de les illustrer par de nombreux exemples élémentaires traités en détail, et d'expliquer comment penser en termes géométriques classiques aux objets en jeu, si abscons soient-ils au premier contact.

Nous avons par ailleurs cherché à rédiger un texte aussi auto-suffisant que possible, et avons réduit les pré-requis au minimum. Nous supposons simplement connues les définitions et propriétés de base de la théorie des anneaux commutatifs, des idéaux et des modules, ainsi que l'arithmétique des anneaux principaux et factoriels (voir le chapitre 0 pour davantage de précision). Nous introduisons nous-mêmes en détail, *avec toutes les démonstrations*, les autres outils dont nous aurons besoin ; ces préliminaires constituent la première partie de ce livre, intitulée *Les outils de la géométrie algébrique*. Elle se compose de trois chapitres que nous allons maintenant décrire.

- **Le chapitre 1.** Il est consacré aux *catégories*. On vous y présente un *langage* très commode. Il permet, en dégageant un certain nombre de propriétés formelles qui leur sont communes, de donner une description unifiée de situations rencontrées dans des domaines extrêmement divers des mathématiques ; les géomètres algébristes à la Grothendieck en sont particulièrement friands.

On n'établit qu'un seul énoncé dans ce chapitre, le *lemme de Yoneda*, qui est ce qu'on appelle un *abstract nonsense* ; sa preuve fait mal à la tête en première lecture, mais est essentiellement tautologique.

- **Le chapitre 2.** Il concerne l'*algèbre commutative*, c'est-à-dire l'étude avancée des anneaux commutatifs, idéaux et modules. Celle-ci joue en géométrie algébrique un rôle absolument fondamental, analogue à celui de l'analyse réelle (resp. complexe) en géométrie différentielle (resp. analytique complexe) : c'est la *partie locale* de la théorie.

La majeure partie de ce chapitre porte sur des anneaux commutatifs unitaires quelconques, à propos desquels on introduit et étudie différentes notions fondamentales (localisation, produit tensoriel, éléments entiers, dimension de Krull...). Mais on y établit à la fin deux résultats cruciaux et difficiles spécifiques aux *algèbres de type fini sur un corps* : le *lemme de normalisation de Noether* et le *Nullstellensatz*.

- **Le chapitre 3.** Il pose les bases de la théorie des *faisceaux* sur un espace topologique. Ceux-ci ont été initialement introduits par Leray en topologie algébrique et c'est Serre qui, dans son article fondateur *Faisceaux algébriques cohérents*, a le premier mis en évidence les services qu'ils pouvaient rendre en géométrie algébrique sur un corps algébriquement clos quelconque ; Grothendieck les a ensuite placés au cœur de toute sa théorie. Contentons-nous de dire ici qu'un faisceau $\mathcal{F}$ d'ensembles (resp. de groupes, resp. d'anneaux...) sur un espace topologique X associe à tout ouvert U de X un ensemble (resp. un groupe, resp. un anneau...) $\mathcal{F}(U)$, dont les éléments sont appelées les *sections de $\mathcal{F}$ sur U* . La donnée des $\mathcal{F}(U)$ est sujette à un certain nombre d'axiomes, qui disent essentiellement qu'on sait *restreindre* et *recoller* les sections.

Ces différents outils introduits, nous entrons dans le vif du sujet : la théorie des schémas, objet des chapitres 4, 5 et 6.

- **Le chapitre 4.** La théorie des schémas associe à tout anneau commutatif A un espace topologique noté $\text{Spec } A$ et appelé le *spectre* de A . Ce chapitre est consacré à sa définition, à la mise en évidence de ses premières propriétés, et à l'étude détaillée des cas où

$$A = k, \mathbb{Z}, k[T], \mathbb{Z}[T] \text{ ou } k[S, T]$$

(ici k est un corps, supposé algébriquement clos pour l'exemple $k[S, T]$).

- **Le chapitre 5.** La géométrie algébrique fait en réalité de $\text{Spec } A$ un objet plus riche qu'un simple espace topologique : elle le munit également d'un *faisceau d'anneaux* ; ce chapitre débute par sa construction.

On y définit ensuite ce qu'est un schéma : c'est un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux et recouvert par des ouverts de la forme $\text{Spec } A$.

Les spectres d'anneaux, qu'on appelle également *schémas affines*, apparaissent ainsi comme les « briques » de la théorie : on obtient à partir d'eux *tous* les schémas par recollement.

Il y a une notion naturelle de *morphisme* de schémas que nous présentons, et nous consacrons beaucoup de temps à l'étude de morphismes particuliers qui revêtent une importance majeure dans la théorie (immersions ouvertes, morphismes affines, immersions fermées et morphismes de type fini). Pour ce faire, nous avons besoin d'introduire une classe particulière de faisceaux de modules sur un schéma, appelés les *faisceaux quasi-cohérents*, qui sont par ailleurs omniprésents en géométrie algébrique.

Nous concluons ce chapitre par une section qui propose un point de vue alternatif sur les schémas, celui dit du *foncteur des points*. Il est à la fois

très abstrait – il repose sur le lemme de Yoneda en théorie des catégories, que nous avons évoqué plus haut – et très tangible : nous expliquons sur plusieurs exemples (mettant en jeu des schémas affines) qu’il permet en un sens un retour à la vision naïve et concrète des variétés algébriques comme *ensembles* de solutions de systèmes d’équations polynomiales, et des morphismes entre icelles comme *applications* polynomiales.

- **Le chapitre 6.** Il est dévolu à la variante schématique de la géométrie projective. Elle repose sur une construction assez proche de celle du spectre mais un peu plus lourde, qui associe à un anneau *gradué* B un schéma noté $\text{Proj } B$.

Après l’avoir expliquée en détail, nous étudions plusieurs exemples importants, dont celui, fondamental entre tous, de *l’espace projectif de dimension* n sur un anneau A , noté $\mathbb{P}_A^n$: c’est le schéma $\text{Proj } A[T_0, \dots, T_n]$. Nous décrivons son foncteur des points – c’est pour nous l’occasion d’introduire un objet d’une importance extrême (pour de multiples raisons, dont la plupart dépassent le cadre de ce livre) : le faisceau quasi-cohérent $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}_A^n$.

Nous constatons une fois encore que le point de vue «foncteur des points» permet de renouer avec une vision ensembliste naïve (en l’occurrence, celle d’une variété projective comme lieu des zéros d’une famille de polynômes homogènes).

Pour finir, nous nous intéressons à la *propreté*. C’est le substitut de la compacité en géométrie algébrique à la Grothendieck (mais sa définition n’est pas purement topologique). Nous l’utilisons pour énoncer et démontrer dans ce cadre les pendants de différents résultats classiques. Ainsi, nous prouvons par exemple que $\mathbb{P}_A^n$ est propre (c’est l’analogie de la compacité de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, mais c’est nettement moins évident) ; et nous terminons par un avatar schématique (que nous n’énoncerons pas ici) du fait suivant : toute fonction holomorphe sur une variété complexe compacte connexe est constante.

Chapitre 0

Pré-requis et rappels

0.1 Anneaux

(0.1.1) Convention. Dans tout ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire, «anneau» signifiera «anneau commutatif unitaire», «algèbre» signifiera «algèbre commutative unitaire», et un morphisme d'anneaux ou d'algèbres sera toujours supposé envoyer l'unité de la source sur celle du but.

(0.1.2) Le lecteur sera supposé familier avec les définitions d'anneau, d'idéal et d'anneau quotient.... ainsi qu'avec les propriétés élémentaires de ces objets, que nous ne rappellerons pas ici pour la plupart. Nous allons toutefois insister sur quelques points sans doute connus, mais qui sont importants et au sujet desquels on peut commettre facilement quelques erreurs.

(0.1.2.1) Dans la définition d'un anneau A , on n'impose pas à 1 d'être différent de 0. En fait, l'égalité $1 = 0$ se produit dans un et seul cas, celui où A est *l'anneau nul* $\{0\}$.

(0.1.2.2) Si A est un anneau, on notera $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de A ; il est stable par multiplication et $(A^\times, \times)$ est un groupe

(0.1.3) Un anneau A est dit *intègre* s'il est non nul et si l'on a pour tout couple (a, b) d'éléments de A l'implication

$$(ab = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0).$$

(0.1.3.1) On prendra garde de ne jamais oublier de vérifier la première de ces deux conditions : *un anneau intègre est par définition non nul* (l'expérience a montré qu'on avait tout intérêt à imposer cette restriction pour éviter une profusion de cas particuliers à distinguer dans les définitions, énoncés et démonstrations ultérieurs).

(0.1.3.2) Le lecteur amateur de facéties bourbakistes appréciera certainement la définition alternative suivante : un anneau A est intègre si et seulement si *tout produit fini d'éléments non nuls de A est non nul*. Elle contient en effet la non-nullité de A , puisqu'elle implique que l'unité 1, qui n'est autre que le produit *vide* d'éléments de A , est non nulle.

(0.1.4) On dit qu'un anneau A est un corps s'il est non nul et si tout élément non nul de A est inversible; il revient au même de demander que A ait exactement deux idéaux, à savoir $\{0\}$ et A . Si A est un corps, il est intègre et $A^\times = A \setminus \{0\}$.

(0.1.5) Soit f un morphisme d'un corps K vers un anneau *non nul* A . Comme A est non nul, $1 \notin \text{Ker } f$; puisque les seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K , il vient $\text{Ker } f = \{0\}$ et f est injectif.

En particulier, tout morphisme de corps est injectif.

(0.1.6) Soit A un anneau. Une A -algèbre est un anneau B muni d'un morphisme $f : A \rightarrow B$. Bien que f fasse partie des données, il sera très souvent omis (on dira simplement «soit B une A -algèbre»). Il arrivera même que l'on écrive abusivement a au lieu de $f(a)$ pour $a \in A$; mais cette entorse à la rigueur peut être dangereuse, surtout lorsque f n'est pas injective : si on la commet, il faut en avoir conscience et y mettre fin lorsque la situation l'exige.

Soit B une A -algèbre. Si S est une partie de B on notera $A[S]$ la sous- A -algèbre de B engendrée par S , c'est-à-dire encore le sous-anneau de B engendré par S et par (l'image de) A . Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de B , on écrira $A[x_i]_{i \in I}$ plutôt que $A[\{x_i\}_{i \in I}]$; de même, si $x \in B$ on écrira $A[x]$ au lieu de $A[\{x\}]$. L'anneau $A[x]$ n'est autre que l'anneau des polynômes en x à coefficients dans A , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de B de la forme $\sum a_i x^i$ où les a_i appartiennent à A (en commettant l'abus de notation évoqué ci-dessus; si on ne le souhaite pas, il faut parler d'éléments de la forme $\sum f(a_i) x^i$ où $f : A \rightarrow B$ désigne le morphisme structural). De même, $A[x_i]_{i \in I}$ est constitué des polynômes en les x_i à coefficients dans A .

(0.1.7) Soit A un anneau. Un élément a de A est dit *nilpotent* s'il existe $n \geq 0$ tel que $a^n = 0$.

(0.1.7.1) L'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A . Il est en effet immédiat qu'il contient 0 et est stable par multiplication externe, et il reste à vérifier sa stabilité par addition. Soient donc a et b deux éléments nilpotents de A , et soient n et m deux entiers tels que $a^n = 0$ et $b^m = 0$. En développant $(a + b)^{n+m}$ on obtient une somme de monômes de la forme $a^i b^j$ avec $i + j = n + m$; or dans un tel monôme, on a ou bien $i \geq n$ ou bien $j \geq m$, et il est donc toujours nul. En conséquence, $(a + b)^{n+m} = 0$ et $a + b$ est nilpotent.

(0.1.7.2) On dit que A est *réduit* si son nilradical est nul, c'est-à-dire encore si A n'a pas d'élément nilpotent non trivial.

(0.1.8) Pré-requis plus avancés.

(0.1.8.1) Nous supposons que le lecteur est à l'aise avec les notions d'anneau principal et d'anneau factoriel, ainsi qu'avec les propriétés arithmétiques élémentaires de ces derniers que nous utiliserons librement.

Rappelons simplement ici que si A est un anneau factoriel, l'anneau $A[T]$ est encore factoriel. On connaît ses éléments irréductibles : ce sont d'une part les éléments irréductibles de A , d'autre part les polynômes P dont le *contenu*, c'est-à-dire le PGCD des coefficients, est égal à 1, et qui sont irréductibles dans l'anneau principal $(\text{Frac } A)[T]$. Il en découle notamment par une récurrence immédiate que pour tout entier n et tout corps k les anneaux $k[T_1, \dots, T_n]$ et $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$ sont factoriels.

(0.1.8.2) Nous supposerons également connue la notion d'anneau noethérien. Rappelons que si A est un tel anneau, alors $A[T]$ est noethérien ; il s'ensuit par récurrence que $A[T_1, \dots, T_n]$ est noethérien pour tout n , puis que toute A -algèbre de type fini est noethérienne. En particulier, une algèbre de type fini sur un corps ou sur $\mathbb{Z}$ est noethérienne.

0.2 Modules

(0.2.1) Nous supposerons l'algèbre linéaire parfaitement connue.

(0.2.2) Soit A un anneau. Un A -module est un groupe abélien M muni d'une loi externe $A \times M \rightarrow M$ satisfaisant les mêmes axiomes que ceux qui servent à définir les espaces vectoriels. Les sous-modules, les applications A -linéaires, les familles libres et génératrices, les bases, les supplémentaires... se définissent *mutatis mutandis* comme les objets analogues en algèbre linéaire.

(0.2.3) Il arrivera souvent dans la suite qu'on manipule des expressions de la forme $\sum_{i \in I} m_i$, où les m_i sont des éléments d'un A -module M fixé. Il sera toujours implicitement supposé, dans une telle écriture, que *presque tous les m_i sont nuls*. Elle n'aurait sinon aucun sens : *en algèbre, on ne sait faire que des sommes finies* ; pour donner un sens à des sommes infinies, il est nécessaire d'introduire des structures de nature topologique.

(0.2.4) Attention ! On prendra garde que certains énoncés usuels portant sur les espaces vectoriels deviennent faux en général pour les modules sur un anneau quelconque ; ce qui empêche leurs preuves de s'étendre à ce nouveau contexte est le plus souvent qu'elles font appel à un moment ou un autre à l'inversion d'un scalaire non nul. Donnons quelques exemples.

(0.2.4.1) Il est faux en général qu'un module possède une base. Par exemple, le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'en possède pas. En effet, s'il en admettait une elle serait non vide (puisqu'il est non nul), et comprendrait donc au moins un élément qui serait annulé par 2, contredisant ainsi sa liberté.

(0.2.4.2) Soit A un anneau. On dit qu'un A -module M est *libre* s'il possède une base. On vient de voir que ce n'est pas automatique ; mais lorsque c'est le cas *et lorsque A est non nul* nous verrons plus bas (prop. 2.3.6) que toutes les bases de M ont même cardinal, appelé *rang* de M . Dans le cas des espaces vectoriels, c'est un résultat que vous connaissez bien (et qui donne naissance à la théorie de la dimension) et sur lequel nous revenons à la fin de ce chapitre, en en donnant une formulation axiomatique qui a l'avantage de pouvoir s'appliquer ailleurs qu'en algèbre linéaire – nous l'utiliserons notamment plus loin pour définir le *degré de transcendance* d'une extension de corps.

Il faut faire attention au cas de l'anneau nul $\{0\}$. Le seul module sur celui-ci est le module trivial $\{0\}$, et toute famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de ce module (qui vérifie nécessairement $e_i = 0$ pour tout i) en est une base, indépendamment du cardinal de I (il peut être vide, fini, infini dénombrable ou non, etc.). Nous laissons au lecteur qu'amuse les manipulations logiques dans les cas un peu extrêmes le soin de prouver cette assertion.

Notez par contre que sur un anneau non nul, un élément e d'une famille libre n'est jamais nul (sinon, il satisferait la relation non triviale $1 \cdot e = 0$).

(0.2.4.3) Soit A un anneau. Il est faux en général que tout sous-module d'un A -module M admette un supplémentaire dans M , même si M est libre. Par exemple, le lecteur pourra démontrer à titre d'exercice que le sous-module $2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ n'a pas de supplémentaire dans $\mathbb{Z}$.

(0.2.5) Soit A un anneau. Un A -module M est dit *de type fini* s'il possède une famille génératrice finie, c'est-à-dire encore s'il existe un entier n et une surjection linéaire $A^n \rightarrow M$.

Il est dit *de présentation finie* s'il existe une telle surjection possédant un noyau de type fini.

(0.2.5.1) Tout A -module de présentation finie est de type fini. La réciproque est vraie si A est noethérien, car on démontre que dans ce cas tout sous-module d'un A -module de type fini est de type fini; elle est fausse en général (pour un contre-exemple, cf. 2.7.9.2 *infra*).

(0.2.5.2) Si M est un A -module libre et de type fini, il possède une base finie. Pour le voir, on choisit une base $(e_i)_{i \in I}$ de M . Comme M est de type fini, il est engendré par une famille finie de vecteurs, et chacun d'eux est combinaison linéaire d'un nombre fini de e_i . Il existe donc un ensemble fini d'indices $J \subset I$ tel que $(e_i)_{i \in J}$ soit génératrice, et donc soit une base de M . Remarquez que si $A \neq \{0\}$ on a nécessairement $I = J$, car un élément e_i avec $i \notin J$ est forcément non nul et ne peut dès lors être une combinaison linéaire des e_i avec $i \in J$; on a donc montré que dans ce cas *toutes* les bases de M sont finies. Mais notez que si $A = \{0\}$ l'ensemble I peut contenir *strictement* J , et être infini cf. 0.2.4.2).

(0.2.5.3) Soit A un anneau et soit M un A -module de type fini. Il est faux en général qu'un endomorphisme injectif de M dans lui-même soit bijectif¹. Par exemple, $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$ -module libre de rang 1 sur lui-même, et la multiplication par 2 en est un endomorphisme injectif non surjectif.

(0.2.6) Sommes directes externes et internes. Soit A un anneau.

(0.2.6.1) *La somme directe interne.* Soit M un A -module et soit (M_i) une famille de sous-modules de M . La *somme des M_i* est le sous-module de M constitué des éléments de la forme $\sum m_i$ où $m_i \in M_i$ pour tout i ; on le note $\sum M_i$.

On dit que la somme des M_i est *directe*, et l'on écrit $\sum M_i = \bigoplus M_i$, si pour tout élément m de $\sum M_i$ l'écriture $m = \sum m_i$ est unique. Il suffit de le vérifier pour $m = 0$, c'est-à-dire de s'assurer que $(\sum m_i = 0) \Rightarrow (\forall i, m_i = 0)$.

(0.2.6.2) *La somme directe externe.* Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A -modules, qui ne sont pas *a priori* plongés dans un même A -module. Soit N le sous-module de $\prod M_i$ formé des familles (m_i) telles que $m_i = 0$ pour presque tout i . Pour tout $i \in I$, on dispose d'une injection naturelle $h_i : M_i \hookrightarrow N$ qui envoie un élément m sur la famille (m_j) avec $m_j = 0$ si $j \neq i$ et $m_i = m$. Il est immédiat que $N = \bigoplus h_i(M_i)$. On a ainsi construit un module qui contient une copie de chacun des M_i , et est égal à la somme directe desdites copies. On dit que N est la somme directe *externe* des M_i , et on le note encore $\bigoplus M_i$.

1. Nous verrons par contre plus loin (corollaire 2.3.5) qu'un endomorphisme *surjectif* d'un tel M est toujours bijectif.

(0.2.6.3) *Liens entre les sommes directes interne et externe.* Soit M un A -module et soit (M_i) une famille de sous-modules de M . On dispose pour tout i de l'inclusion $u_i : M_i \hookrightarrow M$. La famille des u_i définit une application linéaire

$$u : (m_i) \mapsto \sum_i u_i(m_i)$$

de la somme directe *externe* $\bigoplus M_i$ vers M . On vérifie aussitôt que les M_i sont en somme directe dans M au sens de 0.2.6.1 si et seulement si u est injective, et que $M = \bigoplus M_i$ au sens de 0.2.6.1 si et seulement si u est bijective.

0.3 Le lemme de Zorn

(0.3.1) Soit E un ensemble partiellement ordonné. Une *chaîne* de E est un sous-ensemble de E qui est *totale*ment ordonné. On dit que E est *inductif* si toute chaîne E admet un majorant. Il revient au même de demander que E soit non vide et que toute partie totalement ordonnée non vide de E admette un majorant (en effet, un majorant de la chaîne vide est simplement un élément de E).

(0.3.2) Le *lemme de Zorn* affirme que tout ensemble inductif admet un élément maximal.

Informellement, ce lemme est vrai pour la raison suivante. On se donne un ensemble inductif E et l'on suppose qu'il n'admet pas d'élément maximal. Comme E est inductif, il est non vide et l'on choisit $e_0 \in E$. Puisque e_0 n'est pas maximal, il admet un majorant strict e_1 , qui admet lui-même un majorant strict e_2 , etc. On construit ainsi une suite strictement croissante $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E ; l'ensemble $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ étant une chaîne il possède un majorant e_ω , qui admet lui-même un majorant strict $e_{\omega+1}$; en poursuivant le processus, on finit par exhiber une chaîne de E qui est *trop longue*, et l'on aboutit ainsi à une contradiction.

Lorsqu'on cherche à en écrire une démonstration rigoureuse, on bute sur deux difficultés.

(0.3.2.1) *Première difficulté.* Il faut donner une description précise de «l'algorithme» de construction d'une chaîne trop longue vaguement esquissé ci-dessus – nous n'en avons donné que les premières étapes sans expliquer ce qui se passait ensuite; c'est possible au moyen de la théorie des *réurrences transfinies*, qui repose elle-même sur la notion d'*ordinal*.

(0.3.2.2) *Seconde difficulté.* Cet «algorithme» requiert par ailleurs de *choisir* à chaque étape un majorant strict d'un élément, ou un majorant d'une chaîne qui n'a pas de plus grand élément; ce n'est possible que si l'on dispose de *l'axiome du choix* (pas seulement parce qu'on ne voit pas comment faire autrement : on peut démontrer que le lemme de Zorn est *équivalent* à l'axiome du choix).

0.4 Dimension des espaces vectoriels *via* les relations de dépendance abstraites

(0.4.1) Le but de cette section est de donner une présentation de la théorie de la dimension en algèbre linéaire différant probablement de celles que vous avez déjà rencontrées; elle repose sur une axiomatisation de la relation de dépendance linéaire, et a l'avantage de s'appliquer tout aussi bien à d'autres types de relations de dépendance, comme la *dépendance algébrique* que nous rencontrerons en théorie des corps. Cette approche axiomatique est la base de ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie des *matroïdes* (que nous n'aborderons pas vraiment en tant que telle ici).

(0.4.2) **Définition.** Soit E un ensemble. Une *relation de dépendance* sur E est la donnée d'une relation $\prec$ entre éléments de E et parties de E sujette aux axiomes suivants :

- (1) si $x \in S$ alors $x \prec S$;
- (2) si $x \prec S$ et si $s \prec T$ pour tout $s \in S$ alors $x \prec T$;
- (3) si $x \prec S$, il existe un sous-ensemble fini S' de S tel que $x \prec S'$;
- (4) si $x \prec S$, si $y \in S$ et si $x \not\prec (S \setminus \{y\})$ alors $y \prec (\{x\} \cup S \setminus \{y\})$.

Notons deux conséquences faciles de ces axiomes.

(0.4.2.1) On a $x \prec E$ pour tout $x \in E$, d'après (1).

(0.4.2.2) Si $S \subset T$ et $x \prec S$ alors $x \prec T$ (combinaison (1) et (2)).

(0.4.3) **Exemple archétypal.** Soit E un espace vectoriel sur un corps k . Soit $\prec$ la relation entre vecteurs de E et parties de E telle que $x \prec S$ si et seulement si x appartient au sous-espace vectoriel de E engendré par S . Alors $\prec$ est une relation de dépendance.

(0.4.4) **Un peu de vocabulaire** Soit E un ensemble muni d'une relation de dépendance $\prec$ et soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

(0.4.4.1) On dit que la famille (e_i) est *libre* si $e_i \not\prec \{e_j\}_{j \neq i}$ pour tout $i \in I$.

(0.4.4.2) On dit que la famille (e_i) est *génératrice* si $x \prec \{e_i\}_{i \in I}$ pour tout $x \in E$.

(0.4.4.3) On dit que la famille (e_i) est une *base* si et seulement si elle est libre et génératrice.

(0.4.4.4) *Exemples.* La famille vide est toujours libre; si $\{e_i\}_{i \in I}$ est égale à E la famille $(e_i)_{i \in I}$ est génératrice. Toute sous-famille d'une famille libre est libre, tout famille contenant une famille génératrice est génératrice.

(0.4.4.5) Lorsque E et $\prec$ sont comme dans l'exemple 0.4.3, on retrouve évidemment la terminologie usuelle de l'algèbre linéaire.

(0.4.5) **Remarque.** Soit E un ensemble muni d'une relation de dépendance $\prec$ et soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre d'éléments de E . Si i et j sont deux indices distincts on a alors $e_i \neq e_j$. En effet dans le cas contraire on aurait $e_i \prec \{e_j\}$ et partant $e_i \prec \{e_\ell\}_{\ell \neq i}$, contredisant ainsi la liberté de la famille (e_i) .

(0.4.6) Soit E un ensemble muni d'une relation de dépendance $\prec$ et soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E ; supposons qu'il existe un ensemble $\mathcal{E}$ de parties de

I totalement ordonné par inclusion, dont la réunion est I tout entier, et tel que $(e_i)_{i \in J}$ soit libre pour tout $J \in \mathcal{E}$; la famille $(e_i)_{i \in I}$ est alors libre. En effet, soit j appartenant à I . Supposons que l'on ait $e_j \prec \{e_i\}_{i \neq j}$. Il existe alors un sous-ensemble fini I' de I tel que $e_j \prec \{e_i\}_{i \in I', i \neq j}$; choisissons un sous-ensemble J de I appartenant à $\mathcal{E}$ et contenant $I' \cup \{j\}$ (il suffit de prendre pour tout $\ell \in I' \cup \{j\}$ un élément J_ℓ de $\mathcal{E}$ contenant ℓ , puis de considérer le plus grand des J_ℓ); on a alors par construction $e_j \prec \{e_i\}_{i \in J, i \neq j}$, ce qui contredit la liberté de $(e_i)_{i \in J}$.

(0.4.7) Lemme. *Soit E un ensemble muni d'une relation de dépendance $\prec$, soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre d'éléments de E , et soit $y \in E$ tel que la famille $(e_i)_{i \in I} \amalg \{y\}$ ne soit pas libre. On a alors $y \prec \{e_i\}_{i \in I}$.*

Démonstration. Comme $(e_i)_{i \in I} \amalg \{y\}$ n'est pas libre, ou bien $y \prec \{e_i\}_{i \in I}$, ou bien il existe $j \in I$ tel que $e_j \prec \{e_i\}_{i \in I, i \neq j} \cup \{y\}$. Supposons que nous soyons dans ce dernier cas. Comme la famille (e_i) est libre, $e_j \not\prec \{e_i\}_{i \in I, i \neq j}$; l'application de l'axiome (4) avec $S = \{e_i\}_{i \in I, i \neq j} \cup \{y\}$ et $x = e_j$ assure alors que $y \prec \{e_i\}_{i \in I}$. $\square$

(0.4.8) Lemme. *Soit E un ensemble muni d'une relation de dépendance $\prec$, soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E , et soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille génératrice de E . Soit J_0 un sous-ensemble de J tel que la famille concaténée $(e_i)_{i \in I} \amalg (f_j)_{j \in J_0}$ soit libre, et maximal pour cette propriété. La famille $(e_i)_{i \in I} \amalg (f_j)_{j \in J_0}$ est alors une base de E .*

Démonstration. La famille $(e_i)_{i \in I} \amalg (f_j)_{j \in J_0}$ est libre par définition; il reste à montrer qu'elle est génératrice. Soit x un élément de E ; il s'agit de prouver que $x \prec (e_i)_{i \in I} \amalg (f_j)_{j \in J_0}$. Puisque la famille $(f_j)_{j \in J}$ est génératrice par hypothèse, on a $x \prec \{f_j\}_{j \in J}$; il suffit alors de montrer que pour tout indice ℓ appartenant à J on a $f_\ell \prec \{e_i\}_{i \in I} \cup \{f_j\}_{j \in J_0}$. C'est évident si $\ell \in J_0$. Supposons maintenant que $\ell \notin J_0$. Par maximalité de J_0 , la famille $(e_i)_{i \in I} \amalg (f_j)_{j \in J_0} \amalg \{f_\ell\}$ n'est pas libre; puisque $(e_i)_{i \in I} \amalg (f_j)_{j \in J_0}$ est libre, le lemme 0.4.7 ci-dessus assure alors que $f_\ell \prec (e_i)_{i \in I} \amalg (f_j)_{j \in J_0}$. $\square$

(0.4.8.1) Corollaire (parfois appelé «théorème de la base incomplète»). *Soit E un ensemble muni d'une relation de dépendance $\prec$, soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E , et soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille génératrice de E . Il existe un sous-ensemble J_0 de J tel que la famille concaténée $(e_i)_{i \in I} \amalg (f_j)_{j \in J_0}$ soit une base de E .*

Démonstration. Il résulte de 0.4.6 et du lemme de Zorn qu'il existe un sous-ensemble J_0 de J tel que la famille concaténée $(e_i)_{i \in I} \amalg (f_j)_{j \in J_0}$ soit libre et qui est maximal pour cette propriété. Le lemme 0.4.8 assure alors que $(e_i)_{i \in I} \amalg (f_j)_{j \in J_0}$ est une base de E . $\square$

(0.4.8.2) Corollaire. *Soit E un ensemble muni d'une relation de dépendance $\prec$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base; toute famille génératrice de E contient une base.*

Démonstration. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E , et soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille génératrice de E . En appliquant le corollaire 0.4.8.1 à la famille libre (e_i) et à la famille génératrice E (que l'on indexe tautologiquement), on voit que (e_i) se prolonge en une base; en l'appliquant à la famille libre vide et à la famille génératrice (f_j) , on voit que (f_j) contient une base.

(0.4.8.3) Corollaire. *L'ensemble E possède une base.*

Démonstration. La famille vide est une famille libre de E , et le corollaire précédent assure qu'elle se prolonge en une base. $\square$

(0.4.9) Lemme d'échange. *Soit E un ensemble muni d'une relation de dépendance $\prec$, soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E , et soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille génératrice de E . Pour tout $a \in I$ il existe $b \in J$ tel que $(e_i)_{i \neq a} \amalg \{f_b\}$ soit encore une base de E .*

Démonstration. Supposons que pour tout $j \in J$ on ait $f_j \prec \{e_i\}_{i \neq a}$; comme $e_a \prec \{f_j\}_{j \in J}$ puisque $\{f_j\}_{j \in J}$ est génératrice on aurait $e_a \prec \{e_i\}_{i \neq a}$, contredisant la liberté de la famille (e_i) . Par conséquent, il existe b tel que $f_b \not\prec \{e_i\}_{i \neq a}$. Nous allons vérifier que f_b convient.

La famille $(e_i)_{i \neq a} \amalg \{f_b\}$ est libre. On sait déjà que $f_b \not\prec \{e_i\}_{i \neq a}$. Soit c un élément de I différent de a . Si l'on avait $e_c \prec \{e_i\}_{i \neq a, i \neq c} \amalg \{f_b\}$ alors comme $e_c \not\prec \{e_i\}_{i \neq a, i \neq c}$ puisque (e_i) est libre, l'axiome (4) entraînerait que $f_b \prec \{e_i\}_{i \neq a}$, ce qui est absurde. Ainsi, $(e_i)_{i \neq a} \amalg \{f_b\}$ est libre.

La famille $(e_i)_{i \neq a} \amalg \{f_b\}$ est génératrice. Soit $x \in E$. Il s'agit de montrer que $x \prec \{e_i\}_{i \neq a} \amalg \{f_b\}$; comme $x \prec \{e_i\}_{i \in I}$ puisque la famille (e_i) est une base de E , il suffit de traiter le cas où $x = e_i$ pour un certain i . C'est clair si $i \neq a$.

Comme $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , on a $f_b \prec \{e_i\}_{i \in I}$; par ailleurs, b a été choisi de sorte que $f_b \not\prec \{e_i\}_{i \neq a}$. Il résulte alors de l'axiome (4) que l'on a $e_a \prec \{e_i\}_{i \neq a} \amalg \{f_b\}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(0.4.10) Théorème. *Soit E un ensemble muni d'une relation de dépendance $\prec$.*

- (A) *Toutes les bases de E ont même cardinal; notons-le N .*
- (B) *Toute famille libre de E est de cardinal $\leq N$; si N est fini, une famille libre de E est une base si et seulement si elle est de cardinal N .*
- (C) *Toute famille génératrice de E est de cardinal $\geq N$; si N est fini, une famille génératrice de E est une base si et seulement si elle est de cardinal N .*

Démonstration. Soient $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_j)_{j \in J}$ deux bases de E , de cardinaux respectifs N et M . Nous allons montrer que $N \leq M$, ce qui permettra de conclure que $N = M$ par symétrie des arguments, et donc de prouver (A). Les assertions (B) et (C) s'ensuivront immédiatement, compte-tenu du fait que toute famille libre est contenue dans une base et que toute famille génératrice contient une base (corollaire 0.4.8.2).

(0.4.10.1) Supposons M fini. Faisons l'hypothèse que $N > M$. On peut alors choisir $M + 1$ indices distincts $i_1, \dots, i_{M+1}$ dans I . Par une application répétée du lemme 0.4.9, on voit qu'il existe $j_1, \dots, j_{M+1}$ dans J tels que $(f_{j_\ell})_{1 \leq \ell \leq M+1} \amalg (e_i)_{i \in I, i \notin \{i_1, \dots, i_{M+1}\}}$ soit une base de E . Mais par non-redondance des familles libres (remarque 0.4.5), ceci implique que $f_{j_1}, \dots, f_{j_{M+1}}$ sont deux à deux distincts, contredisant le fait que J est de cardinal M ; il vient $N \leq M$.

(0.4.10.2) Supposons M infini. Comme (e_i) est une base, elle est génératrice, si bien que $f_j \prec \{e_i\}_{i \in I}$ pour tout $j \in J$. Il existe alors pour tout $j \in J$ un sous-ensemble fini I_j de I tel que $f_j \prec \{e_i\}_{i \in I_j}$. Soit K la réunion des I_j pour j

variable. Comme M est un cardinal infini et comme les I_j sont finis, le cardinal de K est majoré par M . Par construction, $f_j \prec \{e_i\}_{i \in K}$ pour tout j . Soit $x \in E$. Puisque (f_j) est génératrice, on a $x \prec \{f_j\}_{j \in J}$ et partant $x \prec \{e_i\}_{i \in K}$. S'il existait $\ell \in I \setminus K$ on aurait en particulier $e_\ell \prec \{e_i\}_{i \in K}$, contredisant la liberté de (e_i) . Par conséquent $K = I$, d'où il résulte que $N \leq M$. $\square$

Première partie

Les outils de la géométrie algébrique

Chapitre 1

Le langage des catégories

1.1 Définitions et premiers exemples

(1.1.1) **Définition.** Une *catégorie* $\mathbf{C}$ consiste en les données suivantes.

- Une classe d'objets $\text{Ob } \mathbf{C}$.
- Pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathbf{C}$, un ensemble $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés les *morphismes de source X et de but Y* , ou encore les *morphismes de X vers Y* .
- Pour tout $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$, un élément Id_X de $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X)$.
- Pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathbf{C}$, une application

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f.$$

Ces données sont sujettes aux deux axiomes suivants.

◊ *Associativité* : on a $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ pour tout triplet (f, g, h) de morphismes tels que ces compositions aient un sens.

◊ *Neutralité des identités* : pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathbf{C}$ et tout morphisme f de X vers Y , on a $f \circ \text{Id}_X = \text{Id}_Y \circ f = f$.

(1.1.2) **Commentaires.** La définition ci-dessus est un peu vague : nous n'avons pas précisé ce que signifie «classe» – ce n'est pas une notion usuelle de théorie des ensembles. Cette imprécision est volontaire : dans le cadre de ce cours, il ne nous a pas paru souhaitable d'entrer dans le détail des problèmes de fondements de la théorie des catégories. Mais il est possible de développer celle-ci rigoureusement, de plusieurs façons différentes :

- on peut travailler avec une variante de la théorie des ensembles dans laquelle la notion de classe a un sens (une classe pouvant très bien ne pas être un ensemble) ;

- on peut imposer à $\text{Ob } \mathbf{C}$ d'être un ensemble.

Comme on le verra, c'est plutôt la première approche que nous suivrons implicitement : dans les exemples que nous donnons ci-dessous, $\text{Ob } \mathbf{C}$ n'est en général pas un ensemble.

Pour suivre la deuxième, il faudrait modifier la définition de toutes nos catégories en ne gardant que les objets qui appartiennent à un certain ensemble fixé au préalable, et absolument gigantesque : il doit être assez gros pour qu'on

puisse y réaliser toutes les constructions du cours. C'est ce que Grothendieck et son école ont fait dans SGA IV (parce que certaines questions abordées dans cet ouvrage requièrent de manière *impérative* de rester dans le cadre ensembliste traditionnel) ; ils qualifient ce type d'ensembles gigantesques d'*univers*.

(1.1.3) Exemples de catégories.

(1.1.3.1) Commençons par des exemples classiques, qui mettent en jeu de «vrais» objets et de «vrais» morphismes.

- La catégorie **Ens** : ses objets sont les ensembles, et ses morphismes les applications.
- La catégorie **Gp** : ses objets sont les groupes, et ses morphismes les morphismes de groupes.
- La catégorie **Ab** : ses objets sont les groupes *abéliens*, et ses morphismes les morphismes de groupes.
- La catégorie **Ann** : ses objets sont les anneaux, et ses morphismes les morphismes d'anneaux.
- La catégorie **$A\text{-Mod}$** , où A est un anneau : ses objets sont les A -modules, et ses morphismes les applications A -linéaires.
- La catégorie **Top** : ses objets sont les espaces topologiques, et ses morphismes sont les applications continues.

(1.1.3.2) Partant d'une catégorie, on peut en définir d'autres par un certain nombre de procédés standard.

- Commençons par un exemple abstrait. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit S un objet de $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{C}/S$ la catégorie définie comme suit.
 - ◊ Ses objets sont les couples (X, f) où X est un objet de $\mathcal{C}$ et où $f : X \rightarrow S$ est un morphisme.
 - ◊ Un morphisme de (X, f) vers (Y, g) est un morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & S & \end{array}$$

commute.

- La construction duale existe : on peut définir $S \backslash \mathcal{C}$ comme la catégorie dont les objets sont les couples (X, f) où X est un objet de $\mathcal{C}$ et où $f : S \rightarrow X$ est un morphisme, et dont les flèches sont définies comme le lecteur imagine (ou devrait imaginer).
- Donnons deux exemples explicites de catégories de la forme $S \backslash \mathcal{C}$.
 - ◊ Si $\mathcal{C} = \mathbf{Ann}$ et si $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ alors $A \backslash \mathcal{C}$ n'est autre que la catégorie $A\text{-Alg}$ des A -algèbres.
 - ◊ Si $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ et si $S = \{*\}$ la catégorie $S \backslash \mathcal{C}$ est appelée catégorie des *espaces topologiques pointés* et sera notée **TopPt**. Comme se donner une application continue de $\{*\}$ dans un espace topologique X revient à choisir un point de X , la catégorie **TopPt** peut se décrire comme suit :
 - ses objets sont les couples (X, x) où X est un espace topologique et où $x \in X$ (d'où son nom) ;

- un morphisme d'espaces topologiques pointés de (X, x) vers (Y, y) est une application continue $\varphi : X \rightarrow Y$ telle que $\varphi(x) = y$.

(1.1.3.3) On peut aussi, partant d'une catégorie, conserver ses objets mais ne plus considérer ses morphismes que modulo une certaine relation d'équivalence. Nous n'allons pas détailler le formalisme général, mais simplement illustrer ce procédé par un exemple. Si X et Y sont deux espaces topologiques et si f et g sont deux applications continues de X vers Y , on dit qu'elles sont *homotopes* s'il existe une application h continue de $[0; 1] \times X$ vers Y telle que $h(0, \cdot) = f$ et $h(1, \cdot) = g$; on définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues de X vers Y .

On construit alors la catégorie $\mathbf{Top}/h$ des *espaces topologiques à homotopie près* comme suit : ses objets sont les espaces topologiques; et si X et Y sont deux espaces topologiques, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}/h}(X, Y)$ est le quotient de l'ensemble des applications continues de X vers Y par la relation d'homotopie (les morphismes de X vers Y dans $\mathbf{Top}/h$ ne sont donc plus tout à fait de «vrais» morphismes).

On peut combiner cette construction avec celle des espaces topologiques pointés, et obtenir ainsi la catégorie $\mathbf{TopPt}/h$ des *espaces topologiques pointés à homotopie près* : ses objets sont les espaces topologiques pointés; et si (X, x) et (Y, y) sont deux espaces topologiques pointés, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{TopPt}/h}(X, Y)$ est le quotient de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{TopPt}}((X, x), (Y, y))$ par la relation d'homotopie, qui est définie dans ce contexte exactement comme ci-dessus avec la condition supplémentaire $h(t, x) = y$ pour tout t .

(1.1.3.4) On peut également construire des catégories par décret, sans chercher à donner une interprétation tangible des objets et morphismes; donnons quelques exemples.

- Soit G un groupe. On lui associe traditionnellement deux catégories :
 - ◊ la catégorie BG ayant un seul objet $*$ avec $\mathrm{Hom}(*, *) = G$ (la composition est définie comme étant égale à la loi interne de G)
 - ◊ la catégorie $\widetilde{BG}$ telle que $\mathrm{Ob} \widetilde{BG} = G$ et telle qu'il y ait un et un seul morphisme entre deux objets donnés de $\widetilde{BG}$.
- Soit k un corps. On définit comme suit la catégorie $\mathbb{V}_k$.
 - ◊ $\mathrm{Ob} \mathbb{V}_k = \mathbb{N}$.
 - ◊ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}_k}(m, n) = M_{n,m}(k)$ pour tout (m, n) , la composition de deux morphismes étant définie comme égale au produit des deux matrices correspondantes.

(1.1.3.5) Catégorie opposée. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie, on définit sa catégorie *opposée* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ comme suit : $\mathrm{Ob} \mathbf{C}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ob} \mathbf{C}$, et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X)$ pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathbf{C}$.

(1.1.4) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soient X et Y deux objets de $\mathbf{C}$.

(1.1.4.1) Un *endomorphisme* de X est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X)$.

(1.1.4.2) On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g : Y \rightarrow X$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. On vérifie immédiatement que si un tel g existe, il est unique; et on le note alors en général f^{-1} .

Un *automorphisme* de X est un isomorphisme de X vers X .

(1.1.4.3) Il arrivera souvent que l'on emploie le terme *flèche* au lieu de morphisme.

1.2 Foncteurs

(1.2.1) **Définition.** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur* F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est la donnée :

- pour tout $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$;
- pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, d'un morphisme

$$F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$$

de $\mathcal{D}$.

On impose de plus les propriétés suivantes :

- $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$ pour tout $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$;
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pour tout couple (f, g) de flèches composables de $\mathcal{C}$.

(1.2.2) **Commentaires.**

(1.2.2.1) Soit F un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ et soit $f : X \rightarrow Y$ un isomorphisme entre objets de $\mathcal{C}$. On a $f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$ et $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$; il vient

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = \text{Id}_{F(Y)} \text{ et } F(f^{-1}) \circ F(f) = \text{Id}_{F(X)}.$$

Ainsi $F(f)$ est un isomorphisme et $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$.

(1.2.2.2) La notion définie au 1.2.1 est en fait la notion de foncteur *covariant*. Il existe une notion de foncteur *contravariant* ; la définition est la même, à ceci près que si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ alors $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$ (en termes imagés, F renverse le sens des flèches), et que $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ pour tout couple (f, g) de flèches composables.

(1.2.2.3) La plupart des résultats et notions que nous présenterons ci-dessous seront relatifs aux foncteurs *covariants*, mais ils se transposent *mutatis mutandis* au cadre des foncteurs *contravariants* (nous laisserons ce soin au lecteur, et utiliserons librement à l'occasion ces transpositions) : il suffit de renverser certaines flèches et/ou l'ordre de certaines compositions.

Cette assertion peut paraître imprécise, mais on peut lui donner un sens rigoureux – et la justifier – en remarquant qu'un foncteur *contravariant* de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ n'est autre, par définition, qu'un foncteur *covariant* de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ vers $\mathcal{D}$, ou de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}^{\text{op}}$. (Ces deux points de vue sont équivalents en théorie ; en pratique, ils ne le sont pas sur le plan psychologique : l'expérience montre qu'il est le plus souvent moins perturbant de changer le sens des flèches dans la catégorie de départ que dans celle d'arrivée, notamment lorsqu'on s'intéresse aux morphismes de foncteurs – voire 1.3.1 ci-dessous ; et l'on verra donc en général un foncteur *contravariant* de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ comme un foncteur *covariant* de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ vers $\mathcal{D}$.)

(1.2.3) **Exemples.**

(1.2.3.1) Sur toute catégorie $\mathcal{C}$ on dispose d'un foncteur identité $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ défini par les égalités $\text{Id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ et $\text{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ pour tout objet X et toute flèche f de $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont trois catégories, si F est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ et si G est un foncteur de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{E}$ on définit de façon évidente le foncteur composé

$$G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}.$$

La composition des foncteurs est associative, et les foncteurs identité sont neutres pour celle-ci.

Le composé de deux foncteurs de même variance est covariant, celui de deux foncteurs de variances opposées est contravariant.

(1.2.3.2) Les foncteurs d'oubli. Ce sont des foncteurs covariants dont l'application revient, comment leur nom l'indique, à oublier certaines des structures en jeu.

Par exemple, on dispose d'un foncteur d'oubli de $\mathbf{Gp}$ vers $\mathbf{Ens}$: il associe à un groupe l'ensemble sous-jacent, et à un morphisme de groupes l'application ensembliste sous-jacente. On dispose de même d'un foncteur d'oubli de $\mathbf{Ann}$ vers $\mathbf{Ens}$, de $\mathbf{Top}$ vers $\mathbf{Ens}$... ou encore, un anneau commutatif unitaire A étant donné, de $A\text{-Mod}$ vers $\mathbf{Ab}$ (on n'oublie alors qu'une partie de la structure).

(1.2.3.3) Les deux foncteurs associés à un objet. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit X un objet de $\mathcal{C}$. On lui associe naturellement deux foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathbf{Ens}$:

- Le foncteur covariant h_X , qui envoie un objet Y sur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et une flèche $f : Y \rightarrow Y'$ sur l'application $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y'), g \mapsto f \circ g$.
- Le foncteur contravariant h^X , qui envoie un objet Y sur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ et une flèche $f : Y \rightarrow Y'$ sur l'application $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X), g \mapsto g \circ f$.

(1.2.3.4) Soit A un anneau commutatif unitaire. En appliquant la construction du 1.2.3.3 ci-dessus à l'objet A de $A\text{-Mod}$, on obtient un foncteur contravariant $h^A : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie M sur $\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, A)$.

En fait, $\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, A)$ n'est pas un simple ensemble : il possède une structure naturelle de A -module, et la formule $M \mapsto \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, A)$ définit un foncteur contravariant de $A\text{-Mod}$ dans elle-même, souvent noté $M \mapsto M^\vee$ (en termes pédants, le foncteur h^A ci-dessus est la composée de $M \mapsto M^\vee$ avec le foncteur oubli de $A\text{-Mod}$ vers $\mathbf{Ens}$).

(1.2.3.5) Le groupe fondamental. On définit en topologie algébrique un foncteur $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$, qui va de la catégorie $\mathbf{TopPt}$ vers celle des groupes (on appelle $\pi_1(X, x)$ le *groupe fondamental* de (X, x)). Par construction, deux applications continues homotopes entre espaces topologiques pointés induisent le même morphisme entre les groupes fondamentaux ; autrement dit, on peut voir $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$ comme un foncteur de $\mathbf{TopPt}/h$ vers $\mathbf{Ens}$.

(1.2.3.6) Nous allons décrire deux foncteurs mettant en jeu les catégories un peu artificielles du 1.1.3.4.

- Soit G un groupe. On définit comme suit un foncteur covariant de $\widetilde{BG}$ vers BG : il envoie n'importe quel élément de G sur $*$, et l'unique flèche de source g et de but h sur hg^{-1} .
- On définit comme suit un foncteur covariant de $\mathbb{V}_k$ dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur k : il envoie n sur k^n , et il envoie une matrice M sur l'application linéaire de matrice M dans les bases canoniques.

(1.2.4) Définition. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, et soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur covariant. On dit que F est *fidèle* (resp. *plein*, resp. *pleinement fidèle*) si pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, l'application $f \mapsto F(f)$ de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ vers $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ est injective (resp. surjective, resp. bijective).

(1.2.5) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur pleinement fidèle. Soit $f : X \rightarrow Y$ une flèche de $\mathcal{C}$ telle que $F(f)$ soit un isomorphisme. La flèche f est alors un isomorphisme. En effet, comme le foncteur F est plein il existe $g : Y \rightarrow X$ tel que $F(g) = F(f)^{-1}$; on a alors

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(f)^{-1} = \text{Id}_{F(Y)}$$

et

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = F(f)^{-1} \circ F(f) = \text{Id}_{F(X)}.$$

Par fidélité de F il vient

$$f \circ g = \text{Id}_Y \text{ et } g \circ f = \text{Id}_X,$$

d'où notre assertion.

(1.2.6) Définition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une *sous-catégorie* de $\mathcal{C}$ est une catégorie $\mathcal{D}$ telle que $\text{Ob } \mathcal{D} \subset \text{Ob } \mathcal{C}$ et telle que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{D}$.

Elle est dite *pleine* si $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{D}$.

(1.2.7) Exemples.

(1.2.7.1) La catégorie $\mathbf{Ab}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Gp}$.

(1.2.7.2) Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les espaces métriques, et les flèches les applications continues. Soit $\mathcal{D}$ la catégorie dont les objets sont les espaces métriques complets, et dont les flèches sont les isométries. La catégorie $\mathcal{D}$ est alors une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, qui n'est pas pleine (par exemple, la multiplication par $\frac{1}{2}$ de $[0; 1]$ dans lui-même est continue mais n'est pas une isométrie).

(1.2.8) Si $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}$, on dispose d'un foncteur covariant naturel d'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. Par définition, il est fidèle et pleinement fidèle si et seulement si $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$.

1.3 Morphismes de foncteurs et équivalences de catégories

(1.3.1) Définition. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et soient F et $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants. Un *morphisme* (ou *transformation naturelle*) φ de F vers G est la donnée, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un morphisme

$$\varphi(X) : F(X) \rightarrow G(X)$$

de la catégorie $\mathbf{D}$, de sorte que pour toute flèche $f : X \rightarrow Y$ de $\mathbf{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & G(Y) \end{array}$$

commute.

(1.3.1.1) On résume parfois ces conditions en disant simplement qu'un morphisme de F vers G est la donnée pour tout X d'un morphisme de $F(X)$ dans $G(X)$ qui est *fonctoriel en X* .

(1.3.1.2) L'identité Id_F du foncteur F est le morphisme de F dans lui-même induit par la collections des $\text{Id}_{F(X)}$ où X parcourt $\text{Ob } \mathbf{C}$; les morphismes de foncteurs se composent de façon évidente. Attention toutefois : on ne peut pas dire que les foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$ constituent eux-mêmes une catégorie, car rien n'indique *a priori* que les morphismes entre deux tels foncteurs (qui mettent en jeu une collection de données paramétrée par $\text{Ob } \mathbf{C}$) forment un ensemble.

(1.3.2) Exemples.

(1.3.2.1) Soit A un anneau commutatif unitaire. Pour tout A -module M , on dispose d'une application naturelle $\iota(M) : M \rightarrow M^{\vee\vee}$ définie par la formule

$$m \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(m)).$$

La collection des $\iota(M)$ pour M variable définit un morphisme ι du foncteur $\text{Id}_{A\text{-Mod}}$ vers le foncteur $M \mapsto M^{\vee\vee}$ de $A\text{-Mod}$ dans elle-même (notons que ce dernier foncteur est bien covariant, en tant que composée de deux foncteurs contravariants).

(1.3.2.2) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie, soient X et Y deux objets de $\mathbf{C}$ et soit f un morphisme de X vers Y . Pour tout $Z \in \text{Ob } \mathbf{C}$, on dispose de deux applications naturelles fonctorielles en Z

$$\text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z), g \mapsto g \circ f \quad \text{et} \quad \text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Z, Y), g \mapsto f \circ g,$$

qui constituent deux morphismes de foncteurs $f^* : h_Y \rightarrow h_X$ et $f_* : h^X \rightarrow h^Y$.

On vérifie aisément qu'on a les égalités $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ à chaque fois qu'elles ont un sens. On a aussi $(\text{Id}_X)^* = \text{Id}_{h_X}$ et $(\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{h^X}$.

(1.3.3) Définition. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories et soient F et G deux foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$. On dit qu'un morphisme $\varphi : F \rightarrow G$ est un *isomorphisme* s'il existe $\psi : G \rightarrow F$ tel que $\psi \circ \varphi = \text{Id}_F$ et $\varphi \circ \psi = \text{Id}_G$. Un tel ψ est dans ce cas unique, et est noté φ^{-1} .

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que φ est un isomorphisme si et seulement si $\varphi(X)$ est un isomorphisme pour tout $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$, et l'on a alors $\varphi^{-1}(X) = \varphi(X)^{-1}$ pour tout tel X .

(1.3.4) Exemple : la bidualité. Soit A un anneau commutatif unitaire, et soit $\mathbf{C}$ la sous-catégorie pleine de $A\text{-Mod}$ constituée des modules libres de rang

fini (*i.e.* qui possèdent une base finie, ou encore qui sont isomorphes à A^n pour un certain n). Si $M \in \text{Ob } \mathbf{C}$ alors $M^{\vee\vee} \in \text{Ob } \mathbf{C}$, et le morphisme ι du 1.3.2.1 ci-dessus induit un *isomorphisme* entre le foncteur $\text{Id}_{\mathbf{C}}$ et le foncteur $M \mapsto M^{\vee\vee}$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

Cette assertion est simplement l'énoncé rigoureux traduisant le fait q'un module libre de rang fini est *canoniquement* isomorphe à son bidual.

(1.3.5) Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories, et soient F et G deux foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$. On dit que F et G sont *isomorphes*, et l'on écrit $F \simeq G$, s'il existe un isomorphisme de foncteurs de F vers G .

Supposons que ce soit le cas. Le foncteur F est alors plein (resp. fidèle, resp. pleinement fidèle) si et seulement si c'est le cas de G . En effet, fixons un isomorphisme $\iota: F \simeq G$, et soient X et Y deux objets de $\mathbf{C}$.

Désignons par λ (resp. μ) l'application $f \mapsto F(f)$ (resp. $f \mapsto G(f)$) de $\text{Hom}(X, Y)$ vers $\text{Hom}(F(X), F(Y))$ (resp. vers $\text{Hom}(G(X), G(Y))$).

On a pour tout $f \in \text{Hom}(X, Y)$ un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \iota(X) \downarrow & & \downarrow \iota(Y) \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

d'où l'on déduit les égalités

$$G(f) = \iota(Y) \circ F(f) \circ \iota(X)^{-1} \text{ et } F(f) = \iota(Y)^{-1} \circ G(f) \circ \iota(X).$$

Soit A l'application $u \mapsto \iota(Y) \circ u \circ \iota(X)^{-1}$ de $\text{Hom}(F(X), F(Y))$ vers $\text{Hom}(G(X), G(Y))$. Elle est bijective de réciproque $v \mapsto \iota(Y)^{-1} \circ v \circ \iota(X)$, et il découle de ce qui précède que $\mu = A \circ \lambda$ et $\lambda = A^{-1} \circ \mu$. En conséquence, λ est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si c'est le cas de μ , ce qu'il fallait démontrer.

(1.3.6) Au sein d'une catégorie donnée, les isomorphismes ont pour l'essentiel deux vertus.

(1.3.6.1) Savoir *qu'il existe* un isomorphisme entre deux objets X et Y garantit le transfert de certaines propriétés de l'un à l'autre – si l'on établit une telle propriété pour X , elle vaut automatiquement pour Y . Par exemple, si un groupe fini G de cardinal n est cyclique, c'est-à-dire isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors pour tout diviseur d de n le groupe G a un et un seul sous-groupe de cardinal d , puisque c'est le cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et que cette assertion est préservée par isomorphisme.

(1.3.6.2) La *donnée* d'un isomorphisme entre deux objets X et Y permet de les identifier, c'est-à-dire (disons dans le cas où, pour simplifier, $\mathbf{C}$ est constituée d'ensembles munis de structures supplémentaires, comme les groupes, les anneaux, les espaces topologiques...) de *penser* si besoin est aux éléments de X comme à des éléments de Y . Ainsi, si V est un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps k , le choix d'une base de V , c'est-à-dire d'un isomorphisme entre V et k^n , permet de penser aux éléments de V comme à des n -uplets, ce qui offre un certain nombre d'avantages calculatoires.

(1.3.7) Il est dès lors naturel de chercher un analogue catégorique de la notion d'isomorphisme, qui permette et de transférer automatiquement certaines propriétés d'une catégorie à une autre, et de penser si nécessaire à un objet d'une catégorie C comme à un objet d'une autre catégorie D – ce qui peut être particulièrement intéressant si C et D sont *a priori* très différentes, et si cette opération s'apparente donc à un changement radical de point de vue.

(1.3.8) **Une première tentative : la notion d'isomorphisme de catégories.** Soient C et D deux catégories. Un foncteur $F : C \rightarrow D$ est appelé un *isomorphisme* de catégories s'il possède un inverse, c'est-à-dire un foncteur $G : D \rightarrow C$ tel que $F \circ G$ et $G \circ F$ soient respectivement égaux à Id_D et Id_C . Un tel G est unique s'il existe.

Nous allons donner deux exemples ; le premier est trivial (et n'apporte rien), le second est nettement plus intéressant.

(1.3.8.1) Si C est une catégorie alors Id_C est un isomorphisme de catégories.

(1.3.8.2) Soit A un anneau commutatif unitaire. Soit C la catégorie des $A[T]$ -modules, et soit D la catégorie dont les objets sont les couples (M, u) où M est un A -module et u un endomorphisme de M , et où un morphisme de (M, u) vers (N, v) est une application A -linéaire $f : M \rightarrow N$ telle que $v \circ f = f \circ u$. Soit F le foncteur qui envoie un $A[T]$ -module M sur le A -module sous-jacent à M muni de $m \mapsto Tm$; soit G le foncteur qui envoie un couple (M, u) sur le $A[T]$ -module de groupe additif sous-jacent $(M, +)$ et de loi externe $(P, m) \mapsto P(u)(m)$. Le foncteur F induit alors un isomorphisme entre les catégories C et D , et G est son inverse.

(1.3.8.3) *Commentaires sur l'exemple 1.3.8.2 ci-dessus.* Il s'avère particulièrement fécond lorsque A est un corps. Il permet alors de penser à un A -espace vectoriel muni d'un endomorphisme comme à un module sur l'anneau principal $A[T]$, et transforme certaines questions subtiles (la classification des endomorphismes à similitude près, l'étude du commutant d'un endomorphisme...) en des problèmes d'allure plus familière (classification des modules à isomorphisme près, étude des endomorphismes d'un module). Bien entendu, cette simplification est en un sens illusoire : la difficulté n'a pas disparu comme par miracle, elle se niche maintenant dans le fait que l'anneau de base $A[T]$ est plus compliqué qu'un corps. Mais l'expérience montre qu'elle est plus aisée à affronter sous cette forme.

(1.3.9) Les isomorphismes de catégories peuvent donc être utiles, mais présentent l'inconvénient d'être extrêmement rares. On a en conséquence été conduit à introduire une notion un peu plus faible, mais qui rend en pratique les mêmes services et a l'avantage de se rencontrer beaucoup plus fréquemment : c'est celle d'*équivalence de catégories*.

(1.3.10) **Définitions.** Soient C et D deux catégories, et soit F un foncteur de C vers D .

(1.3.10.1) Un *quasi-inverse* de F est un foncteur $G : D \rightarrow C$ tel que $F \circ G \simeq \text{Id}_D$ et $G \circ F \simeq \text{Id}_C$.

(1.3.10.2) On dit que F est une *équivalence de catégories* s'il admet un quasi-inverse.

(1.3.10.3) Il résulte immédiatement des définitions que si G est un quasi-inverse de F alors F est un quasi-inverse de G , et que la composée de deux équivalences de catégories est une équivalence de catégories.

(1.3.10.4) Si G et H sont deux quasi-inverses de F ils sont isomorphes *via* la composition d'isomorphismes

$$G = G \circ \text{Id}_D \simeq G \circ (F \circ H) = (G \circ F) \circ H \simeq \text{Id}_C \circ H = H.$$

(1.3.10.5) On appelle *image essentielle* de F la sous-catégorie pleine de D constituée des objets Y tels qu'il existe un objet X de C et un isomorphisme entre $F(X)$ et Y ; on dit que F est *essentiellement surjectif* si son image essentielle est égale à C .

(1.3.11) **Lemme.** Soient C et D deux catégories et soient $F : C \rightarrow D$ un foncteur. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) le foncteur F est une équivalence de catégories ;
- ii) le foncteur F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Démonstration. On procède par double implication.

(1.3.11.1) *Supposons que F est une équivalence de catégories.* On fixe un quasi-inverse G de F . Soient X et Y deux objets de C .

Comme Id_C est fidèle, $G \circ F \simeq \text{Id}_C$ est fidèle d'après 1.3.5. Cela signifie que $f \mapsto G(F(f))$ est injectif, ce qui entraîne que $f \mapsto F(f)$ est injectif; ainsi, F est fidèle.

Comme Id_D est fidèle, $F \circ G \simeq \text{Id}_D$ est plein d'après 1.3.5. Cela signifie que $f \mapsto F(G(f))$ est surjectif, ce qui entraîne que $f \mapsto F(f)$ est surjectif; ainsi, F est plein, et finalement pleinement fidèle.

Par ailleurs, soit Y un objet de D et soit ι un isomorphisme $F \circ G \simeq \text{Id}_D$. La flèche $\iota(Y)$ est alors un isomorphisme de $F(G(Y))$ sur Y ; l'objet Y est donc isomorphe à $F(G(Y))$ est appartient dès lors à l'image essentielle de F . Ce dernier est en conséquence essentiellement surjectif, ce qui achève de montrer que i) $\Rightarrow$ ii).

(1.3.11.2) *Supposons que F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.* Pour tout objet Y de D , il existe par hypothèse un objet X de C tel que $F(X)$ soit isomorphe à Y . On choisit¹ un tel objet que l'on note $G(Y)$, ainsi qu'un isomorphisme $\iota(Y) : F(G(Y)) \simeq Y$.

Soient Y et Z deux objets de D et soit f un morphisme de Y vers Z . Il existe un unique morphisme $g : F(G(Y)) \rightarrow F(G(Z))$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(G(Y)) & \xrightarrow{g} & F(G(Z)) \\ \iota(Y) \downarrow & & \downarrow \iota(Z) \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

(à savoir $\iota(Z)^{-1} \circ f \circ \iota(Y)$). Puisque F est pleinement fidèle, il existe un unique morphisme h de $G(Y)$ vers $G(Z)$ tel que $F(h) = g$; on pose alors $G(f) = h$.

1. Cette opération requiert une forme redoutablement puissante d'axiome du choix, puisque les objets de D ne constituent pas *a priori* un ensemble.

On vérifie immédiatement que les formules

$$Y \mapsto G(Y) \text{ et } f \mapsto G(f)$$

définissent un foncteur de $\mathbf{D}$ vers $\mathbf{C}$. Nous allons montrer que c'est un quasi-inverse de F , ce qui permettra de conclure.

Par construction, la collection des isomorphismes $\iota(Y)$ définit un isomorphisme de foncteurs $F \circ G \simeq \text{Id}_{\mathbf{D}}$.

Soit maintenant X un objet de $\mathbf{C}$. L'isomorphisme de foncteurs ι fournit en particulier un isomorphisme

$$\iota_{F(X)}: F(G(F(X))) \simeq F(X).$$

Par pleine fidélité de F , il existe un unique morphisme $v(X)$ de $G(F(X))$ vers X tel que $F(v(X)) = \iota_{F(X)}$, et $v(X)$ est un isomorphisme d'après 1.2.5.

Nous laissons au lecteur le soin de s'assurer que la collection des $v(X)$ définit, pour X variable, un isomorphisme $G \circ F \simeq \text{Id}_X$. Par conséquent, G est un quasi-inverse de F , comme annoncé. $\square$

(1.3.11.3) Corollaire. *Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories. Un foncteur de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$ est pleinement fidèle si et seulement si il induit une équivalence de catégories de $\mathbf{C}$ sur son image essentielle.* $\square$

(1.3.12) Exemples d'équivalences de catégories.

(1.3.12.1) L'inverse d'un foncteur en est en particulier un quasi-inverse; les isomorphismes de catégories sont donc des cas particuliers d'équivalences de catégories.

(1.3.12.2) Soit k un corps. On a défini au 1.2.3.6 un foncteur covariant de la catégorie $\mathbb{V}_k$ (1.1.3.4) vers celle des espaces vectoriels de dimension finie sur k . *Ce foncteur est une équivalence de catégories.*

Pour le voir, on peut utiliser le critère fourni par le lemme 1.3.11. Le foncteur considéré est en effet essentiellement surjectif car tout espace vectoriel admet une base, et il est pleinement fidèle en vertu de la description matricielle des applications linéaires de k^n vers k^m .

On peut en fait en donner un quasi-inverse explicite – en déclinant essentiellement la démonstration du lemme 1.3.11 dans ce cas particulier. On commence par choisir pour tout k -espace vectoriel E de dimension finie une base $b(E)$ de E . Le quasi-inverse évoqué envoie alors un k -espace vectoriel E de dimension finie sur $\dim E$, et une application linéaire $f: E \rightarrow F$ entre deux tels espaces sur $\text{Mat}_{b(E), b(F)} f$.

(1.3.12.3) La théorie des revêtements Nous allons maintenant indiquer (sans la moindre démonstration) comment la théorie qui relie lacets tracés sur un espace topologique et revêtements de ce dernier peut être reformulée en termes d'équivalence de catégories.

On se donne donc un espace topologique pointé (X, x) . La catégorie des $\pi_1(X, x)$ -ensembles est celle dont les objets sont les ensembles munis d'une action à droite de $\pi_1(X, x)$, et les flèches les applications $\pi_1(X, x)$ -équivariantes.

On suppose que X est connexe, et qu'il est par ailleurs semi-localement simplement connexe².

Un *revêtement* de X est un espace topologique Y muni d'une application continue $f : Y \rightarrow X$ tel que tout point de X possède un voisinage ouvert U pour lequel il existe un ensemble discret E_U et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{\simeq} & E_U \times U \\ \downarrow & \swarrow & \\ U & & \end{array} .$$

Un morphisme entre deux revêtements $(Y \rightarrow X)$ et $(Z \rightarrow X)$ est une application continue $Y \rightarrow Z$ telle que

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & Z \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

commute.

Si Y est un revêtement de X , sa fibre Y_x en x hérite d'une action naturelle de $\pi_1(X, x)$ à droite (un lacet ℓ et un point y de Y_x étant donnés, on relève ℓ en partant de y ; à l'arrivée, on ne retombe pas nécessairement sur ses pieds : on atteint un antécédent z de x qui en général diffère de y , et l'on pose $y.\ell = z$).

Le lien entre lacets et revêtements peut alors s'exprimer ainsi : le foncteur $Y \mapsto Y_x$ établit une équivalence entre la catégorie des revêtements de X et celle des $\pi_1(X, x)$ -ensembles.

Description d'un quasi-inverse. On choisit un revêtement universel $\tilde{X}$ de X (c'est-à-dire un revêtement de X connexe, non vide et simplement connexe). Le foncteur qui envoie un $\pi_1(X, x)$ -ensemble E sur le produit contracté

$$\tilde{X} \times^{\pi_1(X, x)} E := \tilde{X} \times E / ((y.\ell, e) \sim (y, e.\ell))$$

est alors un quasi-inverse de $Y \mapsto Y_x$.

(1.3.12.4) Remarque. La théorie de Galois admet également une description en termes d'équivalence de catégories qui dépasse largement le cadre de ce livre mais ressemble beaucoup à celle donnée au 1.3.12.3 ci-dessus.

(1.3.12.5) La transformation de Gelfand. Soit **Comp** la sous-catégorie pleine de **Top** formée des espaces topologiques compacts. Soit X un espace topologique compact. L'algèbre $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative de Banach (pour la norme $f \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)|$) ; elle possède une involution $f \mapsto \bar{f}$ qui prolonge la conjugaison complexe, et l'on a par construction $\|f\| = \sqrt{\|f\bar{f}\|}$ pour tout f .

Soit **C** la catégorie définie comme suit.

2. Bourbaki propose de remplacer cette expression peu engageante par *délaçable*.

• Un objet de $\mathbf{C}$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach commutative A munie d'une involution $a \mapsto \bar{a}$ prolongeant la conjugaison complexe et telle que $\|a\| = \sqrt{\|a\bar{a}\|}$ pour tout $a \in A$.

• Si A et B sont deux objets de $\mathbf{C}$ un morphisme de A dans B est un morphisme d'algèbres $f : A \rightarrow B$ tel que $\|f(a)\| \leq \|a\|$ et $f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$ pour tout $a \in A$.

Il est immédiat que $\mathcal{C} : X \mapsto \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$ définit un foncteur contravariant de $\mathbf{Comp}$ vers $\mathbf{C}$.

On démontre en analyse fonctionnelle (théorie de Gelfand) que le foncteur $\mathcal{C}$ est anti-équivalence de catégories («anti» signifiant simplement qu'il est contravariant).

Décrivons partiellement un quasi-inverse Sp (le «spectre») de $\mathcal{C}$. Si A est un objet de $\mathbf{C}$, l'ensemble sous-jacent à l'espace topologique compact $\mathrm{Sp} A$ est l'ensemble des idéaux maximaux de A (nous ne précisons pas ici la construction de la topologie de $\mathrm{Sp} A$).

Remarque. Un point d'un espace topologique X définit bien un idéal maximal de l'algèbre $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$, à savoir l'ensemble des fonctions qui s'y annulent ; vous pouvez à titre d'exercice vérifier que si X est compact, on obtient ainsi une bijection entre X et l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$.

(1.3.13) Commentaires. Dans les deux exemples détaillés en 1.3.12.3 et 1.3.12.5, on voit bien comment une équivalence de catégories permet de changer radicalement le point de vue sur un objet : ils assurent en effet qu'on peut en un sens penser à un revêtement topologique comme à un π_1 -ensemble, et à un espace topologique compact comme à une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach. L'expérience a montré la fécondité de cette gymnastique mentale.

1.4 Foncteurs représentables et lemme de Yoneda

(1.4.1) Définition. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Un foncteur covariant de $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est dit *représentable* s'il existe $X \in \mathrm{Ob} \mathbf{C}$ et un isomorphisme $h_X \simeq F$.

(1.4.2) Exemples. Dans ce qui suit, les anneaux et algèbres sont commutatifs et unitaires, et les morphismes d'anneaux ou algèbres sont unitaires.

(1.4.2.1) Soit A un anneau et soit P une partie de A . Le foncteur F qui envoie un anneau B sur l'ensemble des morphismes de A dans B s'annulant sur les éléments de P est représentable : en effet, si π désigne l'application quotient $A \rightarrow A/\langle P \rangle$, alors $f \mapsto f \circ \pi$ établit une bijection, fonctorielle en B , entre $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(A/\langle P \rangle, B)$ et $F(B)$.

(1.4.2.2) Nous allons donner une présentation un peu différente de l'exemple 1.4.2.1 ci-dessus, dont nous conservons les notation A et P . Soit Φ le foncteur qui envoie une A -algèbre $(B, f : A \rightarrow B)$ sur un singleton $\{*\}$ si P est contenu dans $\mathrm{Ker} f$ et sur $\emptyset$ sinon ; il est représentable. En effet, soit $(B, f : A \rightarrow B)$ une A -algèbre. Le morphisme f admet une factorisation par $A \mapsto A/\langle P \rangle$ si et seulement si $P \subset \mathrm{Ker} f$, et si c'est le cas cette factorisation

est unique ; nous la noterons $\bar{f}$. On peut reformuler cette assertion en disant que l'ensemble des morphismes de A -algèbres de $A/\langle P \rangle$ dans B est le singleton $\{\bar{f}\}$ si $P \subset \text{Ker } f$, et est vide sinon. On dispose dès lors d'une bijection, fonctorielle en B , entre $\text{Hom}_{A\text{-Alg}}(A/\langle P \rangle, B)$ et $\Phi(B)$: c'est la bijection entre $\{\bar{f}\}$ et $\{*\}$ si $P \subset \text{Ker } F$, et $\text{Id}_\emptyset$ dans le cas contraire.

(1.4.2.3) Soit A un anneau et soit n un entier. Le foncteur qui envoie une A -algèbre B sur B^n est représentable. En effet, l'application $f \mapsto (f(T_1), \dots, f(T_n))$ établit une bijection fonctorielle en B entre $\text{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[T_1, \dots, T_n], B)$ et B^n .

(1.4.2.4) Soit A un anneau, soit n un entier et soit (P_i) une famille de polynômes appartenant à $A[T_1, \dots, T_n]$. Le foncteur G qui envoie une A -algèbre B sur

$$\{(b_1, \dots, b_n) \in B^n, P_i(b_1, \dots, b_n) = 0 \forall i\}$$

est représentable. En effet, l'application $f \mapsto (f(\overline{T_1}), \dots, f(\overline{T_n}))$ établit une bijection fonctorielle en B entre $\text{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[T_1, \dots, T_n]/(P_i)_i, B)$ et $G(B)$.

(1.4.2.5) Le foncteur $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$ de TopPt/h vers Ens est représentable : il s'identifie naturellement, par sa définition même, à $\text{Hom}_{\text{TopPt}/h}((S_1, o), \cdot)$, où S_1 est le cercle et o un point quelconque choisi sur S_1 .

(1.4.3) Montrer qu'un foncteur F est représentable revient à exhiber un objet X et un isomorphisme $h_X \simeq F$. Ce dernier point peut sembler délicat, étant donnée la définition d'un morphisme de foncteurs comme une gigantesque collection de morphismes (sujette à des conditions de compatibilité). On va voir un peu plus bas (1.4.6) qu'il n'en est rien, et qu'un tel isomorphisme $h_X \simeq F$ admet toujours une description concrète simple et maniable.

(1.4.4) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soit $X \in \text{Ob } \mathbf{C}$. Soit F un foncteur covariant de $\mathbf{C}$ dans Ens , et soit $\xi \in F(X)$. On vérifie immédiatement que la collection d'applications

$$h_X(Y) = \text{Hom}(X, Y) \rightarrow F(Y), f \mapsto F(f)(\xi)$$

définit, lorsque Y parcourt $\text{Ob } \mathbf{C}$, un morphisme de h_X dans F ; nous le noterons φ_ξ .

(1.4.5) Lemme de Yoneda. Soit ψ un morphisme de h_X dans F . Il existe un unique $\xi \in F(X)$ tel que $\psi = \varphi_\xi$, à savoir $\psi(X)(\text{Id}_X)$.

Démonstration. Commençons par remarquer que l'énoncé a bien un sens : on a $\text{Id}_X \in \text{Hom}(X, X) = h_X(X)$, d'où il résulte que $\psi(X)(\text{Id}_X)$ est un élément bien défini de $F(X)$.

Preuve de l'unicité. Soit ξ tel que $\psi = \varphi_\xi$. On a alors

$$\psi(X)(\text{Id}_X) = \varphi_\xi(X)(\text{Id}_X) = F(\text{Id}_X)(\xi) = \text{Id}_{F(X)}(\xi) = \xi,$$

d'où l'assertion requise.

Preuve de l'existence. On pose $\xi = \psi(X)(\text{Id}_X)$, et l'on va démontrer que $\psi = \varphi_\xi$. Soit $Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ et soit $f : X \rightarrow Y$ un élément de $h_X(Y)$.

On a par définition d'un morphisme de foncteurs un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} h_X(X) & \xrightarrow{h_X(f)} & h_X(Y) \\ \psi(X) \downarrow & & \downarrow \psi(Y) \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array}$$

Comme $h_X(f)$ est la composition avec f , on a $h_X(f)(\text{Id}_X) = f$. L'image de Id_X par $\psi(X)$ est par ailleurs égale à ξ par définition de ce dernier. Par commutativité du diagramme il vient alors $\psi(Y)(f) = F(f)(\xi) = \varphi_\xi(Y)(f)$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

(1.4.5.1) Remarque. En particulier, les morphismes de h_X vers F constituent un ensemble (en bijection naturelle avec $F(X)$), ce qui n'était pas évident *a priori*.

(1.4.5.2) Plaçons-nous dans le cas particulier où $F = h_Y$ pour un certain $Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$. L'élément ξ du lemme appartient alors à $h_Y(X) = \text{Hom}(Y, X)$, et le morphisme $\psi = \varphi_\xi$ est donné par la formule $f \mapsto h_Y(f)(\xi) = f \circ \xi$. En conséquence, ψ est le morphisme $\xi^* : h_X \rightarrow h_Y$ induit par ξ (cf. 1.3.2.2).

Il s'ensuit que $\xi \mapsto \xi^*$ établit une bijection entre $\text{Hom}(Y, X)$ et l'ensemble des morphismes de foncteurs de h_X vers h_Y .

(1.4.5.3) Soit $\xi \in \text{Hom}(Y, X)$. C'est un isomorphisme si et seulement si ξ^* est un isomorphisme. En effet, si ξ est un isomorphisme d'inverse ζ , on a

$$\zeta^* \circ \xi^* = (\xi \circ \zeta)^* = \text{Id}_Y^* = \text{Id}_{h_Y},$$

et de même $\xi^* \circ \zeta^* = \text{Id}_{h_X}$.

Réciproquement, supposons que ξ^* soit un isomorphisme. Sa réciproque est alors d'après 1.4.5.2 de la forme ζ^* pour un certain $\zeta \in \text{Hom}(X, Y)$. On a

$$(\xi \circ \zeta)^* = \zeta^* \circ \xi^* = \text{Id}_{h_X} = \text{Id}_X^*$$

et donc $\xi \circ \zeta = \text{Id}_X$ d'après *loc. cit.* De même, $\zeta \circ \xi = \text{Id}_Y$.

(1.4.6) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soit F un foncteur covariant de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$. Le foncteur F est représentable si et seulement si il existe un objet X de $\mathbf{C}$ et un isomorphisme $h_X \simeq F$. En vertu du lemme de Yoneda, cela revient à demander qu'il existe un objet X de $\mathbf{C}$ et un élément ξ de $F(X)$ tel que φ_ξ soit un isomorphisme, c'est-à-dire tel que $f \mapsto F(f)(\xi)$ établisse pour tout $Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ une bijection $\text{Hom}(X, Y) \simeq F(Y)$. Nous dirons qu'un tel couple (X, ξ) est un *représentant* de F .

(1.4.7) Canonicité du représentant. Soient F et G deux foncteurs covariants d'une catégorie $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$. On les suppose représentables ; soit (X, ξ) un représentant de F et soit (Y, η) un représentant de G .

(1.4.7.1) Soit ρ un morphisme de foncteurs de F dans G . Il existe un unique morphisme $\psi : h_X \rightarrow h_Y$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} h_X & \xrightarrow{\psi} & h_Y \\ \varphi_\xi \downarrow \simeq & & \downarrow \varphi_\eta \simeq \\ F & \xrightarrow{\rho} & G \end{array} \quad ,$$

à savoir $\varphi_\eta^{-1} \circ \rho \circ \varphi_\xi$; comme φ_η^{-1} et φ_ξ sont des isomorphismes, ψ est un isomorphisme si et seulement si ρ est un isomorphisme.

D'après 1.4.5.2, on peut reformuler ceci en disant qu'il existe un unique λ appartenant à $\text{Hom}(Y, X)$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} h_X & \xrightarrow{\lambda^*} & h_Y \\ \varphi_\xi \downarrow \simeq & & \varphi_\eta \downarrow \simeq \\ F & \xrightarrow{\rho} & G \end{array}$$

commute. En vertu de 1.4.5.3, λ est un isomorphisme si et seulement si λ^* est un isomorphisme, c'est-à-dire par ce qui précède si et seulement si ρ est un isomorphisme.

En appliquant la commutativité du diagramme à l'élément Id_X de $\text{Hom}(X, X) = h_X(X)$, et en remarquant que $\lambda^*(X)(\text{Id}_X) = \lambda$, on obtient l'égalité

$$\varphi_\eta(X)(\lambda) = \rho(X)(\varphi_\xi(X)(\text{Id}_X)),$$

qui caractérise λ puisque $\varphi_\eta(X)$ est une bijection; par définition de φ_η et φ_ξ , elle se récrit

$$G(\lambda)(\eta) = \rho(X)(\xi)$$

(notons que c'est une égalité entre éléments de $G(X)$).

(1.4.7.2) En appliquant ce qui précède lorsque $G = F$ et $\rho = \text{Id}_F$, on obtient l'assertion suivante : *il existe un unique morphisme λ de Y vers X tel que $F(\lambda)(\eta) = \xi$; ce morphisme est un isomorphisme, et peut également être caractérisé par la commutativité du diagramme*

$$\begin{array}{ccc} h_X & \xrightarrow{\lambda^*} & h_Y \\ \varphi_\xi \searrow \simeq & & \simeq \swarrow \varphi_\eta \\ & F & \end{array} .$$

Il existe en particulier un unique isomorphisme $\lambda : Y \simeq X$ tel que $F(\lambda)(\eta) = \xi$; les couples (X, ξ) et (Y, η) sont donc en un sens *canoniquement isomorphes*. Pour cette raison, nous nous permettrons souvent de parler par abus du représentant (X, ξ) d'un foncteur représentable F ; et nous dirons que ξ est *l'objet universel relatif à F* .

Il arrivera qu'on omette de mentionner ξ et qu'on se contente de dire que X est le représentant de F ; mais attention, c'est un peu imprudent, car pour un même X , plusieurs ξ peuvent convenir.

(1.4.7.3) On peut alors reformuler le lemme de Yoneda, ou plus précisément la déclinaison qui en est faite en 1.4.7.1 en disant que *se donner un morphisme entre foncteurs représentables, c'est se donner un morphisme entre leurs représentants*.

(1.4.8) Nous allons revisiter certains des exemples vus en 1.4.2 en donnant à chaque fois le représentant du foncteur considéré, et en insistant sur son objet universel.

(1.4.8.1) Soit A un anneau et soit P une partie de A . Le foncteur qui envoie un anneau B sur l'ensemble des morphismes de A dans B s'annulant sur les éléments de P est représentable. Si π désigne l'application quotient $A \rightarrow A/\langle P \rangle$, alors $(A/\langle P \rangle, \pi)$ est son représentant.

Le morphisme π est le «morphisme universel s'annulant sur P ».

(1.4.8.2) Soit A un anneau et soit n un entier. Le foncteur qui envoie une A -algèbre B sur B^n est représentable. Le couple $(A[T_1, \dots, T_n], (T_1, \dots, T_n))$ est son représentant.

Le n -uplet $(T_1, \dots, T_n)$ est le « n -uplet universel d'éléments d'une A -algèbre».

(1.4.8.3) Soit A un anneau, soit n un entier et soit (P_i) une famille de polynômes appartenant à $A[T_1, \dots, T_n]$. Le foncteur qui envoie une A -algèbre B sur

$$\{(b_1, \dots, b_n) \in B^n, P_i(b_1, \dots, b_n) = 0 \forall i\}$$

est représentable. Le couple $(A[T_1, \dots, T_n]/(P_i)_i, (\overline{T_1}, \dots, \overline{T_n}))$ est son représentant.

Le n -uplet $(\overline{T_1}, \dots, \overline{T_n})$ est le « n -uplet universel d'éléments d'une A -algèbre en lequel les P_i s'annulent».

(1.4.8.4) Le foncteur $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$ de $\mathbf{TopPt}/h$ vers $\mathbf{Ens}$ est représentable ; le couple $((S_1, o), \text{Id}_{(S_1, o)})$ est son représentant.

L'application identité de (S_1, o) est le «lacet universel à homotopie près».

(1.4.9) **Exemple d'application du lemme de Yoneda.** Soient m et n deux entiers. Soit A un anneau commutatif unitaire, et soient F et G les foncteurs $B \mapsto B^n$ et $B \mapsto B^m$ sur la catégorie des A -algèbres. Ils sont représentables, de représentants respectifs $(A[T_1, \dots, T_n], (T_1, \dots, T_n))$ et $(A[S_1, \dots, S_m], (S_1, \dots, S_m))$. Soit φ un morphisme de F vers G . Par le lemme de Yoneda, il provient d'un unique morphisme de $A[S_1, \dots, S_m]$ vers $A[T_1, \dots, T_n]$. Un tel morphisme est lui-même donné par m polynômes $P_1, \dots, P_m$ appartenant à $A[T_1, \dots, T_n]$ (les images des S_i). On vérifie immédiatement que φ est alors décrit par les formules

$$(b_1, \dots, b_n) \mapsto (P_1(b_1, \dots, b_n), \dots, P_m(b_1, \dots, b_n)).$$

Ce résultat est un sens assez intuitif : la seule façon d'associer de façon naturelle à tout n -uplet d'éléments d'une A -algèbre B un m -uplet d'éléments de B consiste à utiliser une formule polynomiale à coefficients dans A ; on pouvait s'y attendre, puisque les seules opérations que l'on sache effectuer dans une A -algèbre générale sont l'addition, la multiplication interne, et la multiplication par les éléments de A .

(1.4.10) **Objet initial, objet final.** Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Comme il existe une et une seule application d'un singleton dans un autre, la flèche $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie un objet X sur un singleton $\{*\}$ peut être vue d'une unique manière comme un foncteur covariant F , et d'une unique manière comme un foncteur contravariant G .

Si F est représentable, on appelle *objet initial* de $\mathbf{C}$ tout représentant de F . Un objet X de $\mathbf{C}$ est initial si et seulement si $\text{Hom}(X, Y)$ est un singleton pour tout objet Y de $\mathbf{C}$.

Si G est représentable, on appelle *objet final* de $\mathbf{C}$ tout représentant de F . Un objet X de $\mathbf{C}$ est final si et seulement si $\text{Hom}(Y, X)$ est un singleton pour tout objet Y de $\mathbf{C}$.

(1.4.11) Exemples.

(1.4.11.1) Dans la catégorie des ensembles, $\emptyset$ est initial, et $\{*\}$ est final.

(1.4.11.2) Dans la catégorie des groupes, $\{e\}$ est initial et final.

(1.4.11.3) Dans la catégorie des modules sur un anneau commutatif unitaire A donné, $\{0\}$ est initial et final.

(1.4.11.4) Dans la catégorie des anneaux, $\mathbb{Z}$ est initial, et $\{0\}$ est final.

(1.4.11.5) La catégorie des corps n'a ni objet initial, ni objet final. Celle des corps de caractéristique nulle a $\mathbb{Q}$ comme objet initial, et n'a pas d'objet final; celle des corps de caractéristique $p > 0$ a $\mathbb{F}_p$ comme objet initial, et n'a pas d'objet final.

1.5 Produits fibrés et sommes amalgamées

Produits cartésiens et produits fibrés

(1.5.1) Le produit cartésien. Le produit cartésien ensembliste $X \times Y$ de deux ensembles X et Y est par définition l'ensemble des couples (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soient X et Y deux objets de $\mathbf{C}$. Si le foncteur contravariant

$$h^X \times h^Y := T \mapsto h^X(T) \times h^Y(T) = \text{Hom}(T, X) \times \text{Hom}(T, Y)$$

est représentable, son représentant est en général noté $X \times Y$ et est appelé le *produit cartésien* de X et Y .

On prendra garde que ce représentant est en réalité constitué de $X \times Y$ et d'un couple (p, q) de morphismes où p va de $X \times Y$ vers X et q de $X \times Y$ vers Y . Ces morphismes n'ont pas de notation standard; on les appelle les première et seconde projections.

La définition du couple $((X \times Y), (p, q))$ comme représentant de $h^X \times h^Y$ signifie que pour tout objet T de $\mathbf{C}$, tout morphisme $\lambda : T \rightarrow X$ et tout morphisme $\mu : T \rightarrow Y$, il existe un et un seul morphisme $\pi : T \rightarrow X \times Y$ tel que $\lambda = p \circ \pi$ et $\mu = q \circ \pi$. Ou encore que pour tout objet T de $\mathbf{C}$, l'application $\pi \mapsto (p \circ \pi, q \circ \pi)$ établit une bijection entre $\text{Hom}(T, X \times Y)$ et $\text{Hom}(T, X) \times \text{Hom}(T, Y)$. En termes plus imagés : se donner un morphisme d'un objet T vers $X \times Y$, c'est se donner un morphisme de T vers X et un morphisme de T vers Y .

(1.5.2) Quelques exemples de catégories dans lesquelles les produits cartésiens existent.

(1.5.2.1) Dans la catégorie des ensembles, le produit cartésien de deux ensembles est leur produit cartésien ensembliste.

(1.5.2.2) Dans la catégorie des espaces topologiques, le produit cartésien de deux espaces topologiques est leur produit cartésien ensembliste *muni de la topologie produit*.

(1.5.2.3) Dans la catégorie des groupes (resp. des anneaux, resp. des modules sur un anneau), le produit cartésien de deux objets est leur produit cartésien ensembliste, la ou les opérations étant définies coordonnée par coordonnée.

(1.5.3) Le produit fibré.

(1.5.3.1) Le cas des ensembles. Soient X, Y et S trois ensembles, et soit $f : X \rightarrow S$ et $g : Y \rightarrow S$ deux applications. Le *produit fibré ensembliste* $X \times_{f,g} Y$ (ou plus simplement $X \times_S Y$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la définition des flèches f et g) est par définition l'ensemble des couples (x, y) où $x \in X$, où $y \in Y$ et où $f(x) = g(y)$. Il est muni d'une application naturelle h de but S , qui envoie (x, y) sur $f(x) = g(y)$, et l'on a pour tout s appartenant à S l'égalité $h^{-1}(s) = f^{-1}(s) \times g^{-1}(s)$: ainsi, $X \times_S Y$ est un «produit cartésien fibre à fibre», d'où l'expression produit fibré.

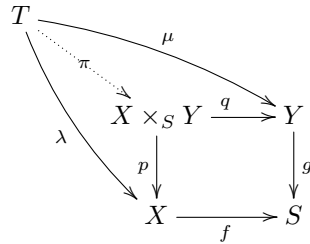
(1.5.3.2) Le cas général. Soit $\mathbf{C}$ est une catégorie, soient X, Y et S trois objets de $\mathbf{C}$, et soient $f : X \rightarrow S$ et $g : Y \rightarrow S$ deux morphismes. Si le foncteur contravariant

$$h^X \times_{h^S} h^Y := T \mapsto \text{Hom}(T, X) \times_{\text{Hom}(T, S)} \text{Hom}(T, Y)$$

est représentable, on note en général $X \times_S Y$ ou $X \times_{f,g} Y$ son représentant, que l'on appelle *produit fibré de X et Y au-dessus de S (ou le long de (f, g))*. On prendra garde que ce représentant est en réalité constitué de $X \times_S Y$ et d'un couple (p, q) de morphismes où p va de $X \times_S Y$ vers X et q de $X \times_S Y$ vers Y , et où $f \circ p = g \circ q$. Ces morphismes n'ont pas de notation standard ; on les appelle les première et seconde projections.

La définition du couple $((X \times_S Y), (p, q))$ comme représentant du foncteur $h^X \times_{h^S} h^Y$ signifie que pour tout objet T de $\mathbf{C}$, tout morphisme $\lambda : T \rightarrow X$ et tout morphisme $\mu : T \rightarrow Y$ tel que $f \circ \lambda = g \circ \mu$, il existe un et un seul morphisme $\pi : T \rightarrow X \times_S Y$ tel que $\lambda = p \circ \pi$ et $\mu = q \circ \pi$. Ou encore que pour tout objet T de $\mathbf{C}$, l'application $\pi \mapsto (p \circ \pi, q \circ \pi)$ établit une bijection entre $\text{Hom}(T, X \times_S Y)$ et $\text{Hom}(T, X) \times_{\text{Hom}(T, S)} \text{Hom}(T, Y)$. En termes plus imagés : se donner un morphisme d'un objet T vers $X \times_S Y$, c'est se donner un morphisme de T vers X et un morphisme de T vers Y dont les composés respectifs avec f et g coïncident.

(1.5.3.3) On peut schématiser ce qui précède par le diagramme commutatif suivant, dans lequel les flèches en dur sont données, et où la flèche en pointillés est celle fournie par la propriété universelle.



(1.5.3.4) Notons que le produit fibré $X \times_S Y$ est muni d'un morphisme naturel vers S , à savoir $f \circ p = g \circ q$.

(1.5.4) Quelques exemples de catégories dans lesquelles les produits fibrés existent.

(1.5.4.1) Dans la catégorie des ensembles, le produit fibré de deux ensembles au-dessus d'un troisième est leur produit fibré ensembliste.

(1.5.4.2) Dans la catégorie des espaces topologiques, le produit fibré de deux espaces topologiques au-dessus d'un troisième est leur produit fibré ensembliste muni de la topologie induite par la topologie produit.

(1.5.4.3) Dans la catégorie des groupes (resp. des anneaux, resp. des modules sur un anneau A), le produit fibré de deux objets au-dessus d'un troisième est leur produit fibré ensembliste, la ou les opérations étant définies coordonnée par coordonnée.

Quelques tautologies

Les démonstrations des assertions qui suivent sont laissées en exercice, à l'exception d'une d'entre elles qui est rédigée à titre d'exemple.

(1.5.5) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie dans laquelle les produits cartésiens existent.

(1.5.5.1) Si Y est un objet de $\mathbf{C}$, alors $X \mapsto X \times Y$ est de manière naturelle un foncteur covariant en X de $\mathbf{C}$ dans elle-même.

(1.5.5.2) Soient X, Y et Z trois objets de $\mathbf{C}$. On a des isomorphismes canoniques

$$X \times Y \simeq Y \times X \text{ et } (X \times Y) \times Z \simeq X \times (Y \times Z).$$

(1.5.6) Si $\mathbf{C}$ est une catégorie admettant un objet final S , et si X et Y sont deux objets de $\mathbf{C}$ tels que $X \times Y$ existe, alors $X \times_S Y$ existe³ et s'identifie à $X \times Y$: les produits cartésiens sont donc des produits fibrés, pour peu qu'il existe un objet final.

(1.5.7) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soit S un objet de $\mathbf{C}$. Rappelons que la catégorie $\mathbf{C}/S$ a été définie au 1.1.3.2.

(1.5.7.1) Soient $X \rightarrow S$ et $Y \rightarrow S$ deux objets de $\mathbf{C}/S$ (1.1.3.2). Alors le produit cartésien de $X \rightarrow S$ et $Y \rightarrow S$ existe dans $\mathbf{C}/S$ si et seulement si $X \times_S Y$ existe dans $\mathbf{C}$, et si c'est le cas alors

$$(X \rightarrow S) \times (Y \rightarrow S) = X \times_S Y$$

(ce dernier est vu comme objet de $\mathbf{C}/S$ via son morphisme naturel vers S , cf. la fin de 1.5.3).

À l'aide de 1.5.5.1 et 1.5.5.2 on en déduit les faits suivants, sous l'hypothèse que les produits fibrés existent dans $\mathbf{C}$.

3. En toute rigueur, il faudrait préciser quels sont les morphismes $X \rightarrow S$ et $Y \rightarrow S$ que l'on considère ; mais comme S est final, il n'y a pas le choix.

• Pour tout objet $Y \rightarrow S$ de $\mathbf{C}/S$ la formule $(X \rightarrow S) \mapsto X \times_S Y$ définit un foncteur covariant en $X \rightarrow S$ de $\mathbf{C}/S$ dans elle-même.

• Si $X \rightarrow S, Y \rightarrow S$ et $Z \rightarrow S$ sont trois objets de $\mathbf{C}/S$ on a des isomorphismes naturels dans $\mathbf{C}/S$

$$X \times_S Y \simeq Y \times_S X \text{ et } (X \times_S Y) \times_S Z \simeq X \times_S (Y \times_S Z).$$

(1.5.7.2) Soit X un objet de $\mathbf{C}$. Supposons que $X \times S$ existe, et considérons-le comme un objet de $\mathbf{C}/S$ via la seconde projection. La restriction à $\mathbf{C}/S$ du foncteur h^X est alors égale à $\text{Hom}_{\mathbf{C}/S}(., X \times S)$.

(1.5.8) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie dans laquelle les produits fibrés existent, et soient X, Y, Z et T des objets de $\mathbf{C}$. Supposons donnés un morphisme $f : X \rightarrow Z$, un morphisme $g : Y \rightarrow Z$, et un morphisme $h : T \rightarrow Y$. On a alors un isomorphisme naturel

$$(X \times_Z Y) \times_Y T \simeq X \times_Z T,$$

où T est vu comme muni du morphisme $\lambda : T \rightarrow Z$ composé de $T \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow Z$.

Nous allons justifier cette assertion. L'idée de la preuve consiste à se ramener grâce au lemme de Yoneda à l'assertion ensembliste correspondante⁴.

(1.5.8.1) *Réduction au cas ensembliste.* Grâce au lemme de Yoneda, il suffit, pour exhiber un isomorphisme entre deux objets, d'en exhiber un entre les foncteurs qu'ils représentent. On va donc chercher à montrer que

$$(h^X \times_{h^Z} h^Y) \times_{h^Y} h^T \simeq h^X \times_{h^Z} h^T,$$

c'est-à-dire encore qu'il existe, pour tout objet S de $\mathbf{C}$, une bijection fonctorielle en S

$$\begin{aligned} & (\text{Hom}(S, X) \times_{\text{Hom}(S, Z)} \text{Hom}(S, Y)) \times_{\text{Hom}(S, Y)} \text{Hom}(S, T) \\ & \simeq \text{Hom}(S, X) \times_{\text{Hom}(S, Z)} \text{Hom}(S, T). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer l'existence d'un isomorphisme comme dans l'énoncé lorsque $\mathbf{C}$ est la catégorie des ensembles, en s'assurant en plus qu'il est bien fonctoriel en les données.

(1.5.8.2) *Le cas ensembliste.*

On a

$$(X \times_Z Y) \times_Y T = \{((x, y), t), f(x) = g(y) \text{ et } h(t) = y\}$$

et

$$X \times_Z T = \{(x, t), f(x) = \lambda(t) = g(h(t))\}.$$

La bijection cherchée est alors $((x, y), t) \mapsto (x, t)$, sa réciproque étant égale à $(x, t) \mapsto ((x, h(t)), t)$; la fonctorialité en les données est évidente.

4. On trouve quelque part dans les SGA l'expression «procédé ensembliste breveté» à propos de ce type de méthode.

(1.5.9) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie dans laquelle les produits fibrés existent. Soient $X \rightarrow S, Y \rightarrow S$ et $T \rightarrow S$ trois morphismes de $\mathbf{C}$. On déduit de 1.5.8 et 1.5.7.1 l'existence d'isomorphismes naturels

$$(X \times_S Y) \times_S T \simeq X \times_S (T \times_S Y) \simeq (X \times_S T) \times_T (T \times_S Y) \simeq (X \times_S T) \times_T (Y \times_S T).$$

Sommes disjointes et sommes amalgamées

Il s'agit des notions duales de celles de produit cartésien et de produit fibré.

(1.5.10) La somme disjointe. La somme disjointe ensembliste $X \coprod Y$ de deux ensembles X et Y est par définition la réunion d'une copie de X et d'une copie de Y , rendues disjointes (pour le faire proprement, on peut par exemple la définir comme le sous-ensemble de $(X \cup Y) \times \{0, 1\}$ formé des couples de la forme $(x, 0)$ avec $x \in X$ ou $(y, 1)$ avec $y \in Y$).

Si $\mathbf{C}$ est une catégorie et si X et Y sont deux objets de $\mathbf{C}$, et si le foncteur covariant

$$h_X \times h_Y$$

est représentable, on note en général $X \coprod Y$ son représentant, que l'on appelle la *somme disjointe* de X et Y . Attention : ce représentant est en réalité constitué de $X \coprod Y$ et d'un couple (i, j) de morphismes où i va de X vers $X \coprod Y$ et j de Y vers $X \coprod Y$. Ces morphismes n'ont pas de notation standard.

La définition du couple $(X \coprod Y, (i, j))$ comme représentant de $h_X \times h_Y$ signifie que pour tout objet T de $\mathbf{C}$, tout morphisme $\lambda : X \rightarrow T$ et tout morphisme $\mu : Y \rightarrow T$, il existe un et un seul morphisme $\sigma : X \coprod Y \rightarrow T$ tel que $\lambda = \sigma \circ i$ et $\mu = \sigma \circ j$. Ou encore que pour tout objet T de $\mathbf{C}$, l'application $\pi \mapsto (\pi \circ i, \pi \circ j)$ établit une bijection entre $\text{Hom}(X \coprod Y, T)$ et $\text{Hom}(X, T) \times \text{Hom}(Y, T)$. En termes plus imagés : se donner un morphisme de $X \coprod Y$ vers un objet T , c'est se donner un morphisme de X vers T et un morphisme de Y vers T .

(1.5.11) Quelques exemples de catégories dans lesquelles les sommes disjointes existent.

(1.5.11.1) Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe de deux ensembles est leur somme disjointe ensembliste.

(1.5.11.2) Dans la catégorie des espaces topologiques, la somme disjointes de deux espaces topologiques X et Y est leur somme disjointe ensembliste $X \coprod Y$ munie de la topologie définie comme suit : sa restriction à X (resp. Y) identifié à une partie de $X \coprod Y$ est la topologie de X (resp. de Y) ; les parties X et Y de $X \coprod Y$ sont toutes deux ouvertes.

(1.5.11.3) Dans la catégorie des modules sur un anneau A , la somme disjointe de deux modules est leur somme directe externe. *L'ensemble sous-jacent n'est donc pas leur somme disjointe ensembliste* (on a identifié les zéros des deux modules, et rajouté les sommes d'éléments).

(1.5.11.4) Dans la catégorie des groupes, le même type de phénomène se reproduit. Si G et H sont deux groupes, leur somme disjointe dans la catégorie des groupes est le *produit libre* $G * H$ de G et H , défini comme suit. Un élément

de $G * H$ est une suite finie $x_1 \dots x_n$ où chaque x_i est un élément non trivial de $G \amalg H$, et telle qu'éléments de G et éléments de H alternent (une telle suite est souvent appelée un *mot*, dont les x_i sont les *lettres*.) On fait le produit de deux mots en les concaténant, puis en contractant le résultat obtenu selon l'algorithme suivant.

- Si le mot contient une séquence de la forme xy avec x et y appartenant tous deux à G (resp. H), et si l'on note z le produit xy calculé dans G (resp. H) alors :
 - ◊ si $z \neq e$ on remplace la séquence xy par la lettre z ;
 - ◊ si $z = e$ on supprime la séquence xy .
- On recommence l'opération jusqu'à ce que le mot ne contienne plus de séquence de la forme xy avec x et y appartenant tous deux à G ou tous deux à H .

On prendra garde que les x_i sont des éléments de la réunion *disjointe* de G et H : même si $G = H$ on considère dans cette construction G et H comme deux groupes *distincts*, ce qui veut dire qu'on ne simplifie *jamaïs* un produit xy avec $x \in G$ et $y \in H$ ou le contraire. Notons que l'élément neutre de $G * H$ est le mot vide.

Par exemple, si $G = H = \mathbb{Z}$, et si l'on écrit $G = a^{\mathbb{Z}}$ et $H = b^{\mathbb{Z}}$ pour distinguer les deux groupes, on voit que $G * H$ est constitué des mots en les lettres a, a^{-1}, b et b^{-1} : c'est le groupe libre sur deux générateurs.

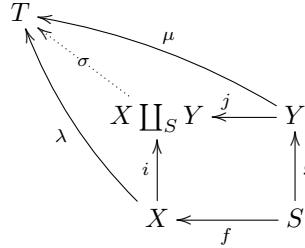
(1.5.12) La somme amalgamée.

(1.5.12.1) Le cas ensembliste. Soient X, Y et S trois ensembles, et soit $f : S \rightarrow X$ et $g : S \rightarrow Y$ deux applications. La *somme amalgamée ensembliste* $X \amalg_{f,g} Y$ (ou plus simplement $X \amalg_S Y$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la définition des flèches f et g) est par définition le quotient de $X \amalg Y$ par la relation d'équivalence engendrée par les relations $f(s) \sim g(s)$ pour s parcourant S . On dispose de deux applications naturelles $X \rightarrow X \amalg_S Y$ et $Y \rightarrow X \amalg_S Y$.

(1.5.12.2) Le cas général. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie, si X, Y et S sont trois objets de $\mathbf{C}$, si $f : S \rightarrow X$ et $g : S \rightarrow Y$ sont deux morphismes, et si le foncteur covariant $h_X \times_{h_S} h_Y$ est représentable, on note en général $X \amalg_S Y$ ou $X \amalg_{f,g} Y$ son représentant, que l'on appelle la *somme amalgamée de X et Y le long de S (ou le long de (f, g))*. Attention : ce représentant est en réalité constitué de $X \amalg_S Y$ et d'un couple (i, j) de morphismes où i va de X vers $X \amalg_S Y$ et j de Y vers $X \amalg_S Y$, et où $i \circ f = j \circ g$. Ces morphismes n'ont pas de notation standard.

La définition du couple $(X \amalg_S Y, (i, j))$ comme représentant du foncteur $h_X \times_{h_S} h_Y$ signifie que pour tout objet T de $\mathbf{C}$, tout morphisme $\lambda : X \rightarrow T$ et tout morphisme $\mu : Y \rightarrow T$ tel que $\lambda \circ f = \mu \circ g$, il existe un et un seul morphisme $\sigma : X \amalg_S Y \rightarrow T$ tel que $\lambda = \sigma \circ i$ et $\mu = \sigma \circ j$. Ou encore que pour tout objet T de $\mathbf{C}$, l'application $\pi \mapsto (\pi \circ i, \pi \circ j)$ établit une bijection entre $\text{Hom}(X \amalg_S Y, T)$ et $\text{Hom}(X, T) \times_{\text{Hom}(S, T)} \text{Hom}(Y, T)$. En termes plus imagés : se donner un morphisme de $X \amalg_S Y$ vers un objet T , c'est se donner un morphisme de X vers T et un morphisme de Y vers T dont les composés respectifs avec i et j coïncident.

(1.5.12.3) On peut schématiser ce qui précède par le diagramme commutatif suivant, dans lequel les flèches en dur sont données, et où la flèche en pointillés est celle fournie par la propriété universelle.



(1.5.12.4) Notons que S est muni d'un morphisme naturel vers $X \amalg_S Y$, à savoir $i \circ f = j \circ g$.

(1.5.13) Quelques exemples de catégories dans lesquelles les sommes amalgamées existent.

(1.5.13.1) Dans la catégorie des ensembles, la somme amalgamée de deux ensembles le long d'un troisième est leur somme amalgamée ensembliste.

(1.5.13.2) Dans la catégorie des espaces topologiques, la somme amalgamée de deux espaces topologiques X et Y le long d'un troisième espace S est leur somme amalgamée ensembliste, munie de la topologie quotient (la somme disjointe $X \amalg Y$ étant munie quant à elle de sa topologie décrite plus haut).

(1.5.13.3) Dans la catégorie des groupes, la somme amalgamée de deux groupes G et H le long d'un groupe K muni de deux morphismes $g : K \rightarrow G$ et $h : K \rightarrow H$ existe, et est notée $G *_K H$. On peut par exemple la construire comme le quotient du produit libre $G * H$ par son plus petit sous-groupe distingué D contenant les éléments de la forme $g(k)h(k)^{-1}$ pour $k \in K$. Cette présentation a l'avantage de rendre triviale la vérification de la propriété universelle, mais l'inconvénient de ne pas être très maniable en pratique : elle ne dit pas comment décider si deux mots de $G * H$ ont même classe modulo D .

Toutefois, si g et h sont injectives, on peut décrire $G *_K H$ d'une façon plus tangible (cela revient peu ou prou à exhiber un système de représentants explicite de la congruence modulo D), que nous allons maintenant détailler. Pour alléger les notations, nous utilisons les injections g et h pour identifier K à un sous-groupe de G aussi bien que de H .

On fixe un système de représentants S des classes non triviales de G modulo K , et un système de représentants T des classes non triviales de H modulo K . Un élément de $G *_K H$ est alors un mot $x_1 \dots x_n$ où chaque x_i est un élément de $(K \setminus \{e\}) \amalg S \amalg T$ et où :

- l'ensemble des indices i tels que $x_i \in K \setminus \{e\}$ est vide ou égal à $\{1\}$;
- pour tout indice $i \leq n-1$, on a $x_{i+1} \in T$ si $x_i \in S$, et $x_{i+1} \in S$ si $x_i \in T$.

On fait le produit de deux mots en les concaténant, puis en transformant le mot obtenu par l'algorithme suivant.

- Si le mot contient une séquence de la forme kk' où k et k' appartiennent à K , et si z désigne le produit kk' calculé dans K , alors :

- ◊ si $z = e$ on supprime la séquence kk' ;
 - ◊ si $z \neq e$ on remplace la séquence kk' par la lettre z .
- Si le mot contient une séquence de la forme sy avec $s \in S$ et $y \in K \setminus \{e\}$ ou $y \in S$ on pose $z = sy \in G$; puis on écrit $z = ks'$ avec $k \in K$ et $s' \in S \cup \{e\}$, et l'on procède comme suit :
 - ◊ si $k = e$ et $s' = e$ on supprime la séquence sy ;
 - ◊ si $k = e$ et $s' \neq e$ on remplace la séquence sy par la lettre s' ;
 - ◊ si $k \neq e$ et $s' = e$ on remplace la séquence sy par la lettre k ;
 - ◊ si $k \neq e$ et $s' \neq e$ on remplace la séquence sy par la séquence ks' .
- Si le mot contient une séquence de la forme ty avec $t \in T$ et $y \in K \setminus \{e\}$ ou $y \in T$ on pose $z = ty \in H$; puis on écrit $z = kt'$ avec $k \in K$ et $t' \in T \cup \{e\}$, et l'on procède comme suit :
 - ◊ si $k = e$ et $t' = e$ on supprime la séquence ty ;
 - ◊ si $k = e$ et $t' \neq e$ on remplace la séquence ty par la lettre t' ;
 - ◊ si $k \neq e$ et $t' = e$ on remplace la séquence ty par la lettre k ;
 - ◊ si $k \neq e$ et $t' \neq e$ on remplace la séquence ty par la séquence kt' .
- On recommence jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de séquence de l'une des trois formes évoquées ; le mot est alors sous la forme requise.

L'élément neutre de $G *_K H$ est le mot vide.

(1.5.13.4) Dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, la somme amalgamée de deux anneaux B et C le long d'un troisième anneau A existe, c'est le produit tensoriel $B \otimes_A C$, que nous verrons un peu plus loin.

J'invite le lecteur à écrire lui-même à propos des sommes disjointes et amalgamées, les «quelques tautologies» duales de celles vues plus haut sur les produits cartésiens et produits fibrés.

1.6 Limites et colimites

(1.6.1) Cette section va être consacrée à deux techniques très générales, et en un sens duales l'une de l'autre, de construction d'objets dans une catégorie : la formation (lorsque c'est possible) de la *limite* et de la *colimite* d'un *diagramme*.

Les sommes disjointes et amalgamées ainsi que l'objet initial apparaîtront *a posteriori* comme des exemples de colimites ; les produits cartésiens et fibrés ainsi que l'objet final apparaîtront *a posteriori* comme des exemples de limites. Si nous avons choisi d'en faire une présentation directe précédemment, c'est en raison de leur importance particulière, et également pour vous permettre de vous faire la main sur des cas un peu plus concrets et explicites que ceux que nous allons maintenant aborder.

(1.6.2) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Un *diagramme* dans $\mathbf{C}$ est la donnée d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathbf{C}$ et pour tout (i, j) d'un ensemble E_{ij} de flèches de X_i vers X_j . Mentionnons incidemment qu'un diagramme $((X_i), (E_{ij}))$ est dit *commutatif* si pour tout triplet (i, j, k) , toute $f \in E_{ij}$, toute $g \in E_{jk}$ et toute $h \in E_{ik}$ on a $h = g \circ f$.

(1.6.3) Soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans $\mathbf{C}$ et soit Y un objet de $\mathbf{C}$.

(1.6.3.1) Un *morphisme de $\mathcal{D}$ vers Y* est une famille $(a_i : X_i \rightarrow Y)_i$ de flèches telle que l'on ait pour tout couple (i, j) et pour tout $f \in E_{ij}$ l'égalité $a_j \circ f = a_i$. On note $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, Y)$ l'ensemble des morphismes de $\mathcal{D}$ vers Y .

(1.6.3.2) Un *morphisme de Y vers $\mathcal{D}$* est une famille $(b_i : Y \rightarrow X_i)_i$ de flèches telle que l'on ait pour tout couple (i, j) et pour tout $f \in E_{ij}$ l'égalité $f \circ b_i = b_j$. On note $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, \mathcal{D})$ l'ensemble des morphismes de Y vers $\mathcal{D}$.

(1.6.3.3) *Remarque.* Soit $\mathcal{D}'$ le plus petit diagramme ayant mêmes objets que $\mathcal{D}$ et dont les flèches sont les compositions finies de flèches de $\mathcal{D}$ (quand ces compositions ont un sens; notons que les compositions *vides*, c'est-à-dire les identités, font partie des flèches de $\mathcal{D}'$).

Il est immédiat que pour tout objet Y de $\mathbf{C}$ on a $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}', Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, Y)$ et $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, \mathcal{D}') = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, \mathcal{D})$.

(1.6.4) **Définition des limites et colimites.** Soit $\mathcal{D}$ un diagramme de $\mathbf{C}$.

(1.6.4.1) Si le foncteur contravariant de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$ qui envoie un objet Y sur $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, \mathcal{D})$ est représentable, son représentant est appelé la *limite* du diagramme $\mathcal{D}$ et est noté $\lim \mathcal{D}$. Notons qu'il est fourni avec une famille de morphismes $(\mu_i : \lim \mathcal{D} \rightarrow X_i)$.

(1.6.4.2) Si le foncteur covariant de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$ qui envoie un objet Y sur $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, Y)$ est représentable, son représentant est appelé la *colimite* du diagramme $\mathcal{D}$ et est noté $\text{colim } \mathcal{D}$. Notons qu'il est fourni avec une famille de morphismes $(\lambda_i : X_i \rightarrow \text{colim } \mathcal{D})$.

(1.6.4.3) *Remarque.* Soit $\mathcal{D}'$ le diagramme construit à partir de $\mathcal{D}$ comme à la remarque 1.6.3.3; il résulte de cette dernière que la limite (resp. colimite) de $\mathcal{D}'$ existe si et seulement si c'est le cas de celle de $\mathcal{D}$, et qu'on a le cas échéant $\lim \mathcal{D}' = \lim \mathcal{D}$ (resp. $\text{colim } \mathcal{D}' = \text{colim } \mathcal{D}$).

(1.6.5) **Premiers exemples de limite.** Les faits suivants découlent tautologiquement des définitions.

(1.6.5.1) La limite du *diagramme vide* existe si et seulement si $\mathbf{C}$ a un objet final, et si c'est le cas les deux coïncident.

(1.6.5.2) Soient X et Y deux objets de $\mathbf{C}$. La limite du diagramme

$$X \quad Y$$

existe si et seulement si $X \times Y$ existe, et si c'est le cas les deux coïncident.

(1.6.5.3) Les deux exemples précédents se généralisent comme suit : soit $\mathcal{D} = (X_i)_{i \in I}$ un diagramme constitué d'une famille d'objets, sans morphismes. Dire que $\lim \mathcal{D}$ existe revient à dire que le foncteur $Y \mapsto \prod \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X_i)$ est représentable; si c'est le cas la limite est notée $\prod X_i$ et est appelée le *produit* des X_i . Se donner un morphisme *vers* $\prod X_i$, c'est se donner un morphisme vers chacun des X_i .

(1.6.5.4) Soient $X \rightarrow S$ et $Y \rightarrow S$ deux morphismes de $\mathbf{C}$. La limite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

existe si et seulement si $X \times_S Y$ existe, et si c'est le cas les deux coïncident.

(1.6.6) Premiers exemples de colimite. Les faits suivants découlent tautologiquement des définitions.

(1.6.6.1) La colimite du *diagramme vide* existe si et seulement si $\mathbf{C}$ a un objet initial, et si c'est le cas les deux coïncident.

(1.6.6.2) Soient X et Y deux objets de $\mathbf{C}$. La colimite du diagramme

$$X \quad Y$$

(deux objets, pas de morphismes) existe si et seulement si $X \coprod Y$ existe, et si c'est le cas les deux coïncident.

(1.6.6.3) Les deux exemples précédents se généralisent comme suit : soit $\mathcal{D} = (X_i)_{i \in I}$ un diagramme constitué d'une famille d'objets, sans morphismes. Dire que $\text{colim } \mathcal{D}$ existe revient à dire que le foncteur $Y \mapsto \prod \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i, Y)$ est représentable ; si c'est le cas la limite est notée $\prod X_i$ et est appelée la *somme disjointe* des X_i . Se donner un morphisme *depuis* $\prod X_i$, c'est se donner un morphisme depuis chacun des X_i .

(1.6.6.4) Soient $S \rightarrow X$ et $S \rightarrow Y$ deux morphismes de $\mathbf{C}$. La colimite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & S & \end{array}$$

existe si et seulement si $X \coprod_S Y$ existe, et si c'est le cas les deux coïncident.

(1.6.7) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie, et soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans $\mathbf{C}$. Supposons que pour tout objet Y de $\mathbf{C}$ et tout i , l'ensemble $\text{Hom}(X_i, Y)$ soit ou bien vide, ou bien un singleton ; c'est par exemple le cas si $\mathbf{C}$ est la catégorie des algèbres sur un anneau A et si X_i est pour tout i un quotient de A .

Dans ce cas, pour tout objet Y de $\mathbf{C}$, l'ensemble $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, Y)$ est vide s'il existe i tel que $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i, Y)$ soit vide, et est un singleton sinon. En effet, il est clair que s'il existe i tel que $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i, Y) = \emptyset$ alors $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, Y) = \emptyset$. Dans le cas contraire, $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i, Y)$ est pour tout i un singleton $\{f_i\}$, et le seul élément éventuel de $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, Y)$ est donc la famille (f_i) ; mais celle-ci appartient effectivement à $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, Y)$: comme f_i est le seul élément de $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i, Y)$ pour tout i , les conditions du type $f_j \circ f = f_i$ sont *automatiquement* vérifiées.

On voit donc que $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, Y)$ ne dépend que de (X_i) , et pas de la famille de morphismes (E_{ij}) ; il en va dès lors de même de l'existence de $\text{colim } \mathcal{D}$, et de sa valeur le cas échéant.

Nous laissons le lecteur énoncer les assertions duales à propos des limites.

Exemples de catégories admettant des limites

(1.6.8) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans $\mathbf{C}$. Nous allons mentionner un certain nombre de cas dans lesquels $\lim \mathcal{D}$ existe et

décrire celle-ci, en laissant à chaque fois la vérification de la propriété universelle (éventuellement fastidieuse, mais triviale) au lecteur.

(1.6.8.1) *Supposons que $\mathbf{C} = \mathbf{Ens}$.* Dans ce cas, $\lim \mathcal{D}$ est le sous-ensemble de $\prod X_i$ formée des familles (x_i) telles que $f(x_i) = x_j$ pour tout couple (i, j) et toute $f \in E_{ij}$. Pour tout j , la flèche structurale $\lim \mathcal{D} \rightarrow X_j$ est simplement la restriction de la j -ième projection.

(1.6.8.2) *Supposons que $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$.* La limite de $\mathcal{D}$ coïncide alors en tant qu'ensemble avec celle construite au 1.6.8.1. La topologie de $\lim \mathcal{D}$ est induite par la topologie produit sur $\prod X_i$, et la flèche structurale $\lim \mathcal{D} \rightarrow X_j$ est encore la restriction de la j -ième projection, qui est continue.

(1.6.8.3) *Supposons que $\mathbf{C} = \mathbf{Ann}, \mathbf{Gp}, \mathbf{A-Mod}$ ou $\mathbf{A-Alg}$ pour un certain anneau A .* Une fois encore, l'ensemble sous-jacent à $\lim \mathcal{D}$ coïncide avec la limite ensembliste de $\mathcal{D}$ décrite au 1.6.8.1. Sa structure d'objet de $\mathbf{C}$ s'obtient en munissant le produit ensembliste $\prod X_i$ de la structure d'objet de $\mathbf{C}$ définie composante par composante, puis en remarquant que $\lim \mathcal{D}$ en est un sous-objet au sens de $\mathbf{C}$; et pour tout j , la flèche structurale $\lim \mathcal{D} \rightarrow X_j$ est encore la restriction de la j -ième projection, qui est un morphisme de $\mathbf{C}$.

(1.6.9) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme de $\mathbf{C}$. Soit S un objet de $\mathbf{C}$.

(1.6.9.1) Supposons donné pour tout i un morphisme $p_i : X_i \rightarrow S$ de sorte que $p_j \circ f = p_i$ pour tout (i, j) et toute $f \in E_{ij}$. La famille (p_i) induit alors un morphisme $p : \text{colim } \mathcal{D} \rightarrow S$.

Grâce aux p_i , on peut voir $\mathcal{D}$ comme un diagramme dans la catégorie $\mathbf{C}/S$ (1.1.3.2). Il est alors tautologique (faites l'exercice) que la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie $\mathbf{C}/S$ existe et s'identifie à $p : \text{colim } \mathcal{D} \rightarrow S$.

(1.6.9.2) Supposons donné pour tout i un morphisme $q_i : S \rightarrow X_i$ de sorte que $f \circ q_i = q_j$ pour tout (i, j) et toute $f \in E_{ij}$. La famille (q_i) induit alors un morphisme $q : S \rightarrow \lim \mathcal{D}$.

Grâce aux q_i , on peut voir $\mathcal{D}$ comme un diagramme dans la catégorie $S \backslash \mathbf{C}$ (1.1.3.2). Il est alors tautologique (faites l'exercice) que la limite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie $S \backslash \mathbf{C}$ existe et s'identifie à $q : S \rightarrow \lim \mathcal{D}$.

Exemples de catégories admettant des colimites

(1.6.10) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans $\mathbf{C}$. Nous allons mentionner un certain nombre de cas dans lesquels $\text{colim } \mathcal{D}$ existe et décrire celle-ci, en laissant encore une fois les vérifications au lecteur.

(1.6.10.1) *Supposons que $\mathbf{C} = \mathbf{Ens}$.* Dans ce cas, $\text{colim } \mathcal{D}$ est le quotient de l'union disjointe ensembliste $\coprod X_i$ par la relation d'équivalence engendrée par les relations $x \sim f(x)$ où $x \in X_i$ et $f \in E_{ij}$ pour un certain couple (i, j) , et la flèche structurale $X_j \rightarrow \text{colim } \mathcal{D}$ est pour tout j l'application composée $\lambda_j : X_j \rightarrow \coprod X_i \rightarrow \text{colim } \mathcal{D}$. On remarque que $\text{colim } \mathcal{D} = \bigcup \lambda_i(X_i)$.

(1.6.10.2) *Supposons que $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$.* La colimite de $\mathcal{D}$ coïncide alors en tant qu'ensemble avec celle construite au 1.6.10.1 ci-dessus; la topologie de $\text{colim } \mathcal{D}$ est obtenue en munissant $\coprod X_i$ de la topologie d'union disjointe (pour laquelle

une partie est ouverte si et seulement si sa trace sur chacun des X_i est ouverte), puis en passant à la topologie quotient. Pour tout j , le morphisme structural $X_j \rightarrow \text{colim } \mathcal{D}$ est l'application λ_j de 1.6.10.1 (qui est continue).

(1.6.10.3) *Supposons que $\mathbf{C} = \mathbf{Ann}$ ou que $\mathbf{C} = A\text{-Alg}$ pour un certain anneau A . La colimite de $\mathcal{D}$ sera décrite plus loin, lorsque nous aurons vu le produit tensoriel.*

(1.6.10.4) *Supposons que $\mathbf{C} = A\text{-Mod}$ pour un certain anneau A . Pour tout i , notons h_i le morphisme canonique de X_i vers la somme directe (externe) $\bigoplus X_i$. La colimite de $\mathcal{D}$ est alors le quotient de $\bigoplus X_i$ par son sous-module engendré par les éléments $h_j(f(x)) - h_i(x)$ où $(i, j) \in I^2$, où $x \in X_i$ et où $f \in E_{ij}$; pour tout j , la flèche structurale $\mu_j: X_j \rightarrow \text{colim } \mathcal{D}$ est la composée de h_j et du morphisme quotient; on remarque que $\text{colim } \mathcal{D}$ est la somme (interne, et non directe en général) des $\mu_i(M_i)$.*

(1.6.10.5) *Supposons que $\mathbf{C} = \mathbf{Gp}$. Nous allons nous contenter d'indiquer ici succinctement la construction de $\text{colim } \mathcal{D}$ (nous ne nous en servons pas). On commence par construire le produit libre $\star_i X_i$ (qui sera la somme disjointe des X_i dans la catégorie des groupes): c'est l'ensemble des mots dont les lettres sont des éléments non triviaux des X_i , deux lettres consécutives n'appartenant jamais au même X_i . Pour tout j , soit ι_j le morphisme canonique $X_j \hookrightarrow \star_i X_i$. La colimite de $\mathcal{D}$ est alors le quotient de $\star_i X_i$ par son plus petit sous-groupe distingué contenant $\iota_i(x)\iota_j(f(x))^{-1}$ pour tout couple (i, j) , tout x appartenant à X_i et toute $f \in E_{ij}$. Pour tout j , la flèche structurale $\nu_j: X_j \rightarrow \text{colim } \mathcal{D}$ est la composée de ι_j et du morphisme quotient; on remarque que $\text{colim } \mathcal{D}$ est engendré par les $\nu_i(X_i)$.*

(1.6.11) Diagrammes commutatifs filtrants. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soit I un ensemble *préordonné*, c'est-à-dire muni d'une relation $\leq$ que l'on suppose réflexive et transitive, mais pas nécessairement antisymétrique; l'exemple qu'on peut avoir en tête est celui d'un anneau muni de la relation de divisibilité.

(1.6.11.1) On peut voir I comme une catégorie, dans laquelle l'ensemble $\text{Hom}(i, j)$ est un singleton si $i \leq j$, et est vide sinon. Donnons-nous un foncteur de I vers $\mathbf{C}$, c'est-à-dire :

- pour tout $i \in I$, un objet X_i de $\mathbf{C}$;
- pour tout $(i, j) \in I^2$ avec $i \leq j$, une flèche f_{ij} de X_i vers X_j , de sorte que $f_{ii} = \text{Id}_{X_i}$ pour tout i , et que $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ dès que $i \leq j \leq k$.

Si l'on pose $E_{ij} = \{f_{ij}\}$ si $i \leq j$ et $E_{ij} = \emptyset$ sinon, la famille $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ est alors un diagramme commutatif dans la catégorie $\mathbf{C}$, que l'on dira *défini* par le foncteur $I \rightarrow \mathbf{C}$ dont on est parti.

(1.6.11.2) On suppose de surcroît que l'ensemble d'indices I est *filtrant*, c'est-à-dire qu'il est non vide et que pour tout couple (i, j) d'éléments de I il existe $k \in I$ avec $i \leq k$ et $j \leq k$ (c'est par exemple le cas d'un anneau muni de la divisibilité: considérer le produit de deux éléments); il revient au même de demander que toute partie finie de I admette un majorant, grâce au petit jeu usuel: l'existence d'un majorant de la partie vide garantira que I est non vide. Nous résumerons la situation en disant que $\mathcal{D}$ est un diagramme *commutatif filtrant*.

(1.6.11.3) *On suppose que $\mathbf{C} = \mathbf{Ens}, \mathbf{Gp}, \mathbf{Ann}, A\text{-Alg}$ ou $A\text{-Mod}$ (pour un certain anneau A). Nous allons tout d'abord donner une description de la*

colimite *ensembliste* de $\mathcal{D}$ qui est spécifique au contexte filtrant et diffère (en apparence seulement, évidemment) de celle de 1.6.10.1. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur la somme disjointe ensembliste $\coprod X_i$ définie comme suit : si $a \in X_i$ et si $b \in X_j$ alors $a\mathcal{R}b$ si et seulement si il existe k majorant i et j tel que $f_{ik}(a) = f_{jk}(b)$. C'est une relation d'équivalence en vertu du caractère filtrant de I (qui sert pour la transitivité, la réflexivité et la symétrie étant évidentes). Nous laissons au lecteur la vérification – triviale – que le quotient $L := \coprod X_i / \mathcal{R}$, muni pour tout j de la composée $\ell_j: X_j \rightarrow \coprod X_i \rightarrow L$, s'identifie à la colimite ensembliste de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire qu'il satisfait la propriété universelle correspondante.

On peut résumer cette construction en disant que la colimite ensembliste $(L, (\ell_i))$ de $\mathcal{D}$ est caractérisée par l'égalité $L = \bigcup \ell_i(X_i)$ et par le fait que pour tout (i, j) , tout $a \in X_i$ et tout $b \in X_j$, on a $\ell_i(a) = \ell_j(b)$ si et seulement si il existe k majorant i et j tel que $f_{ik}(a) = f_{jk}(b)$.

Nous allons maintenant expliquer brièvement comment munir L d'une structure d'objet de $\mathbf{C}$ pour laquelle les ℓ_i seront des morphismes, et qui fera de $(L, (\ell_i))$ la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie $\mathbf{C}$.

Il n'y a rien à faire si $\mathbf{C} = \mathbf{Ens}$. Dans les autres cas, il faut définir une ou plusieurs lois sur L . Indiquons par exemple comment on procède lorsque $\mathbf{C}$ est la catégorie des anneaux, les autres situations se traitant de façon analogue. Soient x et y deux éléments de L ; on peut écrire $x = \ell_i(x_i)$ et $y = \ell_j(y_j)$ pour i et j convenables, avec $x_i \in X_i$ et $y_j \in X_j$. On choisit alors un indice k majorant i et j ; on a $x = \ell_k(x_k)$ et $y = \ell_k(y_k)$, où l'on a posé $x_k = f_{ik}(x_i)$ et $y_k = f_{jk}(y_j)$. On vérifie sans peine que l'élément $\ell_k(x_k + y_k)$ de L ne dépend que de x et y , et on le note $x + y$; de même, l'élément $\ell_k(x_k y_k)$ de L ne dépend que de x et y , et on le note xy . Il est facile de voir que $(L, +, \times)$ est un anneau, dont les éléments 0 et 1 sont respectivement égaux à $\ell_i(0)$ et $\ell_i(1)$ pour n'importe quel $i \in I$ (il est donc vital pour les définir qu'il existe un tel i : ici intervient le fait que $I \neq \emptyset$). Les ℓ_i sont des morphismes d'anneaux par construction, et il est immédiat que $(L, (\ell_i))$ satisfait la propriété universelle de la colimite dans $\mathbf{Ann}$.

(1.6.11.4) Remarque. Dans les catégories algébriques (groupes, anneaux, modules, algèbres), l'ensemble sous-jacent à une colimite *filtrante* est donc la colimite des ensembles sous-jacents. C'est faux en général pour les colimites quelconques. Pensez par exemple au produit libre de deux groupes, ou même tout simplement aux objets initiaux : l'objet initial de $\mathbf{Ann}$ est $\mathbb{Z}$, celui de $\mathbf{Gp}$ est $\{e\}$, et celui de $\mathbf{Ens}$ est $\emptyset$.

1.7 Adjonction

(1.7.1) Définition. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories, et soient $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ deux foncteurs covariants. On dit que F est un *adjoint à gauche* de G , ou que G est un *adjoint à droite* de F , ou que (F, G) est un *couple de foncteurs adjoints*, s'il existe une collection d'isomorphismes

$$\iota_{(A,B)} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, G(B)),$$

paramétrée par $(A, B) \in \mathrm{Ob} \mathbf{C} \times \mathrm{Ob} \mathbf{D}$ et fonctorielle en (A, B) .

(1.7.1.1) Commentaires. La fonctorialité en (A, B) signifie que pour toute flèche $u : A \rightarrow A'$ de $\mathbf{C}$ et toute flèche $v : B \rightarrow B'$ de $\mathbf{D}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A'), B) & \xrightarrow[\iota_{(A', B)}]{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A', G(B)) \\
 \circ F(u) \downarrow & & \downarrow \circ u \\
 \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), B) & \xrightarrow[\iota_{(A, B)}]{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, G(B)) \\
 v \circ \downarrow & & \downarrow G(v) \circ \\
 \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), B') & \xrightarrow[\iota_{(A, B')}]{{\simeq}} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, G(B'))
 \end{array}$$

commute.

(1.7.1.2) Exercice. Décrire la donnée des $\iota_{(A, B)}$ comme un morphisme de foncteurs.

(1.7.2) Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories, et soit $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ un foncteur covariant.

(1.7.2.1) Supposons que G admet un adjoint à gauche F , et fixons un objet A de $\mathbf{C}$. Le foncteur covariant

$$B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, G(B))$$

de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{Ens}$ est alors isomorphe à

$$B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), B).$$

Il est donc représentable, et $F(A)$ est son représentant.

(1.7.2.2) Supposons réciproquement que pour tout objet A de $\mathbf{C}$, le foncteur $B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, G(B))$ soit représentable, et notons $F(A)$ son représentant.

Soit maintenant $u : A \rightarrow A'$ une flèche de $\mathbf{C}$. Elle induit un morphisme de foncteurs

$$[B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A', G(B))] \longrightarrow [B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, G(B))],$$

d'où par le lemme de Yoneda un morphisme $F(u) : F(A) \rightarrow F(A')$. Ainsi, $A \mapsto F(A)$ apparaît comme un foncteur covariant de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$, qui est par construction un adjoint à gauche de G .

(1.7.3) Commentaires.

(1.7.3.1) Le lecteur attentif aura peut-être remarqué que nous sommes allés un peu vite : par construction, on dispose pour tout objet A d'un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, G(B))$$

qui est fonctoriel en B , mais nous n'avons pas vérifié explicitement la fonctorialité en A . Celle-ci peut se justifier *grosso modo* ainsi – nous vous invitons à écrire vous-mêmes les détails.

Lorsque nous disons que $F(A)$ est le représentant de $B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, G(B))$, nous commettons un abus. En effet, le représentant consiste en réalité en la donnée de $F(A)$ et d'un objet universel, à savoir ici un morphisme de A

vers $G(F(A))$; et le lemme de Yoneda que nous avons appliqué ci-dessus fournit un morphisme $F(u) : F(A) \rightarrow F(A')$ compatible aux objets universels livrés avec A et A' . C'est cette compatibilité qui garantit la fonctorialité attendue.

(1.7.3.2) Supposons que G admette deux adjoints à gauche F_1 et F_2 ; donnons-nous deux systèmes d'isomorphismes $(\iota_{(A,B)}^1)$ et $(\iota_{(A,B)}^2)$ décrivant l'adjonction respective des couples (F_1, G) et (F_2, G) . On déduit alors du lemme de Yoneda (appliqué, comme au 1.7.3.1 ci-dessus, pour chaque $A \in \text{Ob } \mathbf{C}$, avec prise en compte des objets universels) qu'il existe un unique isomorphisme $F_1 \simeq F_2$ compatible aux systèmes $(\iota_{(A,B)}^1)$ et $(\iota_{(A,B)}^2)$, dans un sens que nous laissons au lecteur le soin de préciser. Nous nous permettons pour cette raison de parler de l' adjoint à gauche de G .

(1.7.3.3) Nous venons d'évoquer diverses questions liées à l'existence éventuelle d'un adjoint à gauche d'un foncteur. Nous vous invitons à énoncer les résultats analogues concernant l'adjonction à droite.

(1.7.4) Exemples de foncteurs adjoints.

(1.7.4.1) Soit A un anneau commutatif unitaire et soit $O_1 : A\text{-Mod} \rightarrow \text{Ens}$ le foncteur d'oubli. Pour tout ensemble X , notons $L_1(X)$ le A -module libre engendré par X , c'est-à-dire le A -module $\bigoplus_{x \in X} A \cdot e_x$.

Pour tout A -module M et tout ensemble X on a un isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_{\text{Ens}}(X, O_1(M)) \simeq \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(L_1(X), M),$$

qui associe à une application $\varphi : X \rightarrow M$ son «prolongement par linéarité», *i.e.* l'unique application A -linéaire de $L_1(X)$ dans M envoyant e_x sur $\varphi(x)$ pour tout x . Il est visiblement fonctoriel en X et M ; en conséquence, L_1 est l'adjoint à gauche de O_1 .

(1.7.4.2) Soit $O_2 : \mathbf{Gp} \rightarrow \text{Ens}$ le foncteur d'oubli. Pour tout ensemble X , on note $L_2(X)$ le *groupe libre* engendré par X , défini comme suit. On introduit pour chaque élément x de X un symbole x^{-1} , et l'on note X^{-1} l'ensemble des x^{-1} pour x parcourant X . Un élément de $L_2(X)$ est alors un «mot réduit sur l'alphabet $X \cup X^{-1}$ », c'est-à-dire une suite finie d'éléments de $X \cup X^{-1}$ ne comprenant aucune séquence de deux termes consécutifs de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$ pour $x \in X$. On multiplie deux mots en les concaténant puis en réduisant le mot obtenu, c'est-à-dire en éliminant les séquences xx^{-1} ou $x^{-1}x$ tant qu'on en rencontre; l'élément neutre est le mot vide.

Pour tout groupe G et tout ensemble X on a un isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_{\text{Ens}}(X, O_2(G)) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Gp}}(L_2(X), G),$$

qui associe à une application $\varphi : X \rightarrow G$ son «prolongement homomorphique», *i.e.* l'unique morphisme de groupes de $L_2(X)$ dans G envoyant x sur $\varphi(x)$ pour tout $x \in X$ (défini par ma formule que le lecteur imagine). Il est visiblement fonctoriel en X et G ; en conséquence, L_2 est l'adjoint à gauche de O_2 .

(1.7.4.3) Soit A un anneau commutatif unitaire, et soit O_3 le foncteur d'oubli $B \mapsto (B, \times)$ de la catégorie des A -algèbres vers celle des monoïdes commutatifs avec unité. Soit L_3 le foncteur qui associe à un tel monoïde Γ l'algèbre $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} Ae_\gamma$ où $e_\gamma \cdot e_{\gamma'} = e_{\gamma\gamma'}$ pour tout (γ, γ') .

Pour toute A -algèbre B et tout monoïde commutatif avec unité Γ , on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{mon}}(\Gamma, O_3(B)) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(L_3(\Gamma), B),$$

qui associe à un morphisme $\varphi : \Gamma \rightarrow (B, \times)$ l'unique morphisme de A -algèbres de $L_3(\Gamma)$ dans B envoyant e_γ sur $\varphi(\gamma)$ pour tout γ . Il est visiblement fonctoriel en Γ et B ; en conséquence, L_3 est l'adjoint à gauche de O_3 .

(1.7.4.4) Soit I le foncteur d'inclusion de $\mathbf{Ab}$ dans $\mathbf{Gp}$, et soit A le foncteur de $\mathbf{Gp}$ dans $\mathbf{Ab}$ qui envoie un groupe G sur son abélianisé $G / \langle ghg^{-1}h^{-1} \rangle_{(g,h) \in G^2}$. Soit H un groupe abélien et soit G un groupe. On a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gp}}(G, I(H)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A(G), H),$$

qui envoie un morphisme $\varphi : G \rightarrow H$ vers l'unique morphisme $A(G) \rightarrow H$ par lequel il se factorise (son existence est assurée par la propriété universelle du quotient). Il est visiblement fonctoriel en G et H ; en conséquence, A est l'adjoint à gauche de I .

(1.7.4.5) Soit O_4 le foncteur d'oubli de $\mathbf{Top}$ dans $\mathbf{Ens}$, et soit Dis (resp. Gro) le foncteur de $\mathbf{Ens}$ vers $\mathbf{Top}$ consistant à munir un ensemble de la topologie discrète (resp. grossière).

Toute application ensembliste entre espaces topologiques est automatiquement continue dès lors que la topologie de sa source (resp. son but) est discrète (resp. grossière).

On dispose donc pour toute ensemble X et tout espace topologique T de deux bijections naturelles

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(X, O_4(T)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathrm{Dis}(X), T) \\ \text{et } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(O_4(T), X) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(T, \mathrm{Gro}(X)). \end{aligned}$$

Elles sont visiblement fonctorielles en X et T ; en conséquence, Dis est l'adjoint à gauche de O_4 , et Gro est son adjoint à droite.

(1.7.4.6) Soient X, Y et Z trois ensembles. On dispose d'une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(Y, Z)) :$$

elle envoie f sur $x \mapsto [y \mapsto f(x, y)]$, et sa réciproque envoie g sur $(x, y) \mapsto g(x)(y)$. Elle est visiblement fonctorielle en X, Y, Z . En conséquence, Y étant fixé, le foncteur $X \mapsto X \times Y$ est l'adjoint à gauche de $Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(Y, Z)$.

(1.7.4.7) Exercice. Montrez que si un foncteur covariant F admet un quasi-inverse G alors G est à la fois adjoint à F à gauche et à droite.

Adjonction et passage à la limite

(1.7.5) Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories, et soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans $\mathbf{C}$. Soit F un foncteur de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$. Supposons que F admet un adjoint à droite G , et que $\mathrm{colim} \mathcal{D}$ existe dans $\mathbf{C}$. Soit Y un objet de $\mathbf{D}$, et soit $F(\mathcal{D})$ le diagramme de $\mathbf{D}$ déduit de $\mathcal{D}$ en appliquant F à chacun de ses constituants

(objets et morphismes). Notons E l'ensemble des triplets (i, j, f) avec $f \in E_{ij}$. L'ensemble $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(\mathcal{D}), Y)$ est égal à

$$\begin{aligned} & \{(f_i : F(X_i) \rightarrow Y), f_j \circ F(f) = f_i \mid \forall (i, j, f) \in E\} \\ &= \{(g_i : X_i \rightarrow G(Y)), g_j \circ f = g_i \mid \forall (i, j, f) \in E\} \quad (\text{par adjonction}) \\ &= \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathcal{D}, G(Y)) \\ &= \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\text{colim } \mathcal{D}, G(Y)) \quad (\text{par définition de la colimite}) \\ &= \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(\text{colim } \mathcal{D}), Y) \quad (\text{par adjonction}). \end{aligned}$$

En conséquence, $\text{colim } F(\mathcal{D})$ existe et est égal à $F(\text{colim } \mathcal{D})$: le foncteur F préserve les colimites.

Nous laissons le lecteur démontrer par une méthode analogue (ou en utilisant les catégories opposées) que si F admet un adjoint à gauche, il préserve les limites.

(1.7.6) Adjonction et préservations des limites : exemples.

(1.7.6.1) Nous avons vu au 1.6.10.2 que dans la catégorie des espaces topologiques, l'ensemble sous-jacent à une colimite est la colimite des ensembles sous-jacents ; autrement dit, le foncteur oubli de **Top** vers **Ens** préserve les colimites. Il a une excellente raison pour ce faire : il admet en effet un adjoint à droite (1.7.4.5).

Nous avons par contre signalé en 1.6.11.4 qu'en général, l'ensemble sous-jacent à une colimite d'anneaux, groupes, modules ou algèbres n'est pas la colimite des ensembles sous-jacents ; il en résulte que les foncteurs oubli correspondant n'ont pas d'adjoint à droite.

(1.7.6.2) Nous avons vu au 1.6.8.2 et au 1.6.8.3 que dans les catégories des espaces topologiques, des groupes, des anneaux, des modules et des algèbres l'ensemble sous-jacent à une limite est la limite des ensembles sous-jacents ; autrement dit, les foncteurs oubli de **Top**, **Ann** et **Gp** vers **Ens** préservent les limites. Ils ont une excellente raison pour ce faire : ils admettent en effet tous un adjoint à gauche. Celui-ci est décrit en 1.7.4.5 pour les espaces topologiques, en 1.7.4.1 pour les A -modules et en 1.7.4.2 pour les groupes ; en ce qui concerne les anneaux et les algèbres, nous laissons le lecteur construire lui-même les anneau et algèbre libres sur un ensemble X dans l'esprit de ce qui a été fait en 1.7.4.1, 1.7.4.2 et 1.7.4.3.

Chapitre 2

Algèbre commutative

2.1 Localisation

(2.1.1) Soit A un anneau. Lorsqu'on se donne un sous-ensemble P de A , on sait construire un anneau « défini à partir de A , en *décrétant* que les éléments de P sont nuls, et en n'imposant aucune autre contrainte que celle-ci, et ses conséquences découlant de la théorie générale des anneaux » : c'est le quotient $A/(P)$. Celui-ci est caractérisé par sa propriété universelle, c'est-à-dire encore par le foncteur (ici, covariant) qu'il représente.

C'est en fait une illustration d'un phénomène assez général : à chaque fois lorsqu'on veut intuitivement *imposer* une contrainte, et *seulement* cette contrainte, la construction rigoureuse qui répond à ce caprice s'exprime en termes de propriété universelle, ou encore de foncteur à représenter.

(2.1.2) Nous allons en voir un nouvel exemple avec ce qu'on appelle la *localisation*. Soit A un anneau, et soit S un sous-ensemble de A . Le but intuitif est de construire un objet à partir de A en imposant aux éléments de S d'être inversibles – et rien d'autre. Techniquement, on s'intéresse au foncteur covariant

$$F : B \mapsto \{f \in \text{Hom}(A, B), f(s) \in B^\times \ \forall s \in S\},$$

et nous allons montrer de deux façons différentes qu'il est représentable, c'est-à-dire qu'il existe un anneau C et un morphisme $g : A \rightarrow C$ tels que :

- $g(S) \subset C^\times$;
- pour tout $f : A \rightarrow B$ tel que $f(S) \subset B^\times$, il existe un unique $h : C \rightarrow B$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & \nearrow h & \\ C & & \end{array} .$$

(2.1.3) *Première preuve.* Posons

$$C = A[T_s]_{s \in S} / (sT_s - 1)_{s \in S}$$

et $g = a \mapsto \bar{a}$.

(2.1.3.1) Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme tel que $f(S) \subset B^\times$; nous allons montrer l'existence d'un unique $h : C \rightarrow B$ tel que $f = h \circ g$. Voyant B et C comme des A -algèbres via f et g respectivement, cela revient à montrer l'existence d'un unique morphisme h de A -algèbres de C vers B .

Unicité. Soit h un tel morphisme. On a alors pour tout $s \in S$ les égalités

$$1 = h(\overline{T_s s}) = h(\overline{T_s})h(\bar{s}) = h(\overline{T_s})h(g(s)) = h(\overline{T_s})f(s),$$

et donc $h(\overline{T_s}) = f(s)^{-1}$. Comme les $\overline{T_s}$ engendrent la A -algèbre C , il y a au plus un tel morphisme h .

Existence. Soit φ l'unique morphisme de A -algèbres de $A[T_s]_{s \in S}$ vers B qui envoie T_s sur $f(s)^{-1}$ pour tout $s \in S$. On a $\varphi(T_s s - 1) = 0$ pour tout $s \in S$ et φ induit donc par passage au quotient un morphisme d'algèbres $h : C \rightarrow B$.

(2.1.3.2) Cette preuve est la plus économique, et en un sens la plus naturelle : on a *forcé* les éléments de S à être inversibles, en adjoignant formellement à A un symbole T_s pour chaque élément s de S , et en imposant par décret l'égalité $sT_s = 1$.

Mais elle présente un défaut : il est *en pratique* extrêmement difficile d'arriver à dire quoi que ce soit sur la A -algèbre $A[T_s]_{s \in S}/(sT_s - 1)_{s \in S}$; c'est un cas où la connaissance du foncteur représenté par un objet qui, *en théorie*, caractérise l'objet en question à isomorphisme près, n'est pas suffisante.

Par exemple, il semble *a priori* impossible de donner un critère simple permettant de savoir si $A[T_s]_{s \in S}/(sT_s - 1)_{s \in S}$ est nul ou non. Nous allons donc donner une autre construction du représentant de F .

(2.1.3.3) *Réduction au cas d'une partie multiplicative.* Convenons de dire qu'une partie T de A est *multiplicative* si elle contient 1 et si $ab \in T$ dès que $a \in T$ et $b \in T$ (on peut une fois encore condenser la définition en style bourbakiste, en demandant simplement que T soit stable par produit fini, ce qui la force à contenir 1 puisque ce dernier est le produit vide). L'ensemble $\widehat{S}$ des produits finis d'éléments de S (en incluant 1 qui est le produit vide) est visiblement la plus petite partie multiplicative de A contenant S ; nous dirons que c'est la partie multiplicative *engendrée par S* . Si B est un anneau et si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme, il est immédiat que $f(s)$ est inversible pour tout $s \in S$ si et seulement si $f(s)$ est inversible pour tout $s \in \widehat{S}$. On peut donc, pour étudier le foncteur F , remplacer S par $\widehat{S}$; autrement dit, on s'est ramené au cas où S est multiplicative.

(2.1.3.4) On définit alors sur $A \times S$ la relation $\mathcal{R}$ suivante : $(a, s)\mathcal{R}(b, t)$ si et seulement si il existe $r \in S$ tel que $r(at - bs) = 0$. On vérifie que c'est une relation d'équivalence, et l'on note $S^{-1}A$ le quotient correspondant.

Les formules

$$((a, s); (b, t)) \mapsto (at + bs, st) \text{ et } ((a, s); (b, t)) \mapsto (ab, st)$$

passent au quotient, et définissent deux lois $+$ et $\times$ sur $S^{-1}A$ qui en font un anneau commutatif.

Si $(a, s) \in A \times S$, on écrira $\frac{a}{s}$ au lieu de $\overline{(a, s)}$. Cette notation permet de disposer des formules naturelles

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \text{ et } \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{as}{bt},$$

et l'on a

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \iff \exists r \in S, r(at - bs) = 0.$$

L'application $a \mapsto \frac{a}{1}$ est un morphisme d'anneaux de A dans $S^{-1}A$, et si $s \in S$ alors $\frac{s}{1}$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{s}$.

Le couple $(S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1})$ représente le foncteur F . En effet, soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme tel que $f(S) \subset B^\times$; nous allons montrer qu'il existe un unique morphisme h de $S^{-1}A$ dans B tel que $h(\frac{a}{1}) = f(a)$ pour tout $a \in A$.

Unicité. Soit h un tel morphisme. On a alors pour tout $(a, s) \in A \times S$ les égalités

$$h\left(\frac{a}{s}\right) = h\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s}\right) = h\left(\frac{a}{1}\right) h\left(\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right) = f(a)f(s)^{-1},$$

d'où l'unicité.

Existence. On vérifie immédiatement que l'application

$$A \times S \rightarrow B, (a, s) \mapsto f(a)f(s)^{-1}$$

passse au quotient par $\mathcal{R}$. Elle induit donc une application $h : S^{-1}A \rightarrow B$, qui envoie toute fraction $\frac{a}{s}$ sur $f(a)f(s)^{-1}$. Par un calcul explicite, on s'assure que h est un morphisme d'anneaux, et l'on a bien $h(\frac{a}{1}) = f(a)$ pour tout $a \in A$.

On dit que $S^{-1}A$ est le *localisé* de A par rapport à la partie multiplicative S .

(2.1.4) Commentaires.

(2.1.4.1) La condition d'égalité entre fractions de $S^{-1}A$ est plus compliquée que le bon vieux produit en croix traditionnel; c'est le prix à payer pour travailler avec des anneaux quelconques, *i.e.* non nécessairement intègres ni réduits. Notons toutefois que si S ne contient pas de diviseurs de zéro – c'est par exemple le cas si A est intègre et si $0 \notin S$ – la condition «il existe $r \in S$ tel que $r(at - bs) = 0$ » équivaut à la relation usuelle « $at - bs = 0$ ».

(2.1.4.2) La flèche $A \rightarrow S^{-1}A$ n'est pas injective en général, c'est la raison pour laquelle on préfère souvent écrire $\frac{a}{1}$ et non a . Son noyau est facile à décrire : c'est l'ensemble des éléments a de A tels qu'il existe $r \in S$ vérifiant l'égalité $ra = 0$. Une fois encore, les choses se simplifient si S ne contient pas de diviseurs de zéros (et donc en particulier si A est intègre et si $0 \notin S$) : on voit immédiatement que sous ces hypothèses, $a \mapsto \frac{a}{1}$ est injective.

(2.1.4.3) L'anneau $S^{-1}A$ est nul si et seulement si $1 = 0$ dans $S^{-1}A$, c'est-à-dire encore si et seulement si $\frac{1}{1} = 0$, donc si et seulement si il existe $r \in S$ tel que $r \cdot 1 = 0$. *Autrement dit, $S^{-1}A$ est nul si et seulement si $0 \in S$.*

(2.1.4.4) On a défini l'anneau $S^{-1}A$ comme représentant du foncteur F défini en 2.1.2. Par un raisonnement en tout point analogue à celui tenu en 1.4.2.2, on en déduit que pour toute A -algèbre $(B, f : A \rightarrow B)$, l'ensemble des morphismes

de A -algèbres de $S^{-1}A$ dans B est un singleton si $f(S) \subset B^\times$, et est vide sinon ; puis que la A -algèbre $S^{-1}A$ représente le foncteur de $A\text{-Alg}$ dans $\mathbf{Ens}$ qui envoie $(B, f: \rightarrow B)$ sur $\{*\}$ si $f(S) \subset B^\times$ et sur $\emptyset$ sinon.

(2.1.5) Exemples.

(2.1.5.1) Soit A un anneau intègre. Le sous-ensemble $S := A \setminus \{0\}$ en est une partie multiplicative. Le localisé $S^{-1}A$ est non nul puisque $0 \notin S$, et si $\frac{a}{s}$ est un élément non nul de $S^{-1}A$ alors $a \neq 0$; en conséquence, $a \in S$ et $\frac{a}{s}$ est inversible d'inverse $\frac{s}{a}$. Il s'ensuit que $S^{-1}A$ est un corps, appelé *corps des fractions de A* et souvent noté $\text{Frac } A$.

Puisque $0 \notin S$, l'anneau intègre A s'injecte dans $\text{Frac } A$. Ce dernier est précisément le plus petit corps contenant A , dans le sens suivant : pour tout corps K et tout morphisme *injectif* $A \hookrightarrow K$, il existe un unique plongement $\text{Frac } A \hookrightarrow K$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & K \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{Frac } A & & \end{array}$$

commute. En effet, la flèche injective $A \rightarrow K$ envoie tout élément de $S = A \setminus \{0\}$ sur un élément non nul, et partant inversible, de K ; l'assertion requise est alors un cas particulier de la propriété universelle de $S^{-1}A$.

(2.1.5.2) Soit A un anneau et soit $f \in A$. La partie multiplicative S engendrée par f est $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, et le localisé correspondant est le plus souvent noté A_f . On déduit de la construction par quotient décrite en 2.1.3 que $A_f \simeq A[T]/(fT - 1)$.

En vertu de 2.1.4.3, l'anneau $A_f = 0$ est nul si et seulement si S contient 0, c'est-à-dire si et seulement si f est nilpotent.

Donnons une preuve alternative de ce fait. L'anneau A_f est nul si et seulement si $A[T]/(fT - 1) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $1 - Tf$ est inversible dans $A[T]$. Or $1 - Tf$ est inversible dans $A[[T]]$, d'inverse $g = \sum f^i T^i$. Par unicité de l'inverse (lorsqu'il existe), on voit que $1 - Tf$ est inversible dans $A[T]$ si et seulement si $g \in A[T]$, c'est-à-dire si et seulement si f est nilpotent.

(2.1.6) Fonctorialité. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Soit S une partie multiplicative de A , et soit T une partie multiplicative de B telle que $f(S) \subset T$ (par exemple, $T = f(S)$). La flèche composée $A \rightarrow B \rightarrow T^{-1}B$ envoyant chaque élément de S sur un inversible, elle induit une flèche de $S^{-1}A$ vers $T^{-1}B$, donnée par les formules

$$\frac{a}{s} \mapsto \frac{f(a)}{f(s)}.$$

(2.1.7) À propos des éléments inversibles de $S^{-1}A$. Soit A un anneau et soit S une partie multiplicative de A . Soit S^b l'ensemble des éléments de A qui deviennent inversibles dans $S^{-1}A$ (ce n'est pas une notation standard, nous ne nous en servons que dans la brève discussion qui suit). C'est une partie multiplicative de A qui contient S par définition, mais on prendra garde que l'inclusion $S \subset S^b$ est en général *stricte* ; par exemple, S^b contient

automatiquement $A^\times$, qui n'a aucune raison *a priori* d'être contenu dans S . Si T est une partie multiplicative contenant S on a $S^b \subset T^b$, puisque $A \rightarrow T^{-1}A$ se factorise par $S^{-1}A$.

(2.1.7.1) Il est en fait possible de décrire précisément S^b : c'est l'ensemble des éléments $a \in A$ tels qu'il existe b vérifiant $ab \in S$. En effet, s'il existe un tel b alors $\frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1}$ est inversible dans $S^{-1}A$, ce qui force $\frac{a}{1}$ (et $\frac{b}{1}$) à l'être aussi, et $a \in S^b$.

Réciproquement, si $a \in S^b$, il existe $\alpha \in A$ et $s \in S$ tels que $\frac{a}{1} \cdot \frac{\alpha}{s} = \frac{1}{1}$, ce qui veut dire qu'il existe $t \in S$ tel que $t(a\alpha - s) = 0$; on a donc $t\alpha a = st \in S$, ce qui achève de prouver l'assertion requise.

(2.1.7.2) On peut également donner une description fonctorielle de S^b : c'est l'ensemble E des éléments a de A tel que $\varphi(a) \in B^\times$ pour tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow B$ vérifiant $\varphi(S) \subset B^\times$. En effet, si $a \in E$ l'image de a dans $S^{-1}A$ est inversible, puisque $A \rightarrow S^{-1}A$ envoie chaque élément de S sur un inversible; ainsi, $E \subset S^b$.

Réciproquement, si $a \in S^b$ et si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux tel que $\varphi(S) \subset B^\times$ alors comme φ se factorise (d'une unique manière) par la flèche $A \rightarrow S^{-1}A$ et comme a s'envoie par définition de S^b dans $(S^{-1}A)^\times$, on a $\varphi(a) \in B^\times$ et $a \in E$.

(2.1.7.3) Soit Σ une partie multiplicative de A telle que $S \subset \Sigma \subset S^b$. Comme $S \subset \Sigma$ on a un morphisme naturel de $S^{-1}A$ dans $\Sigma^{-1}A$, morphisme qui induit en vertu de 2.1.7.2 un isomorphisme entre les foncteurs représentés par ces deux A -algèbres; en conséquence, ce morphisme est un isomorphisme. On peut bien entendu s'en assurer de manière plus terre-à-terre à partir de la description explicite de S^b donnée au 2.1.7.1; l'exercice est laissé au lecteur.

On déduit de ce fait, ou directement du 2.1.7.2 ci-dessus, que $(S^b)^b = S^b$.

(2.1.8) Transitivité de la localisation. Soit A un anneau, soit S une partie multiplicative de A et soit T une partie multiplicative de A contenant S .

(2.1.8.1) Soit Σ l'image de T par le morphisme naturel $A \rightarrow S^{-1}A$. La composée $A \rightarrow S^{-1}A \rightarrow \Sigma^{-1}(S^{-1}A)$ envoyant T dans l'ensemble des éléments inversibles du but, elle induit une flèche $\Sigma^{-1}A \rightarrow T^{-1}(S^{-1}A)$.

Cette flèche est un isomorphisme. On peut en effet le voir ou bien par un calcul direct et sans difficultés sur les fractions, que nous laissons au lecteur, ou bien à l'aide du lemme de Yoneda; nous allons détailler cette dernière approche.

Soit B un anneau. Se donner un morphisme de $\Sigma^{-1}(S^{-1}A)$ dans B revient à se donner un morphisme de $S^{-1}A$ dans B qui envoie Σ dans $B^\times$. Mais se donner un morphisme φ de $S^{-1}A$ dans B revient à se donner un morphisme ψ de A dans B tel que $\psi(S) \subset B^\times$, et l'on a alors $\varphi(\Sigma) = \psi(T)$ puisque ψ est simplement la composée de $A \rightarrow S^{-1}A$ et de φ . En particulier, $\varphi(\Sigma) \subset B^\times$ si et seulement si $\psi(T) \subset B^\times$. En conclusion, se donner un morphisme de $\Sigma^{-1}(S^{-1}A)$ dans B revient à se donner un morphisme de A dans B qui envoie T dans $B^\times$, c'est-à-dire encore un morphisme de $T^{-1}A$ dans B , d'où notre assertion.

(2.1.8.2) Soit Σ' une partie multiplicative de $S^{-1}A$ comprise entre Σ et Σ^b (c'est par exemple le cas si Σ' est engendrée par Σ et par des éléments inversibles de $S^{-1}A$). Il résulte de 2.1.7.3 et 2.1.8.1 que la flèche naturelle $T^{-1}A \rightarrow (\Sigma')^{-1}(S^{-1}A)$ est un isomorphisme.

(2.1.9) Localisation et colimite : le cas filtrant. Soit A un anneau, soit I un ensemble préordonné filtrant (1.6.11 et 1.6.11.3) et soit Σ une partie multiplicative de A . Supposons donnée pour tout $i \in I$ une partie multiplicative S_i de A contenue dans Σ , et faisons les hypothèses suivantes :

- $\Sigma = \bigcup S_i$;
- pour tout $(i, j) \in I^2$ avec $i \leq j$, les éléments de S_i deviennent inversibles dans $S_j^{-1}A$ (il suffit pour cela que $S_i \subset S_j$, mais ce n'est pas nécessaire, cf. 2.1.7 et sq.).

Posons

$$\mathcal{D} = ((S_i^{-1}A)_{i \in I}, (S_i^{-1}A \rightarrow S_j^{-1}A)_{i \leq j}).$$

C'est un diagramme commutatif filtrant dans la catégorie des A -algèbres. La famille des flèches canoniques $S_i^{-1}A \rightarrow \Sigma^{-1}A$ définit un morphisme de $\mathcal{D}$ dans $\Sigma^{-1}A$, dont nous allons montrer qu'il induit un isomorphisme

$$\operatorname{colim} \mathcal{D} \simeq \Sigma^{-1}A.$$

En vertu de la description explicite des colimites filtrantes donnée en 1.6.11.3, cet énoncé équivaut à la validité des deux assertions qui suivent.

(2.1.9.1) Soit $\alpha \in \Sigma^{-1}A$. Il existe i tel que α provienne de $S_i^{-1}A$. Mais c'est évident : par définition, α s'écrit $\frac{a}{s}$ avec $a \in A$ et $s \in \Sigma$. Comme Σ est la réunion des S_i , il existe i tel que $s \in S_i$, et α est dès lors égal à l'image de l'élément $\frac{a}{s}$ de $S_i^{-1}A$.

(2.1.9.2) Soit $(i, j) \in I^2$, soit $\alpha \in S_i^{-1}A$ et soit $\beta \in S_j^{-1}A$. Supposons que α et β ont même image dans $\Sigma^{-1}A$; il existe alors un majorant k de $\{i, j\}$ tel que α et β aient déjà même image dans $S_k^{-1}A$. Pour le voir, on écrit $\alpha = \frac{a}{s}$ et $\beta = \frac{b}{t}$ avec $(a, b) \in A^2$, $s \in S_i$ et $t \in S_j$. Comme α et β ont même image dans $\Sigma^{-1}A$, il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma(at - bs) = 0$. Puisque Σ est la réunion des S_i , il existe ℓ tel que $\sigma \in S_\ell$. Choisissons un majorant k de $\{i, j, \ell\}$. Comme $k \geq \ell$, l'élément σ est inversible dans $S_k^{-1}A$, et l'égalité $\sigma(at - bs) = 0$ implique donc que $at - bs = 0$ dans $S_k^{-1}A$, et partant que $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ dans $S_k^{-1}A$, ce qui termine la preuve.

(2.1.9.3) Remarque. Comme la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des A -algèbres «est» aussi sa colimite dans la catégorie des anneaux ainsi que dans celle des A -modules (cela découle de 1.6.11.3), il résulte de ce qui précède que $\Sigma^{-1}A$ s'identifie également à la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des anneaux et dans celle des A -modules.

(2.1.10) Localisation et colimite : le cas général. Nous allons donner dans ce qui suit une preuve plus conceptuelle du fait que le morphisme de A -algèbres $\operatorname{colim} \mathcal{D} \rightarrow \Sigma^{-1}A$ de 2.1.9 est un isomorphisme ; cette nouvelle démonstration a l'avantage de marcher sous des hypothèses nettement plus faibles que nous allons maintenant énoncer.

On conserve les notations A et Σ de 2.1.9. On désigne par contre maintenant par I un ensemble quelconque, et l'on se donne pour tout $i \in I$ une partie multiplicative S_i de A contenue dans Σ ; nous supposons simplement que les S_i engendrent multiplicativement Σ .

On se donne un diagramme $\mathcal{D}$ dans la catégorie des A -algèbres dont la famille d'objets est $(S_i^{-1}A)_i$; on n'impose rien à la famille des flèches de $\mathcal{D}$.

(2.1.10.1) Soit $(B, f: A \rightarrow B)$ une A -algèbre; pour toute partie multiplicative S de A , l'ensemble $\text{Hom}_{A\text{-Alg}}(S^{-1}A, B)$ est un singleton si $f(S) \subset B^\times$, et est vide sinon. Il s'ensuit en vertu de 1.6.7 que $\text{Hom}_{A\text{-Alg}}(\mathcal{D}, B)$ est un singleton si $f(S_i) \subset B^\times$ pour tout i , et est vide sinon, et ce *quelles que soient les flèches de $\mathcal{D}$* .

Comme les S_i engendrent multiplicativement Σ , on a $f(S_i) \subset B^\times$ pour tout i si et seulement si $f(\Sigma) \subset B^\times$. En conséquence, on dispose d'un isomorphisme fonctoriel en B entre $\text{Hom}_{A\text{-Alg}}(\mathcal{D}, B)$ et $\text{Hom}_{A\text{-Alg}}(\Sigma^{-1}A, B)$, qui montre que $\Sigma^{-1}A$ s'identifie à la colimite du diagramme $\mathcal{D}$.

(2.1.10.2) *Commentaires.* Insistons à nouveau sur le fait que ce qui précède vaut pour *tout* diagramme $\mathcal{D}$ dont la famille d'objets est $(S_i^{-1}A)_i$. C'est par exemple le cas du diagramme sans flèches : la A -algèbre $\Sigma^{-1}A$ est ainsi en particulier la somme disjointe des $S_i^{-1}A$.

On prendra garde qu'ici, contrairement à ce qui valait plus haut, (cf. 2.1.9.3), l'identification entre $\Sigma^{-1}A$ et $\text{colim } \mathcal{D}$ n'est avérée *a priori* que dans la catégorie des A -algèbres, mais pas dans celle des anneaux ou des A -modules; en effet, la «coïncidence» des colimites dans les différentes catégories est une spécificité du cas filtrant, prise en défaut en général.

Ainsi, on déduit de ce qui précède que $\mathbb{Z}[1/6]$ est la somme disjointe de $\mathbb{Z}[1/2]$ et $\mathbb{Z}[1/3]$ dans la catégorie des $\mathbb{Z}$ -algèbres, c'est-à-dire des anneaux; mais leur somme disjointe comme $\mathbb{Z}$ -modules est égale à $\mathbb{Z}[1/2] \oplus \mathbb{Z}[1/3]$, et la flèche naturelle

$$\mathbb{Z}[1/2] \oplus \mathbb{Z}[1/3] \rightarrow \mathbb{Z}[1/6]$$

n'est pas injective (l'élément $(1, -1)$ appartenant par exemple à son noyau).

2.2 Idéaux premiers et maximaux

Un nouveau point de vue sur les idéaux premiers et maximaux

Ce paragraphe ne contient à proprement parler aucun résultat nouveau. Il vise simplement à présenter une approche des idéaux premiers et maximaux qui est sans doute un peu différente de celle dont vous avez l'habitude, et imprègne (le plus souvent implicitement) la géométrie algébrique à la Grothendieck.

(2.2.1) Rappels des définitions. Soit A un anneau. Un idéal $\mathfrak{p}$ de A est dit *premier* s'il est strict et si $ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$. Il revient au même de demander que $A/\mathfrak{p}$ soit un anneau intègre.

Un idéal $\mathfrak{m}$ de A est dit *maximal* s'il est strict et s'il est maximal *en tant qu'idéal strict*. Cela revient à demander que $A/\mathfrak{m}$ ait exactement deux idéaux, à savoir $\{0\}$ et $A/\mathfrak{m}$; autrement dit, $\mathfrak{m}$ est maximal si et seulement si $A/\mathfrak{m}$ est un corps. On déduit de cette dernière caractérisation que tout idéal maximal est premier.

(2.2.2) Soit A un anneau et soit I un idéal strict de A . L'ensemble $\mathcal{E}$ des idéaux stricts de A contenant I , ordonné par l'inclusion, est inductif. Il est en effet non vide (il contient I) et si $\mathcal{P}$ est une partie non vide et totalement ordonnée de $\mathcal{E}$, le sous-ensemble $\bigcup_{J \in \mathcal{P}} J$ est un idéal de A , qui contient I et est strict – car s'il contenait 1, celui-ci appartiendrait à un certain idéal $J \in \mathcal{P}$, ce qui est absurde ; c'est donc un élément de $\mathcal{E}$ qui majore $\mathcal{P}$ par construction.

Il s'ensuit par le lemme de Zorn que I est contenu dans un idéal maximal. Si A est non nul il possède donc un idéal maximal : appliquer ce qui précède avec $I = \{0\}$, qui est alors strict.

(2.2.3) On voit en particulier que tout anneau non nul possède un idéal *premier*. Cette propriété est *a priori* plus faible que l'existence d'un idéal maximal, mais elle ne peut pas à ma connaissance être établie directement.

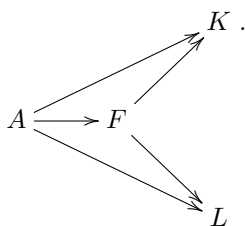
Notez par ailleurs que l'anneau nul n'a pas d'idéal strict, et *a fortiori* pas d'idéal premier.

(2.2.4) *Remarque.* Pour établir l'existence d'un idéal maximal dans un anneau non nul, nous avons eu recours au lemme de Zorn, et donc à l'axiome du choix. On peut démontrer que c'est inévitable : le fait que tout anneau non nul admette un idéal maximal est *équivalent* à l'axiome du choix.

(2.2.5) **Idéaux premiers et morphismes vers les corps.** Soit A un anneau et soit f un morphisme de A vers un corps K . Le noyau de f est visiblement un idéal premier. Réciproquement, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ; la flèche composée $A \rightarrow A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ a pour noyau $\mathfrak{p}$. Ainsi, les idéaux premiers sont exactement *les noyaux de morphismes dont le but est un corps*.

(2.2.5.1) On peut donc décrire un idéal premier de A comme une classe d'équivalence de morphismes $(A \rightarrow K)$ où K est un corps, pour la relation d'équivalence «avoir même noyau».

(2.2.5.2) Cette relation admet une description alternative : si K et L sont deux corps, deux morphismes $A \rightarrow K$ et $A \rightarrow L$ ont même noyau si et seulement si il existe un corps F et un diagramme commutatif



En effet, si un tel diagramme existe alors

$$\text{Ker}(A \rightarrow K) = \text{Ker}(A \rightarrow L) = \text{Ker}(A \rightarrow F)$$

puisque $F \rightarrow K$ et $F \rightarrow L$ sont injectifs en tant que morphismes de corps.

Réciproquement, supposons que $A \rightarrow K$ et $A \rightarrow L$ aient même noyau $\mathfrak{p}$. En vertu des propriétés universelles du quotient et du corps des fractions, la flèche $A \rightarrow K$ admet une unique factorisation sous la forme

$$A \rightarrow \text{Frac}(A/\mathfrak{p}) \hookrightarrow K,$$

et il en va de même de $A \rightarrow L$. Il existe donc un diagramme comme ci-dessus avec $F = \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$.

(2.2.5.3) On a en fait montré au 2.2.5.2 ci-dessus qu'un morphisme $A \rightarrow K$ appartient à la classe qui correspond à $\mathfrak{p}$ si et seulement si il se factorise par la flèche $A \rightarrow \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$, et que si c'est le cas cette factorisation est unique. En d'autres termes, le morphisme canonique $A \rightarrow \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ est le *plus petit* élément de la classe de morphismes $A \rightarrow K$ associée à $\mathfrak{p}$.

(2.2.6) Idéaux maximaux et surjection vers un corps. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A . Le quotient $A/\mathfrak{m}$ est un corps, et la flèche $A \rightarrow A/\mathfrak{m}$ est surjective.

Réciproquement, si K est un corps et si $f : A \rightarrow K$ est surjective, alors comme K s'identifie à $A/\text{Ker } f$, le noyau de f est un idéal maximal de A .

(2.2.6.1) Ainsi, un idéal maximal de A peut être vu comme une classe d'équivalence de *surjections* $A \rightarrow K$, où K est un corps, pour la relation d'équivalence «avoir même noyau». Et si $A \rightarrow K$ et $A \rightarrow L$ sont deux surjections ayant même noyau $\mathfrak{m}$, les corps K et L s'identifient tous deux à $A/\mathfrak{m}$ comme A -algèbres. Il y a donc en fait à isomorphisme canonique près *une seule* surjection dans la classe d'équivalence qui correspond à un idéal maximal donné $\mathfrak{m}$: c'est la surjection quotient de A vers $A/\mathfrak{m}$.

(2.2.6.2) Idéaux maximaux au sein des idéaux premiers. Donnons-nous un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A . Il correspond à une classe d'équivalence de morphismes $A \rightarrow K$, où K est un corps, classe dont $A \rightarrow \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ est le plus petit élément. Par ce qui précède, l'idéal $\mathfrak{p}$ est maximal si et seulement si il existe, dans la classe d'équivalence qui lui correspond, un morphisme surjectif. Mais cela revient à demander que le plus petit morphisme de la classe, à savoir $A \rightarrow \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$, soit surjectif, c'est-à-dire encore que $\text{Frac}(A/\mathfrak{p}) = A/\mathfrak{p}$, et donc que $A/\mathfrak{p}$ soit un corps ; on retrouve bien (heureusement !) la définition usuelle.

(2.2.7) Exemple : le cas de $\mathbb{Z}$. Nous donnons ci-dessous la liste des idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{Z}$, en donnant leur description du point de vue des morphismes vers les corps.

- L'idéal (0) ; il correspond à la classe des morphismes injectifs $\mathbb{Z} \rightarrow K$, c'est-à-dire des morphismes $\mathbb{Z} \rightarrow K$ où K est un corps de caractéristique nulle. Le plus petit morphisme de cette classe est l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, laquelle n'est pas surjective : (0) n'est pas maximal.

- Pour tout nombre premier p , l'idéal (p) ; il correspond à la classe des morphismes $\mathbb{Z} \rightarrow K$ de noyau $p\mathbb{Z}$, c'est-à-dire des morphismes $\mathbb{Z} \rightarrow K$ où K est un corps de caractéristique p . Le plus petit morphisme de cette classe est la flèche naturelle $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p$, qui est surjective : (p) est maximal.

(2.2.8) Fonctorialité contravariante du spectre. Si A est un anneau, on note $\text{Spec } A$ le *spectre* de A , c'est-à-dire l'ensemble des idéaux premiers de A (nous verrons plus tard, lors du cours sur les schémas, que $\text{Spec } A$ peut être muni d'une topologie, et même d'une structure supplémentaire).

La flèche $A \mapsto \text{Spec } A$ est de manière naturelle un foncteur *contravariant* ; nous allons donner deux descriptions de la flèche de $\text{Spec } B$ vers $\text{Spec } A$ induite par un morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$.

1) *Description dans le langage classique.* À un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B , on associe l'idéal $f^{-1}(\mathfrak{q})$ de A , dont on vérifie qu'il est premier.

2) *Description du point de vue des morphismes vers les corps.* Si K est un corps et $B \rightarrow K$ un morphisme, le noyau de la flèche composée $A \rightarrow B \rightarrow K$ ne dépend que de celui de $B \rightarrow K$: c'est son image réciproque dans A . On peut ainsi sans ambiguïté associer à la classe d'équivalence de $B \rightarrow K$ la classe d'équivalence de la composée $A \rightarrow B \rightarrow K$.

Anneaux locaux

(2.2.9) Proposition-définition. *Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- i) A possède un et un seul idéal maximal.
- ii) L'ensemble des éléments non inversibles de A est un idéal de A .

Si elles sont satisfaites on dit que A est un anneau local. Son unique idéal maximal est alors précisément l'ensemble de ses éléments non inversibles.

Démonstration. Supposons que i) est vraie, et soit $\mathfrak{m}$ l'unique idéal maximal de A . Si un élément de a appartient à $\mathfrak{m}$, il n'est pas inversible puisque $\mathfrak{m}$ est strict par définition. Réciproquement, si a n'est pas inversible, l'idéal (a) est strict, et est donc contenu dans un idéal maximal qui ne peut être que $\mathfrak{m}$; ainsi $a \in \mathfrak{m}$, et l'ensemble des éléments non inversibles de A est exactement $\mathfrak{m}$.

Supposons maintenant que ii) est vraie, et soit $\mathfrak{m}$ l'ensemble des éléments non inversibles de A . Comme 1 est inversible, il n'appartient pas à $\mathfrak{m}$, qui est donc un idéal strict. Par ailleurs, si I est un idéal strict de A , il ne contient aucun élément inversible et est donc contenu dans $\mathfrak{m}$. Il s'ensuit aussitôt que ce dernier est l'unique idéal maximal de A . $\square$

(2.2.10) Exemple trivial. Tout corps est un anneau local, dont (0) est l'unique idéal maximal.

(2.2.11) Exemple géométrique. Nous allons donner un exemple qui illustre la pertinence de l'épithète «local». Soit X un espace topologique et soit x un point de X . Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages ouverts de x , qui est filtrant pour l'ordre *opposé* à l'inclusion. Soit $\mathcal{D}$ le diagramme commutatif filtrant

$$\mathcal{D} = ((\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}))_{U \in \mathcal{V}}, (f \mapsto f|_V)_{V \subset U})$$

dans la catégorie **Ann**, et soit A sa colimite.

Concrètement, l'anneau A s'identifie au quotient de l'ensemble des couples (U, f) , où $U \in \mathcal{V}$ et où $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$, par la relation d'équivalence $\sim$ définie comme suit : $(U, f) \sim (V, g)$ si et seulement si il existe un voisinage ouvert W de x dans $U \cap V$ tel que $f|_W = g|_W$ (la structure d'anneau sur ce quotient étant induite par l'addition et la multiplication des fonctions).

De manière un peu plus informelle, A est l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles définies au voisinage de x , deux fonctions appartenant à A étant considérées comme égales si elles coïncident au voisinage de x ; on dit aussi que A est l'anneau des *germes de fonctions continues en x* .

Nous allons montrer que A est un anneau local. L'évaluation en x induit un morphisme $f \mapsto f(x)$ de A dans $\mathbb{R}$. Ce morphisme est surjectif, grâce aux fonctions constantes. Son noyau $\mathfrak{m}$ est donc un idéal maximal de A . Nous allons

montrer que c'est le seul ; il suffit en vertu de la proposition 2.2.9 de vérifier que $\mathfrak{m}$ est exactement l'ensemble des éléments non inversibles de A . Soit $f \in A \setminus \mathfrak{m}$. Choisissons un voisinage ouvert U de x sur lequel f est définie. Comme $f \notin \mathfrak{m}$, on a $f(x) \neq 0$. Comme f est continue, il existe un voisinage ouvert V de x dans U sur lequel f ne s'annule pas. L'inverse g de f est alors une fonction continue sur V , et l'on a $fg = 1$ dans l'anneau A . Ainsi f est inversible, ce qui achève la preuve.

(2.2.12) Remarque. On aurait pu tout aussi bien remplacer X par une variété différentiable (resp. analytique complexe) et A par l'anneau des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (resp. holomorphe).

(2.2.13) Si A est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, le corps $A/\mathfrak{m}$ sera appelé le *corps résiduel* de A .

Localisation et idéaux premiers

(2.2.14) Soit A un anneau et soit S une partie multiplicative de A . Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme tel que $f(S) \subset B^\times$; il induit un morphisme $g : S^{-1}A \rightarrow B$, donné par la formule $\frac{a}{s} \mapsto f(a)f(s)^{-1}$.

Un calcul explicite montre que le noyau de g ne dépend que de celui de f , et réciproquement. Plus précisément :

- $\text{Ker } g = \left\{ \frac{a}{s} \right\}_{a \in \text{Ker } f}$;
- $\text{Ker } f = \left\{ a \text{ t.q. } \frac{a}{1} \in \text{Ker } g \right\}$.

(2.2.15) Idéaux premiers de $S^{-1}A$. Se donner un morphisme de $S^{-1}A$ vers un corps K revient à se donner un morphisme de A vers K qui envoie chaque élément de S sur un élément inversible de K , c'est-à-dire sur un élément non nul de K ; cela revient donc à se donner un morphisme de A vers K dont le noyau ne rencontre pas S .

Compte-tenu de la description des idéaux premiers en termes de morphismes vers un corps, et de la description explicite des noyaux donnée au 2.2.14 ci-dessus, on en déduit que

$$\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s}, a \in \mathfrak{p}, s \in S \right\} \text{ et } \mathfrak{q} \mapsto \left\{ a \text{ t.q. } \frac{a}{1} \in \mathfrak{q} \right\}$$

établissent une bijection (visiblement croissante) entre l'ensemble des idéaux premiers de A ne rencontrant pas S et l'ensemble des idéaux premiers de $S^{-1}A$.

On peut également formuler cette dernière assertion comme suit : l'application $\text{Spec } S^{-1}A \rightarrow \text{Spec } A$ induite par $A \rightarrow S^{-1}A$ (cf. 2.2.8) est injective, et a pour image l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne rencontrent pas S .

(2.2.16) Lemme. Soit A un anneau et soit $f \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) f est nilpotent ;
- ii) pour tout corps K et tout morphisme $\varphi : A \rightarrow K$ on a $\varphi(f) = 0$;
- iii) f appartient à tous les idéaux premiers de A .

En d'autres termes, le nilradical de A est l'intersection de tous les idéaux premiers de A .

Démonstration. L'équivalence de ii) et iii) résulte de la caractérisation des idéaux premiers comme noyaux de morphismes vers un corps. L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est évidente. Supposons maintenant que iii) est vraie, et montrons i).

L'ensemble des idéaux premiers de A_f est d'après 2.2.15 en bijection avec l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne rencontrent pas $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire avec l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne contiennent pas f . Puisqu'on est sous l'hypothèse iii), cet ensemble est vide.

En conséquence, A_f n'a aucun idéal premier, ce qui signifie qu'il est nul. Il s'ensuit en vertu 2.1.5.2 que f est nilpotent. $\square$

(2.2.17) Localisé d'un anneau en un idéal premier. Soit A un anneau, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A . Le sous-ensemble $S = A \setminus \mathfrak{p}$ de A en est une partie multiplicative, et le localisé $S^{-1}A$ est le plus souvent noté $A_{\mathfrak{p}}$. On l'appelle le *localisé de A en l'idéal $\mathfrak{p}$* .

(2.2.17.1) En vertu de 2.2.15, l'ensemble des idéaux premiers de $A_{\mathfrak{p}}$ est en bijection croissante avec l'ensemble des idéaux premiers de A ne rencontrant pas S , c'est-à-dire contenus dans $\mathfrak{p}$. Or cet ensemble admet un plus grand élément, à savoir $\mathfrak{p}$. On en déduit que $A_{\mathfrak{p}}$ possède un et un seul idéal maximal : celui qui correspond à $\mathfrak{p}$. D'après la description explicite de la bijection évoquée (voir *loc. cit.*), cet idéal est $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{s}, a \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p}\} \subset A_{\mathfrak{p}}$.

(2.2.17.2) Le morphisme composé $A \rightarrow A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ envoie tout élément de S sur un élément non nul, et partant inversible, de $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$. Il se factorise donc de manière unique par $A_{\mathfrak{p}}$. Le morphisme correspondant de $A_{\mathfrak{p}}$ vers $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ est par construction donné par la formule $\frac{a}{s} \mapsto \frac{\bar{a}}{\bar{s}}$; on voit immédiatement que son noyau est $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Il est par ailleurs surjectif, puisque tout élément de $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ est de la forme $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}$ avec $a \in A$ et $s \notin \mathfrak{p}$.

En conséquence, le corps résiduel $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ s'identifie naturellement à $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$.

(2.2.17.3) Expression de $A_{\mathfrak{p}}$ comme colimite filtrante. La relation de divisibilité fait de $A \setminus \mathfrak{p}$ un ensemble pré-ordonné filtrant (si f et g sont deux éléments de $A \setminus \mathfrak{p}$, leur produit est un multiple commun à f et g dans $A \setminus \mathfrak{p}$). Si f et g sont deux éléments de A tels que $f|g$ alors f est inversible dans A_g , et il existe donc un morphisme de A -algèbres $A_f \rightarrow A_g$.

Il en résulte l'existence d'un diagramme commutatif filtrant

$$\mathcal{D} := ((A_f)_{f \in A \setminus \mathfrak{p}}, (A_f \rightarrow A_g)_{f|g})$$

dans la catégorie des A -algèbres. Comme $A \setminus \mathfrak{p}$ est évidemment égal à la réunion de ses sous-parties multiplicatives de la forme $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour f parcourant $A \setminus \mathfrak{p}$, il résulte de 2.1.9 et de la remarque 2.1.9.3 que $A_{\mathfrak{p}}$ s'identifie à la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des A -algèbres (et des anneaux, et des A -modules).

(2.2.18) Exemples.

(2.2.18.1) Supposons A intègre.

Si $\mathfrak{p} = \{0\}$, l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ n'est autre par définition que le corps des fractions de A .

En général, comme $0 \notin S$, la relation des produits en croix qui définit l'égalité dans $A_{\mathfrak{p}}$ est la même que celle qui définit l'égalité dans $\text{Frac } A$; ainsi, $A_{\mathfrak{p}}$ apparaît comme le *sous-anneau* de $\text{Frac } A$ constitué des fractions qui admettent une écriture avec un dénominateur n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$.

(2.2.18.2) Soit p un nombre premier. Le localisé $\mathbb{Z}_{(p)}$ est d'après ce qui précède le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ égal à

$$\left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \right\}.$$

(2.2.19) Remarque. Le langage des schémas permet, pour tout anneau A et tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , d'interpréter $A_{\mathfrak{p}}$ comme un anneau de germes de fonctions, analogue à ceux vus plus haut (exemple 2.2.11 et remarque 2.2.12), et donc d'y penser en termes géométriques.

2.3 Endomorphismes d'un module et lemme de Nakayama

(2.3.1) Proposition. Soit A un anneau, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit M un A -module possédant une famille génératrice de cardinal n . Soit I un idéal de A , et soit u un endomorphisme de M tel que $u(M) \subset IM := \{\sum a_i m_i, a_i \in I, m_i \in M\}$. Il existe alors une famille $(a_1, \dots, a_n)$ telle que a_j appartienne à I^j pour tout j , et telle que

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_n \text{Id} = 0.$$

(2.3.1.1) Remarque. Lorsque $I = A$, la condition $u(M) \subset IM$ est automatiquement satisfaite. La proposition assure donc entre autres que tout endomorphisme de M annule un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans A .

(2.3.1.2) Démonstration de la proposition 2.3.1. Choisissons une famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$ de M . Comme $u(M) = IM$, on a pour tout $m \in M$ une égalité de la forme $u(m) = \sum a_{\ell} m_{\ell}$ avec $a_{\ell} \in I$ pour tout ℓ . En écrivant chacun des m_{ℓ} comme combinaison linéaire des e_i , on voit qu'on peut écrire $u(m)$ comme combinaison linéaire des e_i à coefficients dans I .

En particulier, il existe une famille (a_{ij}) d'éléments de I tels que l'on ait $u(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$ pour tout j . Soit X la matrice $(a_{ij}) \in M_n(A)$; c'est en quelque sorte une matrice de u dans la famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$.

Un calcul immédiat (le même que celui effectué en algèbre linéaire) montre qu'on a pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in A^n$ l'égalité $u(\sum \lambda_i e_i) = \sum \mu_i e_i$ avec

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on en déduit que l'on a pour tout entier r et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in A^n$ l'égalité $u^r(\sum \lambda_i e_i) = \sum \nu_i e_i$ avec

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_n \end{pmatrix} = X^r \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En vertu du théorème de Cayley-Hamilton¹, on a $\chi_X(X) = 0$ et donc par ce qui précède $\chi_X(u) = 0$. Mais comme les a_{ij} appartiennent à I , le polynôme χ_X est de la forme $T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_n$ avec $a_j \in I^j$ pour tout j , ce qui achève la démonstration. $\square$

(2.3.2) Lemme de Nakayama. Soit A un anneau, soit I un idéal de A et soit M un A -module de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un élément a de A congru à 1 modulo I et tel que $aM = \{0\}$;
- ii) $M = IM$.

Démonstration. Supposons que i) soit vraie, écrivons $a = 1 + b$ avec $b \in I$. On a pour tout $m \in M$ l'égalité $(1 + b)m = 0$, et donc $m = -bm$. Ainsi, $M = IM$.

Supposons que ii) soit vraie, et appliquons la proposition 2.3.1 avec $u = \text{Id}_M$ (c'est possible puisque M est de type fini). Elle assure l'existence d'une famille (a_j) avec $a_j \in I^j$ pour tout j telle que

$$\text{Id}_M^n + a_1 \text{Id}_M^{n-1} + \dots + a_n \text{Id}_M = 0.$$

En l'appliquant à un élément m de M , on obtient $(1 + a_1 + \dots + a_n)m = 0$; ainsi, i) est vraie avec $a = a_1 + \dots + a_n$. $\square$

Ce lemme est surtout utile en pratique *via* son corollaire suivant – qui n'est autre que la version originelle du lemme de Nakayama.

(2.3.3) Corollaire. Soit A un anneau local d'unique idéal maximal $\mathfrak{m}$, et soit M un A -module de type fini tel que $M = \mathfrak{m}M$. On a alors $M = \{0\}$.

Démonstration. Le lemme de Nakayama assure qu'il existe un élément a congru à 1 modulo $\mathfrak{m}$ tel que $aM = \{0\}$. Étant non nul modulo $\mathfrak{m}$, l'élément a appartient à $A^\times$; il s'ensuit que M est trivial. $\square$

(2.3.4) Donnons une conséquence très utile de ce corollaire ; on désigne toujours par A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

(2.3.4.1) Soit M un A -module de type fini, soit N un A -module et soit $f : N \rightarrow M$ une application A -linéaire. Pour que f soit surjective, il faut et il suffit que l'application induite $N/\mathfrak{m}N \rightarrow M/\mathfrak{m}M$ le soit.

C'est en effet clairement nécessaire. Supposons maintenant que la flèche $N/\mathfrak{m}N \rightarrow M/\mathfrak{m}M$ est surjective, et soit $m \in M$. Par hypothèse, on peut écrire

$$m = f(n) + \sum a_i m_i$$

1. Vous ne l'avez peut-être rencontré que sur un corps, mais sa validité dans ce cadre entraîne sa validité pour tout anneau. En effet, s'il est vrai sur tout corps, il est vrai en particulier pour la matrice $(X_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q}(X_{ij}))$; il s'énonce dans ce cas précis comme une identité polynomiale à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en les (X_{ij}) . Cette identité débouche par spécialisation pour toute matrice (α_{ij}) à coefficients dans un anneau quelconque sur la « même » identité pour les α_{ij} ... laquelle est précisément le théorème de Cayley-Hamilton pour (α_{ij}) .

où $n \in N$, où les m_i appartiennent à M et où les a_i appartiennent à $\mathfrak{m}$. Il s'ensuit que m est égal à $\sum a_i m_i$ modulo $f(N)$. En conséquence, le module quotient $M/f(N)$ vérifie l'égalité

$$M/f(N) = \mathfrak{m}M/f(N).$$

Comme il est de type fini puisque c'est déjà le cas de M , il est nul d'après le corollaire 2.3.3 ci-dessus. Ainsi, $f(N) = M$ et f est surjective.

(2.3.4.2) Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de M . Elle engendre le module M si et seulement si les $\overline{e_i}$ engendrent le $A/\mathfrak{m}$ -espace vectoriel $M/\mathfrak{m}M$.

C'est en effet une simple application du 2.3.4.1 ci-dessus, au cas où N est le module $A^{(I)}$ formé des familles $(a_i)_{i \in I}$ de A^I dont presque tous les éléments sont nuls, et où f est l'application $(a_i) \mapsto \sum a_i e_i$.

Nous allons maintenant donner une application astucieuse et très frappante du lemme de Nakayama.

(2.3.5) Corollaire. *Soit A un anneau, soit M un A -module de type fini et soit u un endomorphisme surjectif de M . L'endomorphisme u est alors bijectif et u^{-1} est un polynôme en u .*

Démonstration. La loi externe

$$(P, m) \mapsto P(u)(m)$$

définit sur le groupe abélien $(M, +)$ une structure de $A[X]$ -module qui prolonge celle de A -module, et la multiplication par X est égale à l'endomorphisme u . Par hypothèse, M est de type fini comme A -module ; il l'est *a fortiori* comme $A[X]$ -module.

La surjectivité de u signifie que pour tout $m \in M$, il existe $n \in M$ tel que $Xn = m$. En conséquence, $M = (X)M$.

Le lemme de Nakayama assure alors qu'il existe un polynôme P congru à 1 modulo X tel que $PM = 0$. Écrivons $P = 1 + XQ$, avec $Q \in A[X]$. Soit $m \in M$. On a $Pm = 0$, soit $P(u)(m) = 0$, soit encore $(\text{Id} + uQ(u))(m) = 0$. Ceci valant pour tout m , il vient $\text{Id} = u(-Q(u))$. Comme deux polynômes en u commutent, on a aussi $\text{Id} = (-Q(u))u$. Ainsi, u est bijectif et $u^{-1} = -Q(u)$. $\square$

(2.3.5.1) Corollaire. *Soit A un anneau, soit M un A -module de type fini, et soit N un sous-module de M possédant un supplémentaire N' dans M . Supposons qu'il existe une application A -linéaire surjective de N dans M ; on a alors $N' = \{0\}$ et donc $N = M$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe une surjection A -linéaire u de N dans M . Soit v l'unique application A -linéaire de $M = N \oplus N'$ dans M telle que $v|_N = u$ et $v|_{N'} = 0$. Comme u est surjective, v est surjective. La proposition 2.3.5 assure alors que v est bijective. Comme $\text{Ker } v$ contient N' , il vient $N' = \{0\}$. $\square$

(2.3.5.2) Corollaire. *Soit A un anneau non nul et soient n et m deux entiers tels qu'il existe une surjection A -linéaire de A^n dans A^m . On a alors $n \geq m$.*

Démonstration. Supposons $n \leq m$. On dispose alors d'une bijection A -linéaire $A^m \simeq A^n \oplus A^{m-n}$. Par le corollaire 2.3.5.1 ci-dessus $A^{m-n} = \{0\}$; puisque A est non nul, $m = n$. $\square$

(2.3.6) Proposition. *Soit A un anneau non nul et soit M un A -module libre. Toutes les bases de M ont même cardinal.*

Démonstration. Nous allons donner deux preuves différentes. La première ne marche que lorsque M possède une base finie, mais a l'avantage de ne pas faire appel à l'axiome du choix.

(2.3.6.1) Première preuve, lorsque M possède une base finie. Dans ce cas, M est de type fini et il résulte alors de 0.2.5.2 que toute base de M est finie. Il s'agit donc de démontrer que si M possède deux bases de cardinaux finis respectifs n et m alors $n=m$, ou encore que si $A^n \simeq A^m$ alors $n = m$. Mais c'est une conséquence immédiate du corollaire 2.3.5.2.

(2.3.6.2) Seconde preuve, valable dans le cas général. Comme A est non nul, il possède un idéal maximal $\mathfrak{m}$. On vérifie immédiatement que si (e_i) est une base du A -module M alors $(\overline{e_i})$ est une base du $A/\mathfrak{m}$ -espace vectoriel $M/\mathfrak{m}M$. L'assertion requise se déduit alors du résultat correspondant en algèbre linéaire. $\square$

(2.3.7) Soit A un anneau non nul et soit M un A -module. Si M est libre, toutes ses bases ont même cardinal d'après la proposition 2.3.6 ; ce cardinal est appelé le *rang* de M .

Un A -module libre de rang n est donc un module possédant une base de cardinal n . Pour éviter de fastidieuses distinctions de cas, on étend cette définition au cas où A est nul : l'unique module sur l'anneau nul est donc libre de rang n pour tout n – mais on évitera soigneusement de parler *du* rang de ce module.

2.4 Le produit tensoriel : cas de deux modules

On fixe pour toute cette section un anneau A .

Définition, exemples et premières propriétés

(2.4.1) Soient M et N deux A -modules. Avant de définir rigoureusement le produit tensoriel de M et N , expliquons intuitivement le but de sa construction. On cherche à fabriquer la loi bilinéaire *la plus générale possible* de source $M \times N$, c'est-à-dire à donner un sens au produit d'un élément de M par un élément de N , en ne lui imposant rien d'autre que la bilinéarité.

Comme à chaque fois que l'on cherche à construire un objet obéissant à une liste limitative de contraintes, la définition rigoureuse de l'objet en question s'exprime au moyen d'une propriété universelle ou, si l'on préfère, du foncteur qu'il représente.

Pour tout A -module P , on note $\text{Bil}_A(M \times N, P)$ l'ensemble des applications bilinéaires de $M \times N$ vers P .

(2.4.2) Définition – proposition. *Le foncteur covariant $P \mapsto \text{Bil}_A(M \times N, P)$ de $A\text{-Mod}$ dans Ens est représentable, et son représentant est noté*

$$(M \otimes_A N, (m, n) \mapsto m \otimes n).$$

On dit que $M \otimes_A N$ est le produit tensoriel de M et N au-dessus de A .

Démonstration. On part d'un A -module libre L ayant une base $(e_{m,n})$ indexée par les éléments de $M \times N$, et l'on note L_0 le sous-module de L engendré par les

$$e_{m,n+\lambda n'} - e_{m,n} - \lambda e_{m,n'} \text{ et } e_{m+\lambda m',n} - e_{m,n} - \lambda e_{m',n}$$

pour (m, m', n, n', λ) parcourant $M^2 \times N^2 \times A$. On pose alors

$$M \otimes_A N = L/L_0, \text{ et } m \otimes n = \overline{e_{m,n}} \text{ pour tout } (m, n) \in M \times N.$$

Notons que par construction, les $m \otimes n$ engendrent le A -module $M \otimes_A N$.

Montrons que $(M \otimes_A N, (m, n) \mapsto m \otimes n)$ représente F . Soit P un A -module et soit $b \in \text{Bil}_A(M \times N, P)$ une application bilinéaire. Il s'agit de prouver qu'il existe une et une seule application linéaire $\lambda : M \otimes_A N \rightarrow P$ telle que $\lambda(m \otimes n) = b(m, n)$ pour tout (m, n) .

Unicité. Elle provient simplement du fait que la famille $(m \otimes n)$ est génératrice.

Existence. Soit φ l'unique application A -linéaire de L dans P envoyant $e_{m,n}$ sur $b(m, n)$ pour tout (m, n) . Comme b est bilinéaire, l'application φ s'annule sur les éléments de L_0 ; elle induit donc par passage au quotient une application linéaire $\lambda : M \otimes_A N \rightarrow P$, et l'on a pour tout $(m, n) \in M \times N$ les égalités

$$\lambda(m \otimes n) = \lambda(\overline{e_{m,n}}) = \varphi(e_{m,n}) = b(m, n),$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

(2.4.3) Commentaires et premières propriétés.

(2.4.3.1) La construction du produit tensoriel n'est guère subtile; elle consiste à imposer par décret les propriétés requises. Elle n'est en pratique *jamaïs* utilisée, et il faut à tout prix éviter de penser au produit tensoriel comme au quotient d'un module libre monstrueux.

Il y a toutefois une chose à en retenir : le fait que $M \otimes_A N$ est engendré (comme A -module, ou même comme groupe abélien puisque l'on a pour tout (a, m, n) les égalités $a(m \otimes n) = (am) \otimes n$ par les éléments de la forme $m \otimes n$, qu'on appelle les *tenseurs purs*).

(2.4.3.2) L'application bilinéaire universelle $(m, n) \mapsto m \otimes n$ a tendance à coder les propriétés (de nature linéaire) vérifiées par *toutes* les applications bilinéaires de source $M \times N$. Illustrons cette pétition de principe par un exemple : nous allons montrer que $\sum m_i \otimes n_i = 0$ si et seulement si pour *toute* A -module P et *toute* application bilinéaire $b : M \times N \rightarrow P$, on a $\sum b(m_i, n_i) = 0$.

Supposons que pour toute application bilinéaire b de source $M \times N$ on ait $\sum b(m_i, n_i) = 0$. C'est en particulier le cas pour l'application $\otimes$, et il vient $\sum m_i \otimes n_i = 0$.

Supposons que $\sum m_i \otimes n_i = 0$. Soit P un A -module et soit b appartenant à $\text{Bil}_A(M \times N, P)$. L'application b induit une application A -linéaire λ de $M \otimes_A N$ vers P telle que $\lambda(m \otimes n) = b(m, n)$ pour tout n . On a donc

$$\sum b(m_i, n_i) = \sum \lambda(m_i \otimes n_i) = \lambda(\sum m_i \otimes n_i) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(2.4.3.3) Exercice. Dans le même esprit, montrez que $M \otimes_A N$ est nul si et seulement si toute application bilinéaire de source $M \times N$ est nulle.

(2.4.4) Premiers exemples.

(2.4.4.1) Exemple trivial. Si M est un A -module quelconque alors

$$\{0\} \otimes M = M \otimes \{0\} = \{0\} :$$

cela vient du fait que le produit tensoriel est engendré par les tenseurs purs, et qu'un tenseur pur dont l'un des deux facteurs est nul est lui-même nul.

(2.4.4.2) Symétrie du produit tensoriel. Soient M et N deux A -modules. L'application de $M \times N$ dans $N \otimes_A M$ qui envoie (m, n) sur $n \otimes m$ est bilinéaire, et induit donc une application A -linéaire $M \otimes_A N \rightarrow N \otimes_A M$ qui envoie $m \otimes n$ sur $n \otimes m$ pour tout (n, m) .

On a de même une application A -linéaire $v : N \otimes_A M \rightarrow M \otimes_A N$ qui envoie $n \otimes m$ sur $m \otimes n$. Il est immédiat que $u \circ v = \text{Id}_{N \otimes_A M}$ et $v \circ u = \text{Id}_{M \otimes_A N}$ (le vérifier sur les tenseurs purs). Ainsi, u et v sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

(2.4.4.3) Construction fonctorielle de u . Soit P un A -module. L'application

$$b \mapsto [(n, m) \mapsto b(m, n)]$$

induit un isomorphisme fonctoriel en P entre l'ensemble des applications bilinéaires de $M \times N$ vers P et celui des applications bilinéaires de $N \times M$ vers P . Par le lemme de Yoneda, cet isomorphisme est induit par une bijection A -linéaire de $M \otimes_A N$ vers $N \otimes_A M$; on vérifie immédiatement que cette bijection n'est autre que u .

(2.4.4.4) On prendra garde qu'en général, le produit tensoriel de deux modules non nuls peut très bien être nul. Nous allons montrer par exemple que

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = 0.$$

Pour cela, il suffit de montrer que $a \otimes b = 0$ pour tout $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et tout $b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Donnons-nous donc un tel couple (a, b) . On a

$$a \otimes b = (3 - 2)a \otimes b = 3a \otimes b - 2a \otimes b = a \otimes 3b - 2a \otimes b = 0,$$

puisque $2a = 0$ et $3b = 0$.

Plus généralement, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = 0$ dès que p et q sont premiers entre eux : on raisonne comme ci-dessus, en remplaçant l'égalité $3 - 2 = 1$ par une relation de Bézout entre p et q .

(2.4.5) Produit tensoriel par un module libre de rang 1. Soit N un A -module, et soit M un A -module libre de rang 1. Soit e une base de M .

(2.4.5.1) Soit φ l'application linéaire de N vers $M \otimes_A N$ donnée par la formule $n \mapsto e \otimes n$. Nous allons montrer que c'est un isomorphisme en exhibant réciproque.

Soit b l'application de $M \times N$ dans M qui envoie un couple (ae, n) sur an (elle est bien définie car e est une base de M) ; elle est bilinéaire, donc induit une application A -linéaire ψ de $M \otimes_A N$ vers N qui envoie $ae \otimes n$ sur an pour tout (a, n) .

On vérifie immédiatement par leur effet sur les tenseurs purs que φ et ψ sont réciproques l'une de l'autre.

(2.4.5.2) Un cas particulier important. On déduit de ce qui précède que pour tout A -module N , l'application linéaire $n \mapsto 1 \otimes n$ induit un isomorphisme $N \simeq A \otimes_A N$.

(2.4.5.3) Construction fonctorielle de φ . Soit P un A -module. L'application

$$b \mapsto [n \mapsto b(e, n)]$$

définit une bijection fonctorielle en P entre $\text{Bil}_A(M \times N, P)$ et $\text{Hom}_A(N, P)$, de réciproque

$$\lambda \mapsto [(ae, n) \mapsto a\lambda(n)].$$

Par le lemme de Yoneda, cette collection de bijections est induite par une application A -linéaire de N vers $N \otimes_A M$, dont on vérifie qu'elle n'est autre que φ .

(2.4.6) Produit tensoriel de deux modules libres de rang 1. Soient maintenant M et N deux A -modules libres de rang 1. Donnons-nous une base e de M et une base f de N .

(2.4.6.1) Il résulte de 2.4.5.1 que la formule $n \mapsto e \otimes n$ définit un isomorphisme $N \simeq M \otimes_A N$. Comme $a \mapsto af$ définit un isomorphisme $A \simeq N$, on voit que $a \mapsto ae \otimes f$ définit un isomorphisme $\iota : A \simeq M \otimes_A N$. En d'autres termes $M \otimes_A N$ est libre de rang 1 de base $e \otimes f$.

(2.4.6.2) Construction fonctorielle de ι . Soit P un A -module. L'application

$$b \mapsto b(e, f)$$

définit une bijection fonctorielle en P entre $\text{Bil}_A(M \times N, P)$ et P , de réciproque

$$p \mapsto [(ae, bf) \mapsto ap].$$

Comme par ailleurs $p \mapsto [a \mapsto ap]$ définit une bijection fonctorielle en P entre P et $\text{Hom}_A(A, P)$ (de réciproque $\lambda \mapsto \lambda(1)$), on obtient par composition une bijection fonctorielle en P entre $\text{Bil}_A(M \times N, P)$ et $\text{Hom}_A(A, P)$.

Par le lemme de Yoneda, cette collection de bijections est induite par une bijection A -linéaire de A vers $M \otimes_A N$, dont on vérifie qu'elle n'est autre que ι .

(2.4.7) Functorialité du produit tensoriel en ses deux arguments. Soient M, M', N et N' quatre A -modules, et soient $f : M \rightarrow M'$ et $g : N \rightarrow N'$ deux applications A -linéaires.

(2.4.7.1) L'application de $M \times N$ vers $M' \otimes_A N'$ donnée par la formule

$$(m, n) \mapsto (f(m) \otimes g(n))$$

est bilinéaire. Elle induit donc une application A -linéaire $f \otimes g$ de $M \otimes_A N$ vers $M' \otimes_A N'$, telle que $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ pour tout (m, n) .

On vérifie que l'application $(f, g) \mapsto f \otimes g$ de $\text{Hom}_A(M, M') \times \text{Hom}_A(N, N')$ vers $\text{Hom}_A(M \otimes_A N, M' \otimes_A N')$ est elle-même bilinéaire.

(2.4.7.2) Description fonctorielle de $f \otimes g$. Soit P un A -module. La formule

$$b \mapsto [(m, n) \mapsto b(f(m), g(n))]$$

définit une application de $\text{Bil}_A(M' \times N', P)$ vers $\text{Bil}_A(M \times N, P)$ qui est fonctorielle en P .

Par le lemme de Yoneda, cette collection d'applications est induite par une application A -linéaire de $M \otimes_A N$ vers $M' \otimes_A N'$, dont on vérifie qu'elle n'est autre que $f \otimes g$.

(2.4.8) Propriétés d'adjonction. Soient L, M et N trois A -modules, et soit $f: N \rightarrow \text{Hom}(M, L)$ une application A -linéaire. L'application de $M \times N$ dans L qui envoie (m, n) sur $f(n)(m)$ est bilinéaire, et induit donc une application linéaire $M \otimes_A N \rightarrow L$, qui dépend manifestement linéairement de f ; on a donc construit une application A -linéaire

$$p: \text{Hom}(N, \text{Hom}(M, L)) \rightarrow \text{Hom}(M \otimes_A N, L).$$

On définit par ailleurs une application A -linéaire

$$q: \text{Hom}(M \otimes_A N, L) \rightarrow \text{Hom}(N, \text{Hom}(M, L))$$

par la formule $q(g) = n \mapsto [m \mapsto g(m \otimes n)]$, et l'on vérifie immédiatement que p et q sont des bijections et réciproques l'une de l'autre, fonctorielles en M, L et N . En particulier, si l'on considère M comme fixé, on dispose d'un isomorphisme

$$\text{Hom}(N, \text{Hom}(M, L)) \simeq \text{Hom}(M \otimes_A N, L)$$

qui est fonctoriel en N et L ; en conséquence, $L \mapsto \text{Hom}(M, L)$ est adjoint à droite à $N \mapsto M \otimes_A N$.

Comme le foncteur $N \mapsto M \otimes_A N$ admet un adjoint à droite, il commute aux colimites (1.7.5).

(2.4.9) Produit tensoriel et somme directe. Soit M un A -module et soit (N_i) une famille de A -modules. Pour tout j , on note u_j l'injection naturelle de N_j dans $\bigoplus N_i$.

(2.4.9.1) La famille des $\text{Id}_M \otimes u_j : M \otimes_A N_j \rightarrow M \otimes_A (\bigoplus N_i)$ induit un morphisme $\chi : (\bigoplus M \otimes_A N_i) \rightarrow M \otimes_A (\bigoplus N_i)$. Nous allons montrer que c'est un isomorphisme. Comme la somme directe est un cas particulier de colimite, on peut pour ce faire se contenter d'invoquer la commutation de $M \otimes$ aux colimites (cf. 2.4.8 ci-dessus). Mais nous allons également donner deux preuves directes, la première consistant à exhiber la bijection réciproque par une formule, et la seconde à utiliser le lemme de Yoneda.

(2.4.9.2) Construction de la bijection réciproque de χ par une formule. L'application de $M \times (\bigoplus N_i)$ dans $\bigoplus M \otimes_A N_i$ donnée par la formule $(m, (n_i)_i) \mapsto (m \otimes n_i)_i$ est bilinéaire. Elle induit dès lors une application linéaire ρ de $M \otimes_A (\bigoplus N_i)$ vers $\bigoplus M \otimes_A N_i$. On vérifie immédiatement que χ et ρ sont inverses l'une de l'autre.

(2.4.9.3) *Preuve de la bijectivité de χ via le lemme de Yoneda.* La somme directe $\bigoplus M \otimes_A N_i$ représente le foncteur $\prod_i h_{M \otimes_A N_i}$, c'est-à-dire encore le foncteur qui envoie un A -module P sur $\prod \text{Bil}_A(M \times N_i, P)$.

Soit P un A -module. La formule

$$b \mapsto (b|_{M \times N_i})_i$$

définit une bijection fonctorielle en P de $\text{Bil}_A(M \times (\bigoplus N_i), P)$ vers le produit $\prod \text{Bil}_A(M \times N_i, P)$, de réciproque

$$(b_i) \mapsto \left[(m, (n_i)_i) \mapsto \sum b_i(m, n_i) \right].$$

Par le lemme de Yoneda, cette collection de bijections est induite par une bijection A -linéaire de $\bigoplus (M \otimes_A N_i)$ vers $M \otimes_A (\bigoplus N_i)$, dont on vérifie qu'elle n'est autre que χ .

(2.4.10) Produit tensoriel de modules libres. Soient M et N deux A -modules libres, de bases respectives (e_i) et (f_j) ; on a les égalités $M = \bigoplus A \cdot e_i$ et $N = \bigoplus A \cdot f_j$.

On déduit alors de 2.4.9.1 que $M \otimes_A N \simeq \bigoplus_j M \otimes_A (A \cdot f_j)$. En réappliquant 2.4.9.1 à chacun des sommandes (et en utilisant la symétrie du produit tensoriel, cf. 2.4.4.2), il vient $M \otimes_A N \simeq \bigoplus_{i,j} (A \cdot e_i) \otimes_A (A \cdot f_j)$.

Mais en vertu de 2.4.6.1, le module $(A \cdot e_i) \otimes_A (A \cdot f_j)$ est pour tout (i, j) libre de base $e_i \otimes f_j$. Il s'ensuit que $M \otimes_A N$ est libre de base $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$.

(2.4.11) Ainsi, le produit tensoriel de deux A -modules libres M et N est libre, et si A est non nul le rang de $M \otimes_A N$ est égal au produit du rang de M et du rang de N .

Il s'ensuit que *si A est non nul, le produit tensoriel de deux A -modules libres non nuls est toujours non nul*. Notez un cas particulier important : le produit tensoriel de deux espaces vectoriels non nuls sur un corps k est non nul. Nous aurons plusieurs fois l'occasion de l'utiliser.

(2.4.12) Produit tensoriel d'une famille de modules. Ce qu'on a vu pour deux modules se généralise sans peine à une famille quelconque $(M_i)_{i \in I}$ de A -modules : le foncteur qui envoie un A -module P sur l'ensemble des applications multilinéaires de $\prod_{i \in I} M_i$ vers P est représentable par un A -module noté $\bigotimes_{i \in I} M_i$, fourni avec une application multilinéaire universelle $(x_i) \mapsto \bigotimes_{i \in I} x_i$ de $\prod M_i$ vers $\bigotimes_{i \in I} M_i$. La construction est analogue à celle donnée à la proposition 2.4.2 : on part d'un module libre de base indexée par $\prod M_i$ que l'on quotiente par les relations exigées.

(2.4.12.1) Notez que le produit tensoriel *vide* de modules a un sens, et est égal au A -module A : le lecteur est invité à vérifier que c'est une conséquence de sa définition comme représentant d'un foncteur, et que c'est par ailleurs bien ce que donne la construction esquissée ci-dessus.

(2.4.12.2) Supposons que I soit réunion disjointe de deux ensembles I' et I'' . Si P est un A -module on dispose alors de bijections canoniques et fonctorielles

en P

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}\left(\bigotimes_{i \in I} M_i, P\right) &\simeq \operatorname{Mult}\left(\prod_{i \in I} M_i, P\right) \\
&\simeq \operatorname{Mult}\left(\prod_{i \in I'} M_i, \operatorname{Mult}\left(\prod_{i \in I''} M_i, P\right)\right) \\
&\simeq \operatorname{Hom}\left(\bigotimes_{i \in I'} M_i, \operatorname{Mult}\left(\prod_{i \in I''} M_i, P\right)\right) \\
&\simeq \operatorname{Hom}\left(\bigotimes_{i \in I'} M_i, \operatorname{Hom}\left(\bigotimes_{i \in I''} M_i, P\right)\right) \\
&\simeq \operatorname{Bil}\left(\left(\bigotimes_{i \in I'} M_i\right) \times \left(\bigotimes_{i \in I''} M_i\right), P\right) \\
&\simeq \operatorname{Hom}\left(\left(\bigotimes_{i \in I'} M_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i \in I''} M_i\right), P\right),
\end{aligned}$$

qui induisent en vertu du lemme de Yoneda un isomorphisme naturel

$$\bigotimes_{i \in I} M_i \simeq \left(\bigotimes_{i \in I'} M_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i \in I''} M_i\right),$$

dont on vérifie par sa construction même qu'il peut se décrire par la formule

$$\bigotimes_{i \in I} x_i \mapsto \left(\bigotimes_{i \in I'} x_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i \in I''} x_i\right).$$

Notons que ceci entraîne l'associativité du produit tensoriel usuel : si L, M et N sont trois A -modules on a par ce qui précède des isomorphismes naturels

$$(L \otimes_A M) \otimes_A N \simeq L \otimes_A M \otimes_A N \simeq L \otimes_A (M \otimes_A N).$$

Propriétés d'exactitude

(2.4.13) Brefs rappels sur les suites exactes de A -modules. Soient n^- et n^+ deux éléments de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soit

$$S = \dots \rightarrow M_i \rightarrow M_{i+1} \rightarrow M_{i+2} \rightarrow \dots$$

une suite de morphismes de A -modules, où i parcourt l'ensemble I des entiers relatifs compris entre n^- et n^+ .

Soit i un élément de I tel que $i-1$ et $i+1$ appartiennent à I . On dit que la suite S est *exacte en* M_i si le noyau de $M_i \rightarrow M_{i+1}$ est égal à l'image de $M_{i-1} \rightarrow M_i$. On dit que S est *exacte* si elle est exacte en M_i pour tout i tel que $i-1$ et $i+1$ appartiennent à I (les indices extrêmes, s'ils existent, ne comptent donc pas).

Il résulte de la définition que dans une suite exacte, la composée de deux flèches successives est toujours nulle.

Donnons quelques exemples.

(2.4.13.1) La suite

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si g est surjective et $\text{Ker } g = \text{Im } f$.

Le lecteur est invité à vérifier que cela peut se reformuler en termes plus catégoriques de la façon suivante : si $\mathcal{D}$ désigne le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow & \\ M' & & \\ & \searrow & \\ & & \{0\} \end{array}$$

alors le triplet

$$(g: M \rightarrow M'', \quad g \circ f: M' \rightarrow M'', \quad 0: \{0\} \rightarrow M'',)$$

définit un morphisme de $\mathcal{D}$ vers M'' qui identifie M'' à la colimite de $\mathcal{D}$.

(2.4.13.2) La suite

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

est exacte si et seulement si f est injective et $\text{Ker } g = \text{Im } f$.

Le lecteur est invité à vérifier que cela peut se reformuler en termes plus catégoriques de la façon suivante : si $\mathcal{D}$ désigne le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & & \\ & \searrow 0 & \\ & & M'' \\ & \nearrow g & \\ M & & \end{array}$$

alors le triplet

$$(0: M' \rightarrow \{0\}, \quad g \circ f: M' \rightarrow M'', \quad f: M' \rightarrow M)$$

définit un morphisme de M' vers $\mathcal{D}$ qui identifie M' à la limite de $\mathcal{D}$.

(2.4.13.3) La suite

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si f est injective, g est surjective et $\text{Ker } g = \text{Im } f$.

(2.4.14) Soit B un anneau, et soit F un foncteur covariant de $A\text{-Mod}$ vers $B\text{-Mod}$.

(2.4.14.1) On dit que F est *exact à gauche* (resp. *exact à droite*, resp. *exact*) si et seulement si il satisfait les conditions suivantes :

- F est *additif*, c'est-à-dire que pour tout couple (M, N) de A -modules l'application naturelle $\text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_B(F(M), F(N))$ est un morphisme de groupes (à titre d'exercice, vous pouvez vérifier que cela entraîne la commutation de F aux sommes directes finies) ;
- pour toute suite exacte S de la forme

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \text{ (resp. } M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0, \text{ resp. } 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0),$$

la suite $F(S)$ est exacte.

(2.4.14.2) **Lemme.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) F est exact ;
- ii) F transforme toute suite exacte en une suite exacte ;
- iii) F est exact à gauche et transforme les surjections en surjections ;
- iv) F est exact à droite et transforme les injections en injections.

Démonstration. Il est clair que iii) $\Rightarrow$ i), que iv) $\Rightarrow$ i), et que ii) entraîne iii) et iv). Il reste à montrer que i) entraîne ii). Il suffit par définition de s'assurer que si F est exact, il transforme toute suite exacte $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ en une suite exacte. Mais cela résulte du fait que la suite exacte $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ se dévisse en suite exactes

$$0 \rightarrow K \rightarrow M' \rightarrow P \rightarrow 0, 0 \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0 \text{ et } 0 \rightarrow Q \rightarrow M'' \rightarrow R \rightarrow 0$$

(prendre pour K le noyau de $M' \rightarrow M$, pour P son image, pour Q le quotient de M par P , et pour R le conoyau de $M \rightarrow M''$). Chacune d'elle reste par définition exacte quand on applique F , et en recollant les suites obtenues on voit que $F(M') \rightarrow F(M) \rightarrow F(M'')$ est exacte. $\square$

(2.4.15) **Proposition.** *Soit M un A -module. Le foncteur $N \mapsto M \otimes_A N$ est exact à droite.*

Démonstration. Que $N \mapsto M \otimes_A N$ soit un foncteur additif résulte de 2.4.7.1. Soit maintenant

$$N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

une suite exacte. Nous allons montrer que

$$M \otimes_A N \xrightarrow{\text{Id}_M \otimes f} M \otimes_A L \xrightarrow{\text{Id}_M \otimes g} M \otimes_A P \longrightarrow 0$$

est exacte. Nous allons commencer par une preuve conceptuelle extrêmement concise mais peu explicite, puis donner une démonstration directe «à la main».

(2.4.15.1) *La preuve conceptuelle.* Le produit tensoriel commutant aux colimites (2.4.8), l'assertion requise découle aussitôt de la caractérisation catégorique de l'exactitude à droite d'une suite (2.4.13.1).

(2.4.15.2) *Preuve «à la main» de la surjectivité de $\text{Id}_M \otimes g$.* Soit (m, p) appartenant à $M \times P$. Comme g est surjective, l'élément p de P a un antécédent ℓ dans L par g .

On a alors $(\text{Id}_M \otimes g)(m \otimes \ell) = m \otimes g(\ell) = m \otimes p$. Ainsi, l'image de $\text{Id}_M \otimes g$ contient tous les tenseurs purs ; en conséquence, elle est égale à $M \otimes_A P$ tout entier.

(2.4.15.3) *Preuve «à la main» de l'égalité $\text{Ker}(\text{Id}_M \otimes g) = \text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$.* On a $g \circ f = 0$; il s'ensuit que $(\text{Id}_M \otimes g) \circ (\text{Id}_M \otimes f) = 0$; autrement dit, $\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f) \subset \text{Ker}(\text{Id}_M \otimes g)$. L'application $\text{Id}_M \otimes g$ induit donc une surjection

$$M \otimes_A L / (\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)) \rightarrow M \otimes_A P.$$

Pour montrer que $\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$ est égale à $\text{Ker}(\text{Id}_M \otimes g)$, il suffit de montrer que cette surjection est un isomorphisme ; nous allons pour ce faire exhiber sa réciproque.

Soit $m \in M$, soit $p \in P$ et soit ℓ un antécédent de p par g . La classe de $m \otimes \ell$ modulo $\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$ ne dépend alors pas du choix de ℓ . En effet, si ℓ' est un (autre) antécédent de p alors $\ell - \ell' \in \text{Ker } g = \text{Im } f$. En conséquence, il existe $n \in N$ tel que $\ell - \ell' = f(n)$, et l'on a donc

$$m \otimes \ell - m \otimes \ell' = m \otimes (\ell - \ell') = m \otimes f(n) = (\text{Id}_M \otimes f)(m \otimes n),$$

d'où l'assertion.

L'application de $M \times P$ vers $M \otimes_A L / (\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f))$ qui envoie (m, p) sur la classe de $m \otimes \ell$ pour n'importe quel antécédent ℓ de p est donc bien définie. On voit immédiatement qu'elle est bilinéaire ; elle induit donc une application A -linéaire $\sigma : M \otimes_A P \rightarrow M \otimes_A L / (\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f))$. On vérifie sur les tenseurs purs que σ est bien un inverse à gauche et à droite de la surjection

$$M \otimes_A L / (\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)) \rightarrow M \otimes_A P$$

induite par $\text{Id}_M \otimes g$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(2.4.16) Remarque. Le foncteur $N \mapsto M \otimes_A N$ n'est pas exact à gauche en général (c'est-à-dire qu'en général, il ne préserve pas l'injectivité des flèches), comme le montre le contre-exemple suivant.

On se place dans le cas où $A = \mathbb{Z}$. Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la multiplication par 2 ; c'est une application $\mathbb{Z}$ -linéaire injective. Pour tout $\mathbb{Z}$ -module M , l'endomorphisme $\text{Id}_M \otimes f$ de $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq M$ est la multiplication par 2.

Lorsque $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, celle-ci coïncide avec l'application nulle, et n'est en particulier pas injective.

(2.4.17) On dit qu'un A -module M est *plat* si le foncteur $N \mapsto M \otimes_A N$ est exact, c'est-à-dire s'il transforme les injections en injections.

(2.4.17.1) La platitude n'apparaîtra guère *dans ce cours*, et c'est essentiellement à titre culturel que nous la mentionnons. Mais il s'agit d'une notion absolument cruciale en théorie des schémas, qui en dépit de sa définition purement algébrique un peu sèche a un sens géométrique profond, et joue de surcroît un rôle technique majeur.

(2.4.17.2) Soit M un A -module libre ; il est alors plat. En effet, choisissons une base (e_i) de M , et donnons-nous une injection A -linéaire $N \hookrightarrow N'$.

On a $M = \bigoplus A \cdot e_i$. En conséquence, on dispose d'après 2.4.9 d'isomorphismes canoniques

$$M \otimes_A N \simeq \bigoplus (A \cdot e_i) \otimes_A N, \text{ et } M \otimes_A N' \simeq \bigoplus (A \cdot e_i) \otimes_A N'.$$

Il résulte par ailleurs de 2.4.5 que l'on a pour tout indice i des isomorphismes naturels $(A \cdot e_i) \otimes_A N \simeq N$, et $(A \cdot e_i) \otimes_A N' \simeq N'$. Il s'ensuit que $(A \cdot e_i) \otimes_A N$ s'injecte dans $(A \cdot e_i) \otimes_A N'$ pour tout i , puis que $M \otimes_A N$ s'injecte dans $M \otimes_A N'$.

(2.4.17.3) Notons un cas particulier important de ce qui précède : *tout espace vectoriel sur un corps est plat*.

Quelques objets classiques revisités

(2.4.18) Soient M et N deux A -modules. L'application de $M^\vee \times N$ dans $\text{Hom}_A(M, N)$ définie par la formule

$$(\varphi, n) \mapsto [m \mapsto \varphi(m)n]$$

est bilinéaire, elle induit donc une application A -linéaire φ de $M^\vee \otimes_A N$ vers $\text{Hom}_A(M, N)$.

(2.4.18.1) Supposons que M et N soient tous deux *libres de rang fini*. On choisit une base $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de M , et une base $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ de N . On déduit de la description matricielle des applications entre modules libres que $\text{Hom}_A(M, N)$ est libre de rang nm , une base étant donnée par la famille (u_{ij}) où u_{ij} est caractérisé par les égalités $u_{ij}(e_\ell) = \delta_{\ell i} f_j$ pour tout ℓ .

En appliquant cette remarque lorsque $N = A$, on voit que $M^\vee$ est libre de base (e_i^*) , où e_i^* désigne pour tout i la i -ème forme coordonnée dans la base $(e_1, \dots, e_m)$.

On en déduit grâce à 2.4.10 que le module $M^\vee \otimes_A N$ est libre de base $(e_i^* \otimes f_j)_{ij}$.

Fixons i et j et soit $\ell \in \{1, \dots, m\}$. On a par définition de φ l'égalité

$$\varphi(e_i^* \otimes f_j)(e_\ell) = e_i^*(e_\ell) f_j = \delta_{\ell i} f_j.$$

Autrement dit, $\varphi(e_i^* \otimes f_j) = u_{ij}$. Ainsi, φ transforme une base de $M^\vee \otimes_A N$ en une base de $\text{Hom}_A(M, N)$. Par conséquent, φ est bijective.

(2.4.18.2) *Commentaires.* Ce qui précède est une illustration d'une démarche très fréquente en algèbre commutative, (on l'a d'ailleurs déjà implicitement rencontrée à propos de la bidualité, cf. l'exemple 1.3.4) :

- on commence par construire une application linéaire de manière complètement naturelle (sans aucun choix à effectuer) ;
- on montre ensuite, sous l'hypothèse qu'un ou plusieurs des modules en jeu sont libres de rang fini, que cette application est bijective ; et pour ce faire, on choisit une base dans laquelle on effectue les calculs.

Signalons par ailleurs que la bijection réciproque de φ (lorsque M et N sont libres de rang fini) n'admet pas de description naturelle au moyen d'une formule explicite.

(2.4.18.3) On se place maintenant dans le cas où $N = M$, et on suppose toujours que M est libre de rang fini, de base $(e_i)_{i=1,\dots,m}$.

L'application de $M^\vee \times M$ vers A qui envoie (φ, m) sur $\varphi(m)$ étant bilinéaire, elle induit une application linéaire λ de $M^\vee \otimes_A M$ vers A , et il existe une unique application linéaire τ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M^\vee \otimes_A M & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & \text{End}_A(M) \\ \lambda \downarrow & \nearrow \tau & \\ A & & \end{array}$$

commute. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et m . On a

$$\tau(u_{ij}) = \tau(\varphi(e_i^* \otimes e_j)) = \lambda(e_i^* \otimes e_j) = e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \text{Tr}(u_{ij}).$$

Ceci valant pour tout (i, j) , la forme linéaire τ coïncide avec la trace, dont on a ainsi donné une définition intrinsèque (ne faisant pas intervenir un choix de base).

2.5 Produit tensoriel d'un module et d'une algèbre

Définitions, exemples et premières propriétés

(2.5.1) On désigne toujours par A un anneau, et l'on se donne une A -algèbre B . Si M est un B -module, il possède une structure naturelle (*i.e.*, fonctorielle en M) de A -module, obtenue par «restriction des scalaires» à A . S'il n'y a pas de risque de confusion, on notera encore M ce A -module ; dans le cas contraire, on écrira ${}_A M$.

(2.5.2) Soit M un A -module. Nous allons montrer que le A -module $B \otimes_A M$ possède une unique structure de B -module, étendant sa structure de A -module et telle que $\beta \cdot (b \otimes m) = (\beta b) \otimes m$ pour tout $(\beta, b, m) \in B^2 \times M$.

(2.5.2.1) L'unicité est claire : elle provient du fait que les tenseurs purs engendrent $B \otimes_A M$ comme groupe abélien.

(2.5.2.2) Montrons maintenant l'existence. Soit $\beta \in B$. L'application de $B \times M$ dans $B \otimes_A M$ qui envoie (b, m) sur $\beta b \otimes m$ est bi- A -linéaire. Elle induit donc une application A -linéaire μ_β de $B \otimes_A M$ dans lui-même. On vérifie aussitôt (en testant comme d'habitude les propriétés requise sur les tenseurs purs) que l'application $(\beta, v) \mapsto \mu_\beta(v)$ de $B \times_A (B \otimes_A M)$ vers $B \otimes_A M$ définit une structure de B -module sur $B \otimes_A M$ répondant à nos exigences.

(2.5.2.3) Si $f : M \rightarrow N$ est une application A -linéaire, il est immédiat que $\text{Id}_B \otimes f : B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A N$ est B -linéaire. On peut donc voir $M \mapsto B \otimes_A M$ comme un foncteur de $A\text{-Mod}$ vers $B\text{-Mod}$.

(2.5.2.4) On dit que le B -module $B \otimes_A M$ est déduit de M par *extension des scalaires de A à B* . Intuitivement, $B \otimes_A M$ est le B -module le plus général fabriqué à partir de M , en autorisant la multiplication externe par les éléments de B , et non plus simplement de A .

Comme toujours, ce type de description informelle se traduit rigoureusement en terme de propriété universelle, ou encore de représentation d'un foncteur ; c'est l'objet du lemme ci-dessous.

(2.5.3) Lemme. *Soit M un A -module. Le couple*

$$(B \otimes_A M, m \mapsto 1 \otimes m)$$

représente le foncteur covariant de $B\text{-Mod}$ vers $\mathbf{Ens}$ qui envoie P sur $\text{Hom}_A(M, P)$.

Démonstration. Notons pour commencer que $m \mapsto 1 \otimes m$ est bien A -linéaire, et donc que l'énoncé a un sens.

Soit P un B -module et soit f une application A -linéaire de M dans P . Il s'agit de montrer qu'il existe une unique application B -linéaire $g : B \otimes_A M \rightarrow P$ telle que $g(1 \otimes m) = f(m)$ pour tout $m \in M$.

(2.5.3.1) Unicité. Supposons qu'une telle g existe. On a alors pour tout $(b, m) \in B \times M$ les égalités

$$g(b \otimes m) = g(b \cdot (1 \otimes m)) = bg(1 \otimes m) = bf(m),$$

et comme les tenseurs purs engendrent $B \otimes_A M$ l'application g est bien uniquement déterminée.

(2.5.3.2) Existence. On s'inspire de la formule exhibée dans la preuve de l'unicité. L'application de $B \times M$ vers P qui envoie $b \otimes m$ sur $bf(m)$ est bi- A -linéaire, et induit donc une application A -linéaire $g : B \otimes_A M \rightarrow P$, qui envoie $b \otimes m$ sur $bf(m)$ pour tout (b, m) . On vérifie immédiatement que g est B -linéaire, et l'on a bien par construction $g(1 \otimes m) = f(m)$ pour tout m . $\square$

(2.5.4) On peut reformuler le lemme ci-dessus de différentes façons.

(2.5.4.1) Reformulation catégorique. Le foncteur $M \mapsto B \otimes_A M$ de $A\text{-Mod}$ vers $B\text{-Mod}$ est adjoint à gauche au foncteur $N \mapsto_A N$ de $B\text{-Mod}$ vers $A\text{-Mod}$.

(2.5.4.2) Reformulation informelle. Si M est un A -module, se donner une application B -linéaire de $B \otimes_A M$ dans un B -module P revient à se donner une application A -linéaire de M dans P .

(2.5.5) Nous allons maintenant décrire explicitement $B \otimes_A M$ dans un certain nombre de cas particuliers.

(2.5.5.1) Soit M un A -module libre, et soit (e_i) une base de M . On a la décomposition $M = \bigoplus A \cdot e_i$. Par commutation du produit tensoriel aux sommes directes, il vient $B \otimes_A M \simeq \bigoplus B \otimes_A A \cdot e_i$.

Par ailleurs, le A -module $A \cdot e_i$ est pour tout i libre de base e_i ; on en déduit grâce à 2.4.5 que $b \mapsto b \otimes e_i$ établit une bijection A -linéaire entre B et $B \otimes_A A \cdot e_i$. Comme $b \otimes e_i = b \cdot (1 \otimes e_i)$ pour tout (b, i) , on voit finalement que $B \otimes_A M$ est libre de base $(1 \otimes e_i)$.

(2.5.5.2) Soit I un ensemble. Le A -module $A^{(I)}$ est libre ; soit (θ_i) sa base canonique (θ_i est pour tout i la famille $(\delta_{ij})_j$ de $A^{(I)}$).

Par ce qui précède, $B \otimes_A A^{(I)}$ est libre de base $1 \otimes \theta_i$. Cela signifie que

$$(b_i) \mapsto \sum b_i \cdot (1 \otimes \theta_i) = \sum b_i \otimes \theta_i$$

établit un isomorphisme entre $B^{(I)}$ et $B \otimes_A A^{(I)}$.

Modulo cet isomorphisme, l'application naturelle

$$(a_i) \mapsto 1 \otimes (a_i) = 1 \otimes \sum a_i \theta_i = \sum a_i \otimes \theta_i$$

s'identifie à la flèche $A^{(I)} \rightarrow B^{(I)}$ déduite du morphisme structural de A vers B .

(2.5.5.3) Soit maintenant M un A -module quelconque et soit (e_i) une famille génératrice de M . L'unique application linéaire de $A^{(I)}$ dans M qui envoie θ_i sur e_i pour tout i (c'est celle qui envoie toute famille (a_i) sur $\sum a_i e_i$) est alors surjective; soit $(f_\ell)_{\ell \in \Lambda}$ une famille génératrice de son noyau. On dispose d'une suite exacte

$$A^{(\Lambda)} \xrightarrow{(a_\ell) \mapsto \sum a_\ell f_\ell} A^{(I)} \xrightarrow{(a_i) \mapsto \sum a_i e_i} M \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire encore d'un isomorphisme $[A^{(I)} / (f_\ell)_\ell] \simeq M$ envoyant $\overline{\theta_i}$ sur e_i pour tout i .

Par exactitude à droite du produit tensoriel et en vertu du 2.5.5.2 ci-dessus, cette suite induit *via* la tensorisation avec B une suite exacte

$$B^{(\Lambda)} \xrightarrow{(b_\ell) \mapsto \sum b_\ell f_\ell} B^{(I)} \xrightarrow{(b_i) \mapsto \sum b_i (1 \otimes e_i)} B \otimes_A M \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire un isomorphisme $[B^{(I)} / (f_\ell)_\ell] \simeq B \otimes_A M$ envoyant $\overline{\theta_i}$ sur $1 \otimes e_i$ pour tout i (par abus, on désigne encore par f_ℓ et θ_i les images respectives de f_ℓ et θ_i dans $B^{(I)}$ par la flèche $A^{(I)} \rightarrow B^{(I)}$); notons en particulier que $1 \otimes e_i$ est une famille génératrice de $B \otimes_A M$.

De manière un peu informelle, on voit que le A -module M et le B -module $B \otimes_A M$ admettent la «même» description par générateurs (les θ_i) et relations (les f_ℓ).

On peut résumer cela par le slogan suivant, vague mais assez intuitif : $B \otimes_A M$ est à B ce que M est à A .

(2.5.5.4) Ce principe s'applique aussi aux applications linéaires. Plus précisément, donnons-nous deux A -modules M et N , et choisissons une famille génératrice (e_i) de M et une famille génératrice (f_j) de N . Soit u une application A -linéaire de M vers N . Pour tout i , il existe une famille (a_{ij}) d'éléments de A telle que $u(e_i) = \sum a_{ij} f_j$, et elle détermine entièrement u : on a $u(\sum \lambda_i e_i) = \sum_j (\sum_i \lambda_i a_{ij}) f_j$ pour toute famille (λ_i) de scalaires.

Il résulte de 2.5.5.3 que $(1 \otimes e_i)$ est une famille génératrice de $B \otimes_A M$, et que $(1 \otimes f_j)$ est une famille génératrice de $B \otimes_A N$. On a de plus pour tout i les égalités

$$(\text{Id}_B \otimes u)(1 \otimes e_i) = 1 \otimes u(e_i) = 1 \otimes (\sum a_{ij} f_j) = \sum a_{ij} (1 \otimes f_j).$$

On voit ainsi que $\text{Id}_B \otimes u : B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A N$ est décrite, dans les familles génératrices $(1 \otimes e_i)$ et $(1 \otimes f_j)$, par les «mêmes» formules que u dans les familles génératrices (e_i) et (f_j) .

(2.5.6) Extensions des scalaires successives. Soit M un A -module, soit B une A -algèbre, et soit C une B -algèbre. On dispose alors d'un isomorphisme naturel de C -modules

$$C \otimes_B (B \otimes_A M) \simeq C \otimes_A M.$$

On peut le voir de deux façons différentes.

(2.5.6.1) Première méthode. Soit $c \in C$. L'application de $B \times M$ dans $C \otimes_A M$ qui envoie (b, m) sur $cb \otimes m$ est bilinéaire, et induit donc une application A -linéaire m_c de $B \otimes_A M$ vers $C \otimes_A M$.

L'application de $C \times (B \otimes_A M)$ vers $(C \otimes_A M)$ qui envoie (c, v) sur $m_c(v)$ est B -bilinéaire, donc induit une application B -linéaire

$$\varphi : C \otimes_B (B \otimes_A M) \rightarrow C \otimes_A M.$$

L'application de $C \times M$ vers $C \otimes_B (B \otimes_A M)$ qui envoie (c, m) sur $c \otimes (1 \otimes m)$ est bilinéaire, et induit donc une application A -linéaire

$$\psi : C \otimes_A M \rightarrow C \otimes_B (B \otimes_A M).$$

On vérifie aisément que φ et ψ sont C -linéaires et réciproques l'une de l'autre.

(2.5.6.2) Preuve fonctorielle. Soit P un C -module. On dispose d'isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_C(C \otimes_B (B \otimes_A M), P) &\simeq \operatorname{Hom}_B(B \otimes_A M, P) \simeq \operatorname{Hom}_A(M, P) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_C(C \otimes_A M, P) \end{aligned}$$

qui sont fonctoriels en P et M . Par composition on obtient un isomorphisme naturel $\operatorname{Hom}_C(C \otimes_B (B \otimes_A M), P) \simeq \operatorname{Hom}_C(C \otimes_A M, P)$ fonctoriel en P et M . Le lemme de Yoneda assure qu'il provient d'une bijection C -linéaire de $C \otimes_A M$ vers $C \otimes_B (B \otimes_A M)$, dont on vérifie qu'elle coïncide avec ψ .

Comportement vis-à-vis des localisations et quotients

(2.5.7) Soit M un A -module. Nous allons décrire l'extension des scalaires de M à deux types de A -algèbres particulières, à savoir les quotients et les localisations.

(2.5.7.1) Le cas des quotients. Soit I un idéal de A . La structure de A -module du quotient M/IM est induite par une structure de A/I -module sur ce dernier (la multiplication externe par un scalaire a ne dépend dans ce module que de la classe de a modulo I).

La surjection $M \rightarrow M/IM$ étant A -linéaire, elle induit un morphisme de A/I -modules $p : (A/I) \otimes_A M \rightarrow M/IM$.

Par ailleurs, l'application A -linéaire $m \mapsto 1 \otimes m$ de M dans $(A/I) \otimes_A M$ s'annule sur IM : en effet, si les a_i sont des éléments de I et les m_i des éléments de M , on a

$$1 \otimes \sum a_i m_i = \sum a_i \otimes m_i = 0,$$

puisque les facteurs de gauche vivent dans A/I .

Elle induit donc une application A -linéaire $s : M/IM \rightarrow (A/I) \otimes_A M$, qui comme toute application A -linéaire entre A/I -modules est automatiquement A/I -linéaire (par surjectivité de A vers A/I). On vérifie immédiatement que p et s sont inverses l'une de l'autre.

On a ainsi construit un isomorphisme canonique de A/I -modules

$$(A/I) \otimes_A M \simeq M/IM.$$

(2.5.7.2) Le cas des localisations. Soit S une partie multiplicative de A . On définit sur $M \times S$ la relation $\mathcal{R}$ suivante : $(m, s)\mathcal{R}(n, t)$ si et seulement si il existe $r \in S$ tel que $r(tm - sn) = 0$. On vérifie que c'est une relation d'équivalence, et l'on note $S^{-1}M$ le quotient correspondant. Les formules

$$((m, s), (n, t)) \mapsto (tm + sn, st) \text{ et } ((a, s), (m, t)) \mapsto (am, st)$$

passent au quotient, et définissent une loi interne $+$ sur $S^{-1}M$ et une loi externe $\times : S^{-1}A \times S^{-1}M \rightarrow S^{-1}M$ qui font de $S^{-1}M$ un $S^{-1}A$ -module (la preuve de ce fait, aussi triviale que fastidieuse, est laissée au lecteur).

Si $(m, s) \in M \times S$, on écrira $\frac{m}{s}$ au lieu de (m, s) . Cette notation permet de disposer des formules naturelles

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{sn + tm}{st} \text{ et } \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{am}{bt},$$

et l'on a

$$\frac{m}{s} = \frac{n}{t} \iff \exists r \in S, r(tm - sn) = 0.$$

Si f est une application A -linéaire de M vers un A -module N , on vérifie que la formule $(m, s) \mapsto \frac{f(m)}{s}$ passe au quotient par $\mathcal{R}$ et induit une application $S^{-1}A$ -linéaire de $S^{-1}M$ vers $S^{-1}N$, qui envoie par construction une fraction $\frac{m}{s}$ sur la fraction $\frac{f(m)}{s}$. Ainsi, $M \mapsto S^{-1}M$ apparaît comme un foncteur de $A\text{-Mod}$ vers $S^{-1}A\text{-Mod}$.

L'application $m \mapsto \frac{m}{1}$ de M dans $S^{-1}M$ est A -linéaire ; elle induit donc une application $S^{-1}A$ -linéaire φ de $S^{-1}A \otimes_A M$ dans $S^{-1}M$.

Par ailleurs, si $m \in M$ et $s \in S$, on vérifie immédiatement que l'élément $\frac{1}{s} \otimes m$ de $S^{-1}A \otimes_A M$ ne dépend que de la classe de (m, s) modulo $\mathcal{R}$, que l'application $\psi : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}A \otimes_A M$ construite par ce biais est $S^{-1}A$ -linéaire, et que φ et ψ sont inverses l'une de l'autre.

On a ainsi construit un isomorphisme de $S^{-1}A$ -modules

$$S^{-1}A \otimes_A M \simeq S^{-1}M$$

qui est visiblement fonctoriel en M .

(2.5.7.3) Une application importante. Soit f une injection A -linéaire de M dans un A -module N , soit $m \in M$ et soit $s \in S$. Supposons que $\frac{f(m)}{s} = 0$; cela signifie qu'il existe $r \in S$ tel que $rf(m) = 0$, ou encore tel que $f(rm) = 0$. Mais comme f est injective, il vient $rm = 0$ puis $\frac{m}{s} = 0$. Ainsi, l'application linéaire $S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$ induite par f est injective.

En conséquence, le A -module $S^{-1}A$ est plat.

(2.5.7.4) Localisation des modules et colimites. Soit Σ une partie multiplicative de A et soit $(I, \leq)$ un ensemble pré-ordonné filtrant. Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille de parties multiplicatives de A contenues dans Σ , telles que tout élément de S_i soit inversible dans S_j dès que $i \leq j$; on suppose de plus que les S_i engendrent Σ multiplicativement. Soit $\mathcal{D}$ le diagramme de A -algèbres dont la famille d'objets est $(S_i^{-1}A)_{i \in I}$ et dont les flèches sont les morphismes canoniques $S_i^{-1}A \rightarrow S_j^{-1}A$ pour $i \leq j$, et soit $M \otimes_A \mathcal{D}$ l'image de $\mathcal{D}$ par le foncteur $M \otimes_A \bullet$; les objets de $M \otimes_A \mathcal{D}$ sont les $S_i^{-1}M$, et ses morphismes sont les flèches canoniques $S_i^{-1}M \rightarrow S_j^{-1}M$ pour $i \leq j$. Le morphisme canonique de $\mathcal{D}$ dans $\Sigma^{-1}A$ identifie ce dernier à la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des A -modules (2.1.9 et remarque 2.1.9.3); puisque le produit tensoriel commute aux colimites, la flèche naturelle $M \otimes_A \mathcal{D} \rightarrow \Sigma^{-1}M$ identifie ce dernier à la colimite de $M \otimes_A \mathcal{D}$ dans la catégorie des A -modules.

Le lecteur que rebuterait l'invocation de la commutation aux colimites pourra donner une démonstration directe de ce fait. Il suffit en effet de s'assurer que les assertions 2.1.9.1 et 2.1.9.2 restent vraies lorsqu'on remplace partout les localisés de A par ceux de M , ce qui se fait sans la moindre difficulté, en reprenant leurs preuves *mutatis mutandis*.

Mentionnons un cas particulier important. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A , et soit Δ le diagramme

$$((M_f)_{f \in A \setminus \mathfrak{p}}, (M_f \rightarrow M_g)_{f|g})$$

(qui se déduit par tensorisation avec M de celui considéré au 2.2.17.3). Sa colimite dans la catégorie des A -modules s'identifie alors à $M_{\mathfrak{p}}$.

2.6 Produit tensoriel de deux algèbres

Définition, exemples, premières propriétés

(2.6.1) On désigne toujours par A un anneau. Soient B et C deux A -algèbres. Nous allons démontrer qu'il existe une unique loi interne $\cdot$ sur $B \otimes_A C$ telle que $(B \otimes_A C, +, \cdot)$ soit un anneau et telle que

$$(b \otimes c) \cdot (\beta \otimes \gamma) = (b\beta) \otimes (c\gamma)$$

pour tout $(b, \beta, c, \gamma) \in B^2 \times C^2$.

(2.6.1.1) Unicité. Elle résulte du fait que les tenseurs purs engendrent $B \otimes_A C$ comme groupe abélien.

(2.6.1.2) Existence. Soit $(b, c) \in B \times C$. L'application de $B \times C$ vers $B \otimes_A C$ qui envoie (β, γ) sur $b\beta \otimes c\gamma$ est bilinéaire. Elle induit donc une application A -linéaire $m_{b,c}$ de $B \otimes_A C$ dans lui-même. On vérifie aussitôt que $(b, c) \mapsto m_{b,c}$ est elle-même A -bilinéaire. Elle induit donc une application A -linéaire χ de $B \otimes_A C$ dans $\text{End}_A(B \otimes_A C)$.

On définit une loi interne sur $B \otimes_A C$ par la formule $(v, w) \mapsto v \cdot w := \chi(v)(w)$. Il découle de sa construction qu'elle est bi- A -linéaire et satisfait les égalités

$$(b \otimes c) \cdot (\beta \otimes \gamma) = b\beta \otimes c\gamma$$

pour tout $(b, \beta, c, \gamma) \in B^2 \times C^2$. On déduit sans difficulté de ces formules que $(B \otimes_A C, +, \cdot)$ est un anneau.

(2.6.2) Par définition de la loi $\cdot$ sur $B \otimes_A C$, les applications $b \mapsto b \otimes 1$ et $c \mapsto 1 \otimes c$ sont des morphismes d'anneaux, et les composées $A \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A C$ et $A \rightarrow C \rightarrow B \otimes_A C$ coïncident : par A -bilinearité de $\otimes$, on a en effet $a \otimes 1 = 1 \otimes a$ pour tout $a \in A$ (comme d'habitude, on note encore a les images de a dans B et C).

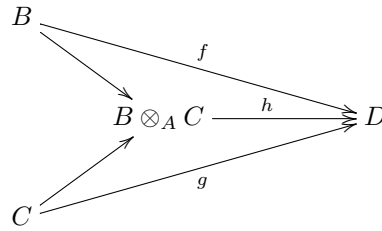
L'anneau $B \otimes_A C$ hérite ainsi d'une structure de B -algèbre et d'une structure de C -algèbre, qui induisent la même structure de A -algèbre. On vérifie que ses structures de A -module, B -module et C -module sont précisément les structures sous-jacentes à ces structures d'algèbre.

(2.6.3) Intuitivement, $B \otimes_A C$ est la A -algèbre la plus générale fabriquée à partir de B et C , en définissant «artificiellement» la multiplication d'un élément b de B par un élément c de C (c'est $b \otimes c$). Comme toujours, ce type de description se traduit rigoureusement en termes de propriété universelle, ou de foncteur représenté.

(2.6.4) Proposition. *Le couple $(B \otimes_A C, (b \mapsto b \otimes 1, c \mapsto 1 \otimes c))$ fait de $B \otimes_A C$ la somme disjointe de B et C dans la catégorie des A -algèbres.*

(2.6.4.1) Remarque. Il revient *tautologiquement* au même d'affirmer que $(B \otimes_A C, (b \mapsto b \otimes 1, c \mapsto 1 \otimes c))$ fait de $B \otimes_A C$ la somme amalgamée de B et C le long de A dans la catégorie des anneaux : c'est la version duale de 1.5.7.1.

(2.6.4.2) Démonstration de la proposition 2.6.4. Soit D une A -algèbre et soient $f : B \rightarrow D$ et $g : C \rightarrow D$ deux morphismes de A -algèbres. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme de A -algèbres h de $B \otimes_A C$ vers D tel que le diagramme



commute (ou encore un unique morphisme d'anneaux de $B \otimes_A C$ dans D qui soit à la fois un morphisme de B -algèbres et de C -algèbres).

Unicité. Si h existe, on a nécessairement pour tout $(b, c) \in B \times C$ les égalités

$$h(b \otimes c) = h((b \otimes 1) \cdot (1 \otimes c)) = h(b \otimes 1)h(1 \otimes c) = f(b)g(c),$$

et l'unicité de h découle du fait que les tenseurs purs engendrent le groupe abélien $B \otimes_A C$.

Existence. On s'inspire de la seule formule possible obtenue en démontrant l'unicité. L'application de $B \times C$ dans D qui envoie (b, c) sur $f(b)g(c)$ est bi- A -linéaire, et elle induit donc une application A -linéaire $h : B \otimes_A C \rightarrow D$, qui satisfait par construction les égalités $h(b \otimes c) = f(b)g(c)$ pour tout $(b, c) \in B \times C$.

On déduit de celles-ci que h est un morphisme de A -algèbres répondant aux conditions posées. $\square$

(2.6.5) Selon le contexte, il y a plusieurs façons d'envisager $B \otimes_A C$. On peut y penser comme à un objet *symétrique en B et C* : c'est par exemple le cas lorsqu'on le décrit informellement comme en 2.6.3 ou, plus rigoureusement, lorsqu'on le caractérise par le foncteur qu'il représente (prop. 2.6.4).

Mais on peut faire psychologiquement jouer un rôle différent à B et C , en considérant qu'on part d'une A -algèbre C et qu'on la transforme en une B -algèbre $B \otimes_A C$ (ou l'inverse, évidemment). Le slogan à retenir lorsqu'on aborde les choses de ce point de vue est, à analogue à celui vu plus haut pour les modules : *la B -algèbre $B \otimes_A C$ est à B ce que C est à A* . Nous allons l'illustrer par différents exemples.

(2.6.6) On désigne toujours par B une A -algèbre ; soit I un ensemble d'indices.

(2.6.6.1) La donnée des deux morphismes naturels de A -algèbres

$$B \rightarrow B[T_i]_{i \in I} \text{ et } A[T_i]_{i \in I} \rightarrow B[T_i]_{i \in I}$$

induit un morphisme φ de $B \otimes_A A[T_i]_{i \in I}$ vers $B[T_i]_{i \in I}$, qui est à la fois un morphisme de B -algèbres et un morphisme de $A[T_i]_{i \in I}$ -algèbres.

La propriété universelle de la B -algèbre $B[T_i]_{i \in I}$ assure par ailleurs l'existence d'un unique morphisme de B -algèbres $\psi: B[T_i]_{i \in I} \rightarrow B \otimes_A A[T_i]_{i \in I}$ qui envoie T_i sur $1 \otimes T_i$ pour tout i . On vérifie aussitôt que φ et ψ sont inverses l'un de l'autre.

On a donc construit un isomorphisme

$$B \otimes_A A[T_i]_{i \in I} \simeq B[T_i]_{i \in I},$$

compatible aux structures de B -algèbres et de $A[T_i]_{i \in I}$ -algèbres sur ses source et but.

(2.6.6.2) Donnons une autre construction de ces isomorphismes. Le A -module $A[T_i]_{i \in I}$ est libre de base $(\prod_{i \in I} T_i^{e(i)})_e$, où e parcourt l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{N}$ s'annulant presque partout.

Le B -module $B \otimes_A A[T_i]_{i \in I}$ est donc libre de base $(1 \otimes \prod_{i \in I} T_i^{e(i)})_e$. Compte-tenu de la définition de la loi d'anneau sur $B \otimes_A A[T_i]_{i \in I}$, on a par ailleurs $1 \otimes \prod_{i \in I} T_i^{e(i)} = \prod_{i \in I} (1 \otimes T_i)^{e(i)}$ pour tout e . Ainsi, $B \otimes_A A[T_i]_{i \in I}$ est une algèbre de polynômes en les $1 \otimes T_i$: on retrouve donc l'isomorphisme du 2.6.6.1.

(2.6.6.3) En particulier $A[S] \otimes_A A[T] \simeq (A[S])[T] = A[S, T] = (A[T])[S]$. On voit bien sur cet exemple les différentes façons dont on peut penser au produit tensoriel : la première écriture est à $A[S]$ ce que $A[T]$ est à A , la seconde est symétrique en les facteurs, la troisième est à $A[T]$ ce que $A[S]$ est à A .

(2.6.7) Certains isomorphismes de modules exhibés lors de l'étude du produit tensoriel d'un module par une algèbre se trouvent en fait, lorsque le module en jeu est lui-même une algèbre, être des isomorphismes d'algèbres – on le vérifie immédiatement à l'aide des formules explicites qui les décrivent. Donnons deux exemples.

(2.6.7.1) Soit I un idéal de A et soit B une A -algèbre. L'isomorphisme

$$A/I \otimes_A B \simeq B/IB$$

(cf. 2.5.7.1) est alors un isomorphisme de B -algèbres et de A/I -algèbres.

(2.6.7.2) Soit S une partie multiplicative de A et soit B une A -algèbre; soit $\varphi: B \rightarrow A$ le morphisme structural. La notation $S^{-1}B$ est *a priori* ambiguë : elle pourrait désigner le localisé du A -module B par la partie multiplicative S de A ou bien, modulo notre abus usuel consistant à oublier φ , l'anneau localisé de B par rapport à sa partie multiplicative $\varphi(S)$. Mais *a posteriori*, il n'y a aucun problème : nous laissons le lecteur vérifier qu'il existe un isomorphisme de $S^{-1}A$ -modules entre le premier et le second de ces objets, donné par la formule

$$\frac{b}{s} \mapsto \frac{b}{\varphi(s)} ;$$

et que modulo celui-ci, l'isomorphisme

$$S^{-1}A \otimes_A B \simeq S^{-1}B$$

(cf. 2.5.7.2) est un isomorphisme de B -algèbres et de $S^{-1}A$ -algèbres.

(2.6.7.3) Soient B et C deux A -algèbres, et soit D une B -algèbre. L'isomorphisme

$$D \otimes_B (B \otimes_A C) \simeq D \otimes_A C$$

(cf. 2.5.6) est alors un isomorphisme de D -algèbres et de C -algèbres.

(2.6.7.4) En vertu de 2.6.7.1 et 2.6.7.3, il existe pour toute A -algèbre B , toute A -algèbre C , et tout idéal I de C des isomorphismes naturels

$$B \otimes_A C/I \simeq (B \otimes_A C) \otimes_C (C/I) \simeq (B \otimes_A C)/I(B \otimes_A C).$$

(2.6.7.5) En vertu de 2.6.7.4 et 2.6.6.1, il existe pour toute A -algèbre B , tout ensemble d'indices I et toute famille (P_j) de polynômes appartenant à $A[T_i]_{i \in I}$ un isomorphisme naturel (de B -algèbres aussi bien que de $A[T_i]_{i \in I}$ -algèbres)

$$B \otimes_A (A[T_i]_{i \in I}/(P_j)) \simeq B[T_i]_{i \in I}/(P_j),$$

(où l'on note encore P_j l'image de P_j dans $B[T_i]_{i \in I}$).

De manière un peu informelle, on voit que la A -algèbre $A[T_i]_{i \in I}/(P_j)$ et la B -algèbre $B \otimes_A (A[T_i]_{i \in I}/(P_j))$ admettent la «même» description par générateurs (les T_i) et relations (les P_j).

(2.6.7.6) *Exercice.* Construire directement l'isomorphisme ci-dessus par une méthode analogue à celle suivie au 2.6.6.1.

(2.6.8) Exemples.

(2.6.8.1) Soit A la $\mathbb{Z}$ -algèbre $\mathbb{Z}[X]/(6X^2 + 18X - 3)$. Pour toute $\mathbb{Z}$ -algèbre B , on a $B \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq B[X]/(6X^2 + 18X - 3)$. L'allure de cette dernière B -algèbre dépend beaucoup de B . Ainsi :

- si $B = \mathbb{Q}$, elle est égale à $\mathbb{Q}[X]/(6X^2 + 18X - 3)$ qui est un corps de degré 2 sur $\mathbb{Q}$, car $6X^2 + 18X - 3$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ (son discriminant est $324 + 72 = 396 = 4 \times 9 \times 11$ qui n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}$);

- si $B = \mathbb{F}_2$ elle est égale à $\mathbb{F}_2[X]/(3) = \{0\}$ car 3 est inversible modulo 2 ;
- si $B = \mathbb{F}_3$ elle est égale à $\mathbb{F}_3[X]/(0) = \mathbb{F}_3[X]$;
- si $B = \mathbb{F}_5$ elle est égale à

$$\mathbb{F}_5[X]/(X^2 - 2X + 2) = \mathbb{F}_5[X]/(X + 1)(X + 2)$$

$$\simeq \mathbb{F}_5[X]/(X + 1) \times \mathbb{F}_5[X]/(X + 2) \simeq \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5;$$

- si $B = \mathbb{F}_{11}$, elle est égale à

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{11}[X]/(6X^2 - 4X - 3) &= \mathbb{F}_{11}[X]/(2(6X^2 - 4X - 3)) = \mathbb{F}_{11}[X]/(X^2 + 3X - 6) \\ &= \mathbb{F}_{11}[X]/(X - 4)^2 \simeq \mathbb{F}_{11}[Y]/Y^2. \end{aligned}$$

On voit qu'en tensorisant la même $\mathbb{Z}$ -algèbre par différents corps on a obtenu un corps, l'anneau nul, un anneau de polynômes, un produit de deux corps, et un anneau non réduit.

(2.6.8.2) Nous allons maintenant décrire l'anneau $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Comme $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$, cet anneau s'identifie à

$$\mathbb{C}[X]/(X^2 + 1) \simeq \mathbb{C}[X]/(X - i)(X + i) \simeq \mathbb{C}[X]/(X - i) \times \mathbb{C}[X]/(X + i) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

À titre d'exercice, vérifiez que l'isomorphisme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ainsi construit envoie $b \otimes \beta$ sur $(b\beta, b\bar{\beta})$.

On voit à travers cet exemple qu'un produit tensoriel de deux corps au-dessus d'un troisième n'est pas nécessairement un corps, ni même un anneau intègre. Nous allons voir qu'il peut même arriver qu'un tel produit tensoriel ne soit pas réduit.

(2.6.8.3) Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ non parfait, et soit a un élément de k qui n'est pas une puissance p -ième. On démontre (nous laissons la vérification au lecteur à titre d'exercice) que $X^p - a$ est alors un polynôme irréductible. Soit L le corps $k[X]/(X^p - a)$ et soit α la classe de X dans L .

On a

$$L \otimes_k L = L \otimes_k k[X]/(X^p - a) \simeq L[X]/(X^p - a) = L[X]/(X^p - \alpha^p) = L[X]/(X - \alpha)^p$$

car l'élevation à la puissance p est un morphisme d'anneaux en caractéristique p . La classe de $X - \alpha$ modulo $(X - \alpha)^p$ fournit alors un élément nilpotent non nul de $L \otimes_k L$.

Colimites dans la catégorie des anneaux

(2.6.9) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de A -algèbres. On vérifie facilement, par un raisonnement analogue à celui tenu aux 2.6.1 *et sq.*, qu'il existe une unique structure de A -algèbre sur le A -module $\bigotimes_{i \in I} A_i$ (2.4.12) telle que

$$\left(\bigotimes_i x_i \right) \cdot \left(\bigotimes_i y_i \right) = \bigotimes_i x_i y_i$$

pour tout couple $((x_i), (y_i))$ d'éléments de $\prod A_i$.

(2.6.9.1) Il est facile de voir comme dans le cas de deux algèbres que cette construction fournit la somme disjointe des A -algèbres A_i lorsque I est fini. Sous cette hypothèse, si $(f_i: A_i \rightarrow B)$ est une famille de morphismes de A -algèbres, le morphisme induit $\bigotimes_i A_i \rightarrow B$ envoie un tenseur pur $\bigotimes_i x_i$ sur $\prod_i f_i(x_i)$ – notez que la finitude de I est cruciale pour donner un sens à cette dernière expression.

(2.6.9.2) Pour construire la somme disjointe des A -algèbres A_i lorsque l'ensemble I est quelconque, on procède comme suit. Si J et J' sont deux sous-ensembles finis de I avec $J \subset J'$ on note $f_{JJ'}$ le morphisme de A -algèbres de $\bigotimes_{i \in J} A_i$ vers $\bigotimes_{i \in J'} A_i$ induit par les flèches structurales de A_i vers $\bigotimes_{i \in J'} A_i$ lorsque i parcourt J . Si $\bigotimes_{i \in J} x_i$ est un tenseur pur de $\bigotimes_{i \in J} A_i$ alors $f_{JJ'}(\bigotimes_{i \in J} x_i)$ est égal à $\bigotimes_{i \in J'} y_i$ où $y_i = x_i$ si $i \in J$ et $y_i = 1$ sinon.

L'ensemble E des parties finies de I ordonné par l'inclusion est filtrant, et

$$\mathcal{D} = ((A_J)_{J \in E}, (f_{JJ'})_{J \subset J'})$$

est un diagramme commutatif filtrant dans la catégorie des A -algèbres. On montre sans peine que $\text{colim } \mathcal{D}$ est la somme disjointe des A_i dans la catégories des A -algèbres.

(2.6.9.3) *Exercice.* Vérifiez que le sous-module de $\bigotimes_{i \in I} A_i$ engendré par les tenseurs purs dont presque toutes les composantes sont égales à 1 en est une sous-algèbre, et qu'elle s'identifie canoniquement à $\text{colim } \mathcal{D}$.

(2.6.9.4) *Changement de notation.* On choisit désormais de noter $\bigotimes_{i \in I} A_i$ la somme disjointe des A_i dans la catégorie des A -algèbres – cette notation est compatible avec la précédente si I est fini ou si presque tous les A_i sont nuls, mais ne l'est pas sinon.

(2.6.10) Soit maintenant $\Delta = ((A_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans la catégorie des A -algèbres ; pour tout i , soit $\lambda_i: A_i \rightarrow \bigotimes_{i \in I} A_i$ le morphisme canonique.

(2.6.10.1) Nous laissons le lecteur vérifier que $\text{colim } \Delta$ existe et s'identifie au quotient de $\bigotimes_{i \in I} A_i$ par son idéal engendré par les $\lambda_i(x) - \lambda_j(f(x))$ où $(i, j) \in I^2$, où $x \in A_i$ et où $f \in E_{ij}$.

(2.6.10.2) *Remarque.* On sait en donc particulier construire les colimites quelconques dans la catégorie des $\mathbb{Z}$ -algèbres, c'est-à-dire des anneaux.

(2.6.10.3) Soient B et C deux A -algèbres. Le produit tensoriel $B \otimes_A C$ est la somme amalgamée de B et C le long de A dans la catégorie des anneaux. Il résulte de 2.6.10 (et de la remarque 2.6.10.2) que $B \otimes_A C$ s'identifie au quotient

$$(B \otimes_{\mathbb{Z}} A \otimes_{\mathbb{Z}} C) / (a \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes a \otimes 1, 1 \otimes a \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes a)_{a \in A}.$$

Vérifiez-le directement à titre d'exercice.

2.7 Compléments : modules projectifs

Nous nous proposons ici d'utiliser un certain nombre d'outils précédemment introduits (localisation, suite exacte, produit tensoriel...) pour étudier une classe fondamentale de modules, appelés *projectifs*.

Ceux-ci jouent un rôle majeur en algèbre commutative, mais nous ne nous en servons pas dans la suite du livre hormis pour quelques remarques ou exemples

à propos des faisceaux localement libres sur un schéma, cf. 5.3.12 et 6.3.16.3 (c). Cette section doit donc plutôt être considérée comme un complément culturel, et peut dès lors être sautée en première lecture.

Propriétés se testant sur une famille couvrante de localisés

On fixe un anneau A .

(2.7.1) Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille de parties multiplicatives de A . Nous dirons que la famille (S_i) est *couvrante* si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , il existe i tel que $\mathfrak{p}$ ne rencontre pas S_i .

(2.7.1.1) Le terme «couvrant» a été choisi pour la raison suivante : il résulte immédiatement de la définition que (S_i) est couvrante si et seulement si $\text{Spec } A$ est la réunion des images des injections naturelles $\text{Spec } S_i^{-1}A \hookrightarrow \text{Spec } A$ (2.2.15).

(2.7.1.2) La famille (S_i) est couvrante si et seulement si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , il existe i tel que S_i s'envoie dans les éléments inversibles de $A_{\mathfrak{p}}$, c'est-à-dire encore tel qu'il existe un morphisme de A -algèbres de $S_i^{-1}A$ dans $A_{\mathfrak{p}}$.

(2.7.1.3) Les deux exemples fondamentaux de famille couvrante à avoir en tête sont les suivants.

a) La famille $(A \setminus \mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A}$ est couvrante par définition.

b) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A telle que l'idéal engendré par les f_i soit égal à A . La famille $(\{f_i^n\}_{n \in \mathbb{N}})_i$ est alors couvrante. En effet, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A , il ne peut contenir toutes les f_i puisqu'elles engendrent A , et si l'on choisit i tel que $f_i \notin \mathfrak{p}$ alors $\mathfrak{p}$ ne rencontre pas $\{f_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(2.7.2) On fixe une famille couvrante (S_i) de parties multiplicatives de A . Le but de ce qui suit est de montrer que certaines propriétés (d'un module, d'un morphisme...) sont vraies si et seulement si elles sont vraies après localisation par chacune des S_i .

(2.7.2.1) Lemme. Soit M un A module. La flèche naturelle $M \rightarrow \prod_i S_i^{-1}M$ est injective.

Démonstration. Soit m un élément tel que $\frac{m}{1} = 0$ dans $S_i^{-1}M$ pour tout i et soit J l'idéal annulateur de M . Fixons i ; par hypothèse, il existe $s_i \in S_i$ tel que $s_i m = 0$; en conséquence, J rencontre tous les S_i . Il n'est dès lors contenu dans aucun idéal premier de A , ce qui veut dire qu'il est égal à A ; il vient $m = 1 \cdot m = 0$. $\square$

(2.7.2.2) Corollaire. Le module M est nul si et seulement si tous les $S_i^{-1}M$ sont nuls. $\square$

(2.7.2.3) Corollaire. L'anneau A est réduit si et seulement si $S_i^{-1}A$ est réduit pour tout i .

Démonstration. Supposons A réduit, et soit $i \in I$. Soient $a \in A$ et $s \in S_i$ tels que l'élément $\frac{a}{s}$ de $S_i^{-1}A$ soit nilpotent. Il existe $n \geq 1$ tel que $\frac{a^n}{s^n} = 0$ dans $S_i^{-1}A$, ce qui veut dire qu'il existe $t \in S_i$ tel que $ta^n = 0$. On a *a fortiori* $(ta)^n = 0$, et comme A est réduit $ta = 0$, ce qui entraîne que $\frac{a}{s} = 0$ dans $S_i^{-1}A$. Ainsi, ce dernier est réduit.

Réciproquement, supposons $S_i^{-1}A$ réduit pour tout i , et soit a un élément nilpotent de A . Son image dans chacun des $S_i^{-1}A$ est nilpotente, donc nulle et le lemme 2.7.2.1 assure alors que $a = 0$. $\square$

(2.7.2.4) Lemme. *Soit*

$$\mathcal{D} = M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

un diagramme de A -Mod. C'est une suite exacte si et seulement si

$$S_i^{-1}\mathcal{D} := S_i^{-1}M' \xrightarrow{S_i^{-1}u} S_i^{-1}M \xrightarrow{S_i^{-1}v} S_i^{-1}M''$$

est exacte pour tout i .

Démonstration. Le sens direct provient de la platitude du A -module $S_i^{-1}A$ pour tout i (2.5.7.3). Supposons maintenant que $S_i^{-1}\mathcal{D}$ soit une suite exacte pour tout i et soit $m \in M$. Par hypothèse, $v \circ u(m)$ s'annule dans $S_i^{-1}M''$ pour tout i (puisque $S_i^{-1}v \circ S_i^{-1}u = 0$), et est donc nul d'après le lemme 2.7.2.1 ; ainsi, $v \circ u = 0$.

Soit P le conoyau de u ; la flèche v induit d'après ce qui précède une flèche $P \rightarrow M''$, et il s'agit de montrer qu'elle est injective. Fixons i . L'exactitude à droite du produit tensoriel assure que

$$S_i^{-1}M' \rightarrow S_i^{-1}M \rightarrow S_i^{-1}P \rightarrow 0$$

est exacte ; cela signifie que $S_i^{-1}P$ s'identifie au conoyau de $S_i^{-1}u$, et l'exactitude de $S_i^{-1}\mathcal{D}$ entraîne alors l'injectivité de $S_i^{-1}P \rightarrow S_i^{-1}M''$.

Soit maintenant $p \in P$ un élément dont l'image dans M'' est nulle. Puisque $S_i^{-1}P \rightarrow S_i^{-1}M''$ est injective pour tout i , l'élément p appartient au noyau de $P \rightarrow \prod S_i^{-1}P$, et est dès lors nul d'après le lemme 2.7.2.1. $\square$

(2.7.3) Nous allons maintenant énoncer un résultat de la même veine que les précédents, mais qui requiert que la famille des S_i soit finie (il ne pourra donc pas s'utiliser en général avec la famille $(A \setminus \mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A}$).

(2.7.3.1) Lemme. *Supposons que l'ensemble d'indice I est fini, et soit M un A -module. Il est de type fini si et seulement si $S_i^{-1}M$ est un $S_i^{-1}A$ -module de type fini pour tout i .*

Démonstration. L'implication directe provient du fait que l'extension des scalaires préserve en vertu de l'exactitude à droite du produit tensoriel la propriété d'être de type fini (cf. 2.5.5.3) pour le raisonnement précis). On suppose maintenant que $S_i^{-1}M$ est de type fini pour tout i . Fixons i . Il existe par hypothèse des éléments $m_{i1}, \dots, m_{in_i}$ de M et des éléments $s_{i1}, \dots, s_{in_i}$ de S_i tels que la famille $(\frac{m_{i1}}{s_{i1}}, \dots, \frac{m_{in_i}}{s_{in_i}})$ engendre le $S_i^{-1}A$ -module $S_i^{-1}M$. Comme les s_{ij} sont inversibles dans $S_i^{-1}A$, la famille des m_{ij} engendre encore $S_i^{-1}M$ comme $S_i^{-1}A$ -module.

Soit L un A -module libre de base $(e_{ij})_{i \in I, 1 \leq j \leq n_i}$ et soit $f: L \rightarrow M$ l'application A -linéaire qui envoie e_{ij} sur m_{ij} pour tout (i, j) . Par construction, $S_i^{-1}f: S_i^{-1}L \rightarrow S_i^{-1}M$ est surjective pour tout i , et f est donc surjective en

vertu du lemme 2.7.2.4. Comme I est fini, la famille (e_{ij}) est finie et M est de type fini. $\square$

(2.7.3.2) Remarque. Le corollaire ci-dessus est faux en général sans hypothèse de finitude sur I ; donnons un contre-exemple. On se place sur l'anneau $\mathbb{Z}$, et l'on considère la famille de parties multiplicatives $(\mathbb{Z} \setminus (p))_{p \text{ premier}}$, laquelle est couvrante : un idéal premier de la forme $p\mathbb{Z}$ avec p premier ne rencontre pas $\mathbb{Z} \setminus (p)$, et (0) ne rencontre quant à lui aucune des $\mathbb{Z} \setminus (p)$.

Soit M le $\mathbb{Z}$ -module $\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, la somme étant prise sur tous les nombres premiers. Un calcul immédiat (faites-le) montre que le $\mathbb{Z}_{(p)}$ -module $M_{(p)}$ est isomorphe pour tout nombre premier p à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}$; il est donc de type fini (et même de présentation finie). Pourtant, M n'est pas de type fini : il ne comprend que des éléments d'ordre fini, donc serait fini s'il était de type fini.

Suites exactes scindées, modules projectifs

(2.7.4) Soit

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A -modules.

(2.7.4.1) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) la surjection p admet une *section*, c'est-à-dire une application A -linéaire $s : M'' \rightarrow M$ telle que $p \circ s = \text{Id}_{M''}$;
- ii) il existe un isomorphisme $\theta : M' \oplus M'' \simeq M$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M & & \\
 & \nearrow i & \uparrow \theta & \searrow p & \\
 0 \longrightarrow & M' & & M'' & \longrightarrow 0 \\
 & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\
 & & M' \oplus M'' & &
 \end{array}$$

commute.

En effet, supposons que i) soit vraie et montrons que

$$\theta : (m', m'') \mapsto i(m') + s(m'')$$

convient. Soit $m \in M$. On a $p(m - s(p(m))) = p(m) - p(m) = 0$, et $m - s(p(m))$ appartient donc à $\text{Ker } p = \text{Im } i$. Si l'on pose $m'' = p(m)$ et si l'on note m' l'unique élément de M' tel que $m - s(p(m)) = i(m')$ on a donc $m = i(m') + s(m'')$ et θ est surjectif.

Soit maintenant $(m', m'') \in M' \times M''$ tel que $\theta(m', m'') = i(m') + s(m'') = 0$. En appliquant p il vient $0 = p(i(m')) + p(s(m'')) = m''$. On a alors $i(m') = 0$, et partant $m' = 0$ par injectivité de i . Ainsi, $(m', m'') = (0, 0)$ et θ est injectif.

L'application A -linéaire θ est en conséquence un isomorphisme ; qu'elle fasse commuter le diagramme résulte du fait que $p \circ s = \text{Id}_{M''}$.

Réciproquement, supposons que ii) soit vraie. On vérifie aussitôt que l'application linéaire $m'' \mapsto \theta(m'', 0)$ est une section de p .

(2.7.4.2) Lorsque ces conditions équivalents sont satisfaites, on dit que la suite exacte

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$$

est *scindée*.

(2.7.4.3) À titre d'exercice, montrez que

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$$

est scindée si et seulement si i admet une *rétraction*, c'est-à-dire une application linéaire $r: M \rightarrow M'$ telle que $r \circ i = \text{Id}_{M'}$.

(2.7.4.4) La propriété d'être scindée n'a rien d'automatique : ainsi, la suite exacte de $\mathbb{Z}$ -modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

n'est pas scindée, par exemple parce qu'il n'existe aucun isomorphisme entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, puisque $\mathbb{Z}$ n'admet pas d'élément de 2-torsion non trivial.

(2.7.5) Soit P un A -module. Nous laissons le lecteur vérifier que le foncteur covariant $M \mapsto \text{Hom}(P, M)$ est exact à gauche. Nous dirons que P est *projectif* si ce foncteur est exact, c'est-à-dire encore si pour toute surjection $p: M \rightarrow N$, la flèche $u \mapsto p \circ u$ de $\text{Hom}(P, M)$ vers $\text{Hom}(P, N)$ est surjective ; en termes plus imagés, cela signifie que toute application linéaire de P vers N se relève à M .

(2.7.5.1) Si le module P est libre, il est projectif. En effet, supposons que P admette une base $(e_i)_{i \in I}$, et soit $p: M \rightarrow N$ une surjection linéaire. Donnons-nous une application linéaire $u: P \rightarrow N$. Choisissons² pour tout i un antécédent m_i de $u(e_i)$ dans M . Soit v l'unique application A -linéaire de P dans M envoyant e_i sur m_i pour tout i . On a alors pour tout i les égalités $p(v(e_i)) = p(m_i) = u(e_i)$; comme une application linéaire de source P est connue dès qu'on connaît son effet sur une base, il vient $p \circ v = u$, et P est donc bien projectif.

(2.7.5.2) *Remarque.* La réciproque de 2.7.5.1 est fausse : il y a des exemples de modules projectifs qui ne sont pas libres. Par exemple, si A est un anneau de Dedekind (e.g. A est un anneau d'entiers de corps de nombres) et I un idéal de A alors I est un module projectif, qui est libre si et seulement si il est principal (nous esquisserons plus loin la preuve de ce fait) ; et il y a des exemples d'anneaux de Dedekind non principaux.

(2.7.5.3) Supposons que P est projectif, et donnons-nous une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} P \longrightarrow 0.$$

Elle est alors automatiquement scindée. En effet, l'application linéaire $\text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, P)$ induite par p est surjective par projectivité

2. Si I est infini, cela requiert l'axiome du choix.

de P . En particulier, Id_P a un antécédent $s \in \text{Hom}(P, M)$; par définition, cela signifie que $p \circ s = \text{Id}_P$, et s est donc une section de p , ce qui achève la preuve.

(2.7.5.4) Lemme. *Soit A un anneau local et soit P un module projectif de type fini sur A . Le module P est libre (de rang fini, cf. 0.2.5.2).*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A . Le quotient $P/\mathfrak{m}P$ est un $(A/\mathfrak{m})$ -espace vectoriel de dimension finie. Choisissons une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de P dont les classes modulo $\mathfrak{m}P$ constituent une base de $P/\mathfrak{m}P$, et soit $p: A^n \rightarrow P$ le morphisme $(a_i) \mapsto \sum a_i e_i$.

Par construction, la flèche $(A/\mathfrak{m})^n \rightarrow P/\mathfrak{m}P$ induite par p est bijective, et en particulier surjective. On déduit du lemme de Nakayama, ou plus précisément de l'un de ses avatars (2.3.4.1) que p est surjective. Soit K son noyau. Comme P est projectif, il résulte de 2.7.5.3 qu'il existe un isomorphisme $A^n \simeq K \oplus P$ modulo lequel p est la seconde projection. On en déduit en quotientant modulo $\mathfrak{m}$ un isomorphisme $(A/\mathfrak{m})^n \simeq K/\mathfrak{m}K \oplus P/\mathfrak{m}P$ modulo lequel $(A/\mathfrak{m}A)^n \rightarrow P/\mathfrak{m}P$ est la seconde projection. Mais on a signalé ci-dessus que $(A/\mathfrak{m}A)^n \rightarrow P/\mathfrak{m}P$ est un isomorphisme; en conséquence, $K/\mathfrak{m}K = 0$. L'isomorphisme $A^n \simeq K \oplus P$ assure par ailleurs que K s'identifie à un quotient de A^n , et est en particulier de type fini; on déduit alors du lemme de Nakayama, et cette fois-ci plus précisément du corollaire 2.3.3, que K est nul. Ainsi, $A^n \simeq P$. $\square$

(2.7.6) Soit P un A -module. Choisissons une famille génératrice $(p_i)_{i \in I}$ de P , soit L un module libre quelconque de base $(e_i)_{i \in I}$ paramétrée par I , soit $\pi: L \rightarrow P$ la surjection $\sum a_i e_i \mapsto \sum a_i p_i$, et soit K son noyau.

(2.7.7) Théorème. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) P est projectif;
- ii) toute suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$$

est scindée;

- iii) la suite exacte

$$0 \longrightarrow K \hookrightarrow L \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

est scindée;

- iv) Il existe un isomorphisme $L \simeq P \oplus K$;
- v) P est facteur direct d'un module libre, c'est-à-dire qu'il existe un module Λ tel que $\Lambda \oplus P$ soit libre.

Démonstration. L'implication i) $\Rightarrow$ ii) a été vue au 2.7.5.3. Les implications ii) $\Rightarrow$ iii), iii) $\Rightarrow$ iv) et iv) $\Rightarrow$ v) sont évidentes.

Supposons maintenant que v) soit vraie. Soit $\pi: M \rightarrow N$ une surjection linéaire, et soit $u: P \rightarrow N$ une application linéaire. Comme $\Lambda \oplus P$ est libre, il est projectif (2.7.5.1), et l'application $0 \oplus u$ de $\Lambda \oplus P$ vers N se relève donc en une application linéaire $v: \Lambda \rightarrow M$; par construction, $v|_P$ relève u et P est projectif. $\square$

(2.7.7.1) Corollaire. *Soit M un A -module projectif et soit B une A -algèbre. Le B -module $B \otimes_A M$ est projectif.*

Démonstration. Le théorème ci-dessus assure qu'il existe un A -module Λ tel que $M \oplus \Lambda$ soit libre. Le B -module $B \otimes_A (M \oplus \Lambda) = B \otimes_A M \oplus B \otimes_A \Lambda$ est alors libre, et $B \otimes_A M$ est donc projectif, là encore par le théorème ci-dessus. $\square$

(2.7.7.2) Corollaire. *Soit A un anneau principal et soit M un A -module projectif de type fini. Le module M est libre (de rang fini, cf. 0.2.5.2).*

Démonstration. Le théorème ci-dessus assure qu'il existe un A -module Λ tel que $M \oplus \Lambda$ soit libre. Cela assure en particulier que M est sans torsion ; la théorie générale des modules sur les anneaux principaux garantit alors que M est libre. $\square$

Modules de présentation finie

(2.7.8) Si P est un module *projectif* de type fini, il est automatiquement de présentation finie. Pour le voir, on choisit une famille génératrice finie $(p_1, \dots, p_n)$ de P , et l'on note $\pi : A^n \rightarrow P$ la surjection $(a_i) \mapsto \sum a_i p_i$. En vertu du théorème 2.7.7, on a un isomorphisme $A^n \simeq P \oplus \text{Ker } \pi$. Modulo cet isomorphisme on a $\text{Ker } \pi = A^n/P$, et $\text{Ker } \pi$ est en particulier de type fini.

(2.7.9) Par définition, si un module M est de présentation finie, *il existe* une surjection d'un module libre type fini vers M dont le noyau est lui-même de type fini. Mais ce sera en fait le cas de *toute* telle surjection, comme le montre la proposition suivante.

(2.7.9.1) Proposition. *Soit M un A -module de présentation finie, soit L un A -module de type fini et soit $p : L \rightarrow M$ une surjection linéaire. Le noyau K de p est alors de type fini.*

Démonstration. Comme M est de présentation finie, il existe $n \geq 0$ et une surjection $q : A^n \rightarrow M$ dont le noyau est de type fini. Comme L est de type fini, il existe $m \geq 0$ et une surjection linéaire $\pi : A^m \rightarrow L$.

Comme A^n est libre, il est projectif ; il s'ensuit qu'il existe $s : A^n \rightarrow L$ tel que $p \circ s = q$. De même, A^m est projectif et il existe donc $t : A^m \rightarrow A^n$ tel que $q \circ t = p \circ \pi$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^m \oplus A^n & \xrightarrow{t \oplus \text{Id}} & A^n \\ \pi \oplus s \downarrow & & \downarrow q \\ L & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

est alors commutatif, et les flèches $\pi \oplus s$ et $t \oplus \text{Id}$ sont surjectives. Soit K' l'image réciproque de K par la surjection $\pi \oplus s$; le module K' se surjecte sur K , et il suffit dès lors de prouver que K' est de type fini. On déduit du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} K' & \longrightarrow & A^m \oplus A^n & \xrightarrow{t \oplus \text{Id}} & A^n \\ \downarrow & & \pi \oplus s \downarrow & & \downarrow q \\ K & \longrightarrow & L & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

et des définitions de K et K' que $K' = (t \oplus \text{Id})^{-1}(\text{Ker } q)$. Par hypothèse, $\text{Ker } q$ est de type fini ; puisque $t \oplus \text{Id}$ est surjective, il existe une famille finie $(f_1, \dots, f_r)$ d'éléments de $A^m \oplus A^n$ dont les images par $t \oplus \text{Id}$ engendrent $\text{Ker } q$, et il est alors immédiat que

$$K' = (t \oplus \text{Id})^{-1}(\text{Ker } q) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle + \text{Ker } (t \oplus \text{Id}).$$

Le caractère surjectif de $t \oplus \text{Id}$ et le caractère projectif de A^n assurent que $A^m \oplus A^n$ est isomorphe à $A^n \oplus \text{Ker } (t \oplus \text{Id})$; en particulier, $\text{Ker } (t \oplus \text{Id})$ est un quotient de $A^n \oplus A^m$ et est en conséquence de type fini ; il en résulte que K' est de type fini. $\square$

(2.7.9.2) On peut maintenant donner un exemple de module de type fini qui n'est pas de présentation finie. Soit A un anneau non noethérien soit I un idéal de A qui n'est pas de type fini (par exemple, on peut prendre $A = \mathbb{C}[X_n]_{n \in \mathbb{N}}$ et $I = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Le A -module quotient A/I est de type fini (il est engendré par $\bar{1}$) mais n'est pas de présentation finie : sinon, le noyau I de la flèche quotient $A \rightarrow A/I$ serait de type fini d'après la proposition 2.7.9.1 ci-dessus.

(2.7.9.3) Corollaire. Soit (S_i) une famille finie et couvrante (2.7.1) de parties multiplicatives de A et soit M un A -module. Le A -module M est de présentation finie si et seulement si le $S_i^{-1}A$ -module $S_i^{-1}M$ est de présentation finie pour tout i .

Démonstration. L'implication directe provient du fait que le caractère «de présentation finie» est stable par extension des scalaires en vertu de l'exactitude à droite du produit tensoriel (cf. 2.5.5.3 pour le raisonnement précis). Supposons maintenant que $S_i^{-1}M$ est de présentation finie pour tout i , et montrons qu'il en va de même de M .

On déduit du lemme 2.7.3.1 que M est de type fini. Choisissons une partie génératrice finie $(m_j)_{1 \leq j \leq n}$ de M ; soit $p: A^n \rightarrow M$ la surjection $(a_j) \mapsto \sum a_j m_j$ et soit K le noyau de p .

Pour tout i , la suite

$$0 \rightarrow S_i^{-1}K \rightarrow (S_i^{-1}A)^n \rightarrow S_i^{-1}M \rightarrow 0$$

induite par p est exacte par platitude de $S_i^{-1}A$. Comme $S_i^{-1}M$ est de présentation finie par hypothèse, $S_i^{-1}K$ est de type fini d'après la proposition 2.7.9.1. Ceci vaut pour tout i ; en appliquant une fois encore le lemme 2.7.3.1, on voit que K est de type fini, et donc que M est de présentation finie. $\square$

(2.7.9.4) Remarque. La finitude de la famille (S_i) est indispensable à la validité du corollaire 2.7.9.3, cf. la remarque 2.7.3.2.

(2.7.10) Soient M et N deux A -modules et soit B une A -algèbre. Toute application A -linéaire de M vers N induit une application B -linéaire de $B \otimes_A M$ vers $B \otimes_A N$; on définit par ce biais une application A -linéaire de $\text{Hom}_A(M, N)$ vers $\text{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$, puis une application B -linéaire

$$B \otimes_A \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

par la propriété universelle de l'extension des scalaires.

(2.7.10.1) Proposition. *Supposons que M est de présentation finie et que B est plat sur A . La flèche*

$$B \otimes_A \operatorname{Hom}_A(M, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

est alors bijective.

Démonstration. Fixons un isomorphisme $M \simeq L/(\sum_i a_{ij}e_i)_j$, où L est un module libre de base finie $(e_i)_{i \in I}$ et où les a_{ij} sont des scalaires, les indices j parcourant un ensemble fini J .

Soit C une A -algèbre quelconque. On a par exactitude à droite du produit tensoriel un isomorphisme

$$C \otimes_A M \simeq C \otimes_A L / \left(\sum_j a_{ij} \cdot 1 \otimes e_i \right)_i,$$

et les $1 \otimes e_i$ forment une base de $C \otimes_A L$. On en déduit un isomorphisme naturel, et fonctoriel en C , entre $\operatorname{Hom}_C(C \otimes_A M, C \otimes_A N)$ et le noyau de

$$(C \otimes_A N)^I \rightarrow (C \otimes_A N)^J, \quad (n_i) \mapsto \left(\sum_i a_{ij} n_j \right)_j$$

(prendre pour n_i l'image de $\overline{1 \otimes e_i}$).

En particulier, $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ est le noyau de $N^I \rightarrow N^J, (n_i) \mapsto (\sum_i a_{ij} n_j)_j$, et $\operatorname{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$ est le noyau de

$$(B \otimes_A N)^I \rightarrow (B \otimes_A N)^J, \quad (n_i) \mapsto \left(\sum_i a_{ij} n_j \right)_j.$$

Le foncteur $B \otimes \bullet$ commute aux produits finis (qui sont des sommes directes), et à la formation du noyau car B est plat. Il s'ensuit que

$$\operatorname{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N) \simeq B \otimes_A \operatorname{Hom}_A(M, N),$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

(2.7.10.2) Corollaire. *Soient M et N deux A -modules de présentation finie et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A tel que les $A_{\mathfrak{p}}$ -modules $M_{\mathfrak{p}}$ et $N_{\mathfrak{p}}$ soient isomorphes. Il existe alors $f \notin \mathfrak{p}$ tel que les A_f -modules M_f et N_f soient isomorphes.*

Démonstration. Les localisés de A étant plats sur A , on déduit de la proposition 2.7.10.1 les égalités

$$\operatorname{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{Hom}_A(M, N)_{\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad \operatorname{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(N_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{Hom}_A(N, M)_{\mathfrak{p}}$$

et

$$\operatorname{Hom}_{A_f}(M_f, N_f) = \operatorname{Hom}_A(M, N)_f \quad \text{et} \quad \operatorname{Hom}_{A_f}(N_f, M_f) = \operatorname{Hom}_A(N, M)_f$$

pour tout $f \in A$. Rappelons par ailleurs que si Λ est un A -module quelconque, $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ s'identifie à la colimite filtrante des Λ_f pour $f \notin \mathfrak{p}$ (2.5.7.4).

Choisissons un isomorphisme $u: M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ et soit v sa réciproque. Par ce qui précède, on peut voir u et v comme des éléments respectifs de $\text{Hom}_A(M, N)_{\mathfrak{p}}$ et $\text{Hom}_A(N, M)_{\mathfrak{p}}$, et il existe $g \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que u et v proviennent respectivement de deux éléments (encore notés u et v) de $\text{Hom}_A(M, N)_g = \text{Hom}_{A_g}(M_g, N_g)$ et $\text{Hom}_A(N, M)_g = \text{Hom}_{A_g}(N_g, M_g)$.

Les égalités $u \circ v = \text{Id}_{N_{\mathfrak{p}}}$ et $v \circ u = \text{Id}_{M_{\mathfrak{p}}}$ peuvent être vues comme des égalités entre éléments de $\text{Hom}_A(M, M)_{\mathfrak{p}}$ et $\text{Hom}_A(N, N)_{\mathfrak{p}}$, et il existe donc un élément $f \in A \setminus \mathfrak{p}$, multiple de g , telle que les égalités en question valent déjà dans $\text{Hom}_A(M, M)_f = \text{Hom}_{A_f}(M_f, M_f)$ et $\text{Hom}_A(N, N)_f = \text{Hom}_{A_f}(N_f, N_f)$. En conséquence, les A_f -modules M_f et N_f sont isomorphes. $\square$

Retour aux modules projectifs

(2.7.11) Lemme. *Soit M un A -module et soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille couvrante et finie de parties multiplicatives de A . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *le A -module M est projectif de type fini ;*
- ii) *pour tout i , le S_i^{-1} -module $S_i^{-1}M$ est projectif de type fini.*

Démonstration. L'implication $i \Rightarrow ii$) provient du fait que le caractère projectif et le fait d'être de type fini sont préservés par extension des scalaires.

Supposons maintenant que ii) soit vraie ; on déduit de 2.7.8 que $S_i^{-1}M$ est pour tout i un $S_i^{-1}A$ -module de *présentation finie*, et le lemme 2.7.3.1 assure alors que M est de *présentation finie*. Choisissons une famille génératrice finie $(m_i)_{i \in I}$ de M et soit p la surjection $A^I \rightarrow M, (a_i) \mapsto \sum a_i m_i$; elle induit une application $\text{Hom}_A(M, A^I) \rightarrow \text{Hom}_A(M, M)$, d'où pour tout i une application

$$S_i^{-1}\text{Hom}_A(M, A^I) \rightarrow S_i^{-1}\text{Hom}_A(M, M)$$

qui s'identifie d'après la proposition 2.7.10.1 (et le fait que M est de *présentation finie*) à la flèche

$$\text{Hom}_{S_i^{-1}A}(S_i^{-1}M, (S_i^{-1}A)^I) \rightarrow \text{Hom}_{S_i^{-1}A}(S_i^{-1}M, S_i^{-1}M),$$

laquelle est surjective puisque $S_i^{-1}M$ est projectif. On déduit alors du lemme 2.7.2.4 que p est surjective. En particulier, Id_M a un antécédent s par p , qui fournit une section de p . Ainsi, M est projectif (cf. la condition iii) du th. 2.7.7). $\square$

(2.7.12) Théorème. *Soit M un A -module. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Le module M est projectif et de type fini.*
- ii) *Le module M est de présentation finie, et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , il existe un entier $n_{\mathfrak{p}}$ tel que $M_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}}$.*
- iii) *Il existe une famille finie (f_i) d'éléments de A engendrant A comme idéal, et pour tout i un entier n_i tel que $M_{f_i} \simeq A_{f_i}^{n_i}$.*

Démonstration. Supposons i) vraie. On sait que M est de *présentation finie* d'après 2.7.8. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A . Le $A_{\mathfrak{p}}$ -module $M_{\mathfrak{p}}$ est projectif et de type fini, et est dès lors libre de rang fini d'après le lemme 2.7.5.4. Ainsi, ii) est vraie.

Supposons ii) vraie et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A . La proposition 2.7.10.2 assure qu'il existe $f_{\mathfrak{p}} \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $M_{\mathfrak{p}} \simeq A_{f_{\mathfrak{p}}}^{n_{\mathfrak{p}}}$.

Par construction, l'idéal engendré par les $f_{\mathfrak{p}}$ n'est contenu dans aucun idéal premier de A , et il coïncide dès lors avec A . Cela signifie qu'il existe une famille $(a_{\mathfrak{p}})$ de scalaires *presque tous nuls* tels que $\sum a_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} = 1$. Si I désigne l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ tels que $a_{\mathfrak{p}} \neq 0$, la famille $(f_i)_{i \in I}$ vérifie les conditions requises par iii).

Supposons iii) vraie. Pour tout i , le A_{f_i} -module M_{f_i} est libre de rang fini, et est en particulier projectif et de présentation finie. Comme la famille $(\{f_i^n\}_n)_i$ est couvrante (cf. l'exemple b) de 2.7.1.3), le lemme 2.7.11 assure que M est projectif de type fini. $\square$

(2.7.13) L'exemple des anneaux de Dedekind. Il y a différentes caractérisation des anneaux de Dedekind, et celle que nous utiliserons est la suivante. Un anneau A est de Dedekind si et seulement si il est intègre, noethérien, et possède la propriété suivante : si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non nul de A alors $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète, c'est-à-dire un anneau principal ayant (à équivalence près) un unique élément irréductible π , qui est alors nécessairement le générateur de son unique idéal maximal.

(2.7.14) Proposition. Soit A un anneau de Dedekind et soit K son corps des fractions. Soit M un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est projectif de type fini et $M_{\mathfrak{p}}$ est libre de rang 1 sur $A_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A .
- ii) M est projectif de type fini et $K \otimes_A M$ est de dimension 1 sur K .
- iii) M est isomorphe comme A -module à un idéal non nul de A .

Par ailleurs un idéal de A est libre comme A -module si et seulement si il est principal.

Démonstration. Commençons par une remarque que nous allons utiliser constamment : si S est une partie multiplicative de A ne contenant pas 0 et si N est un A -module sans torsion, la flèche naturelle $N \rightarrow S^{-1}N = S^{-1}A \otimes_A N$ est injective (c'est une conséquence triviale de la condition de nullité d'une fraction).

Si i) est vraie, ii) est vraie : prendre $\mathfrak{p} = \{0\}$. Supposons maintenant que ii) est vraie. Comme M est projectif il est facteur direct d'un module libre, et en particulier sans torsion. En conséquence, M s'injecte dans le K -espace vectoriel $K \otimes_A M$ qui est de dimension 1, ce qui fournit (une fois choisie une base de $K \otimes_A M$) un plongement A -linéaire de M dans K , donc une identification de M à un sous- A -module de K . Comme M est de type fini, il est engendré par un nombre fini de fractions ; soit α un multiple commun non nul de leurs dénominateurs. Le sous A -module αM de K est isomorphe à M , et contenu dans A ; c'est donc un idéal de A , nécessairement non nul puisque $K \otimes_A M$ est non nul, d'où iii).

Montrons maintenant iii) $\Rightarrow$ i). On peut supposer que M est un idéal non nul de A ; il est donc de présentation finie par noéthérianité de A . Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A . L'injection $M \hookrightarrow A$ induit par platitude de $A_{\mathfrak{p}}$ une injection $M_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow A_{\mathfrak{p}}$, et $M_{\mathfrak{p}}$ est par ailleurs non nul puisque M est non nul et s'injecte dans $M_{\mathfrak{p}}$ (étant contenu dans l'anneau intègre A , le module M est sans torsion).

En conséquence $M_{\mathfrak{p}}$ s'identifie pour tout $\mathfrak{p}$ à un idéal non nul de l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$, lequel est principal (c'est évident si $\mathfrak{p} = \{0\}$, et c'est dû au fait que A est un anneau de Dedekind sinon). Il s'ensuit que le $A_{\mathfrak{p}}$ -module $M_{\mathfrak{p}}$ est libre de rang 1. On en déduit alors i) grâce au théorème 2.7.12 dont la condition ii) est ici vérifiée.

Il reste à justifier la dernière assertion. Si M est un idéal principal de A il est engendré par un élément a et est donc libre, de rang 0 si $a = 0$ et de rang 1 sinon. Réciproquement, supposons que M soit un idéal de A , et qu'il soit libre comme A -module. Si a et b sont deux éléments non nuls de M , on a l'égalité $b \cdot a - a \cdot b = 0$, ce qui exclut qu'ils puissent figurer tous deux dans une même famille libre. En conséquence, le rang de M est égal à zéro (auquel cas M est nul) ou à un (auquel cas M est engendré par un élément non nul de A). Dans tous les cas, M est principal. $\square$

2.8 Algèbres finies et algèbres entières

On fixe un anneau A .

Définitions, exemples, premières propriétés

(2.8.1) Définition. Soit B une A -algèbre. On dit que B est *finie* si B est de type fini comme A -module.

(2.8.2) Exemples et premières propriétés.

(2.8.2.1) Si I est un idéal de A alors A/I est engendré par $\bar{1}$ comme A -module. C'est donc une A -algèbre finie.

(2.8.2.2) Une A -algèbre finie est de type fini comme A -module; elle l'est *a fortiori* comme A -algèbre.

(2.8.2.3) Soit B une A -algèbre finie et soit C une B -algèbre finie. La A -algèbre C est alors finie; nous laissons au lecteur le soin de rédiger la preuve, qui repose essentiellement sur un «principe de la famille génératrice télescopique».

(2.8.3) Proposition-définition. Soit B une A -algèbre et soit $x \in B$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) L'élément x annule un polynôme unitaire appartenant à $A[X]$.
- ii) La A -algèbre $A[x]$ est finie.
- iii) Il existe une sous- A -algèbre finie C de B contenant x .

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que x est entier sur A . Si tout élément de B est entier sur A , on dit que B est entière sur A .

Démonstration. Supposons que i) soit vraie; il existe alors $n \geq 0$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ tels que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Si M désigne le sous- A -module de B engendré par les x^i pour $0 \leq i \leq n-1$, on en déduit que $x^n \in M$ puis, par récurrence, que $x^m \in M$ pour tout $m \geq n$.

Ainsi, l'algèbre $A[x]$ coïncide avec le A -module de type fini M , et elle est en conséquence finie, ce qui prouve ii).

Si ii) est vraie, il est clair que iii) est vraie (prendre $C = A[x]$).

Supposons que iii) soit vraie, et soit $u : C \rightarrow C$ la multiplication par x . Comme C est un A -module de type fini, le théorème 2.3.1 – appliqué ici avec $I = A$ – assure l'existence d'un polynôme unitaire P à coefficients dans A (dont le degré peut être choisi égal au cardinal d'une famille génératrice finie fixée du A -module C) tel que $P(u) = 0$. On a en particulier $P(x) = P(u)(1) = 0$, et i) est vraie. $\square$

(2.8.4) Quelques remarques.

(2.8.4.1) On déduit de la caractérisation des éléments entiers par la propriété iii) ci-dessus que toute algèbre finie est entière. Nous allons voir ci-dessous que la réciproque est vraie pour les algèbres de type fini, mais fausse en général.

(2.8.4.2) Au cours de la preuve de iii) $\Rightarrow$ i), on a vu que si C est engendré comme A -module par n éléments, alors on peut trouver un polynôme unitaire de $A[X]$ annulant x et de degré n .

(2.8.4.3) Soit $f : B \rightarrow C$ un morphisme de A -algèbres, et soit x un élément de B entier sur A . Il est immédiat que $f(x)$ est entier sur A aussi (tout polynôme de $A[X]$ annulant x annule $f(x)$).

(2.8.4.4) Soit I un idéal de A et soit B une A/I -algèbre ; on peut aussi voir B comme une A -algèbre. Un élément de B est entier sur A si et seulement si il est entier sur A/I , et B est finie sur A si et seulement si elle est finie sur A/I (cela provient du fait que si $\bar{a}$ est la classe modulo I d'un élément a de A alors $\bar{a}b = ab$ pour tout $b \in B$).

(2.8.4.5) Soit B une A -algèbre, soit J un idéal de B et soit I un idéal de A dont l'image dans B est contenue dans J . Si x est un élément de B entier sur A , alors son image $\bar{x}$ dans B/J est entière sur A/I : on peut ou bien le voir directement (si P annule x alors la réduction de P modulo I annule $\bar{x}$) ou bien utiliser 2.8.4.3 pour conclure que $\bar{x}$ est entier sur A , puis 2.8.4.4 pour en déduire qu'il est entier sur A/I .

(2.8.4.6) Soit k un corps et soit L une k -algèbre. Si x est un élément de L entier sur k , l'idéal de $k[T]$ formé des polynômes annulateurs de x est non nul, et admet donc un unique générateur unitaire, appelé le *polynôme minimal* de x ; c'est aussi le polynôme unitaire annulant x de degré minimal.

Si L est un corps, on préfère parler d'élément de L *algébrique* sur k plutôt qu'entier sur k ; et si tous les éléments de L sont algébriques sur k , on dit que L elle-même est une extension algébrique de k .

(2.8.4.7) *Remarque.* Soit A un anneau, soit B une A -algèbre et soit x un élément de B entier sur A . En général, il n'y a pas de bonne notion de «polynôme minimal» pour x sur l'anneau A .

Donnons un exemple. Soit k un corps, et soit A l'anneau $k[T^2, T^3] \subset k[T]$. L'élément T de $k[T]$ est entier sur A et annule $X^2 - T^2$. Comme $T \notin A$, il n'annule aucun polynôme unitaire de degré 1 à coefficients dans A , et $X^2 - T^2$

est donc de degré minimal parmi les polynômes unitaires de $A[X]$ annulant T . Par ailleurs T annule aussi $X^3 - T^3$, dont on vérifie immédiatement qu'il n'est pas multiple de $X^2 - T^2$ dans $A[X]$ (il ne l'est même pas dans $k[T, X]$).

(2.8.5) Proposition. *Soit B une A -algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) B est finie.
- 2) B est entière et de type fini.
- 3) B est engendrée comme A -algèbre par un nombre fini d'éléments entiers sur A .

Démonstration. On a déjà vu qu'une A -algèbre finie est de type fini, et entière (2.8.4.1). L'implication 2) $\Rightarrow$ 3) est évidente ; il reste à montrer que 3) $\Rightarrow$ 1).

Supposons que B soit engendrée par une famille finie $b_1, \dots, b_r$ d'éléments entiers sur A . Nous allons montrer par récurrence sur r que B est finie.

Si $r = 0$ alors la flèche structurale $A \rightarrow B$ est surjective, ce qui veut dire que B est de la forme A/I pour un certain idéal I ; elle est dès lors finie (2.8.2.1).

Supposons $r > 0$ et la propriété vraie au rang $r - 1$. Notons C la A -algèbre $A[b_1, \dots, b_{r-1}]$. D'après l'hypothèse de récurrence, C est finie sur A . L'élément b_r de B est entier sur A par hypothèse ; il l'est *a fortiori* sur C . La C -algèbre $C[b_r] = B$ est donc finie en vertu de la proposition 2.8.3 ; par transitivité, B est finie sur A . $\square$

(2.8.6) Corollaire-définition. *Soit B une A -algèbre. Le sous-ensemble C de B formé des éléments entiers sur A est une sous- A -algèbre de B , que l'on appelle fermeture intégrale de A dans B . En particulier, si B est engendrée par des éléments entiers sur A , elle est entière sur A .*

Démonstration. Soient x et y appartenant à C . Il résulte de la proposition 2.8.5 ci-dessus, et plus précisément de l'implication 3) $\Rightarrow$ 2) de son énoncé, que $A[x, y]$ est entière sur A , ce qui achève la démonstration. $\square$

(2.8.7) Corollaire. *Soit B une A -algèbre entière, soit C une B -algèbre et soit x un élément de C . Si x est entier sur B il est entier sur A ; en particulier si C est entière sur B elle est entière sur A .*

Démonstration. Comme x est entier sur B , il existe $n \geq 0$ et $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$ tels que $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 = 0$. Soit B' la sous- A -algèbre de B engendrée par les b_i . Comme ceux-ci sont entiers sur A (car B est entière sur A), la A -algèbre B' est finie d'après la proposition 2.8.5.

Par construction, x est entier sur B' , et $B'[x]$ est donc finie sur B' . Par transitivité, $B'[x]$ est finie sur A , et x est en conséquence entier sur A . $\square$

(2.8.8) Exemple d'algèbre entière non finie. Notons $\overline{\mathbb{Z}}$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. C'est par définition une $\mathbb{Z}$ -algèbre entière. Nous allons montrer par l'absurde qu'elle n'est pas finie.

Si elle l'était, il résulterait de 2.8.4.2 qu'il existe un entier N tel que tout élément de $\overline{\mathbb{Z}}$ soit annulé par un polynôme unitaire de degré N à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Soit maintenant $n \geq 1$. L'élément $\sqrt[n]{2}$ de $\mathbb{C}$ appartient à $\overline{\mathbb{Z}}$ car il est annulé par $X^n - 2$. Ce dernier est irréductible sur $\mathbb{Q}$ en vertu du critère d'Eisenstein,

et est donc le polynôme minimal de $\sqrt[n]{2}$ sur $\mathbb{Q}$. En conséquence, $\sqrt[n]{2}$ n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients rationnels de degré $< n$, et on aboutit ainsi à une contradiction en prenant $n > N$.

(2.8.9) Lemme. *Soit C une A -algèbre et soit B une A -algèbre. Si la A -algèbre C est finie (resp. entière) alors la B -algèbre $B \otimes_A C$ est finie (resp. entière).*

Démonstration. Supposons C finie sur A , et soit (e_i) une famille génératrice finie de C comme A -module. Comme $(1 \otimes e_i)$ engendre $B \otimes_A C$ comme B -module, la B -algèbre $B \otimes_A C$ est finie.

Supposons C entière sur A . La B -algèbre $B \otimes_A C$ est engendrée comme B -algèbre (et même comme B -module) par les $1 \otimes c$ pour c parcourant C . Or si $c \in C$, l'élément $1 \otimes c$ de C est entier sur A (2.8.4.3), et *a fortiori* sur B . Il s'ensuit, en vertu du corollaire 2.8.6, que $B \otimes_A C$ est entière sur B . $\square$

(2.8.10) Soit A un anneau intègre. On appelle *clôture intégrale* de A la fermeture intégrale de A dans son corps des fractions. On dit que A est *intégralement clos*, ou *normal*, s'il est égal à sa clôture intégrale.

(2.8.10.1) Exercice. Démontrez qu'un anneau factoriel est intégralement clos. Démontrez que l'anneau des fonctions holomorphes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est intègre, et intégralement clos.

(2.8.10.2) L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ n'est pas intégralement clos. Son corps des fractions est en effet $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, lequel contient le nombre d'or

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

qui n'appartient pas à $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ mais est entier sur celui-ci, puisqu'il est racine de $X^2 - X - 1$.

L'anneau $\mathbb{C}[T^2, T^3] \subset \mathbb{C}[T]$ n'est pas intégralement clos. Son corps des fractions est en effet $\mathbb{C}(T)$ (car $T = T^3/T^2$). Il contient T qui n'appartient pas à $\mathbb{C}[T^2, T^3]$ mais est entier sur celui-ci, puisqu'il est racine de $X^2 - T^2$.

Lemme de *going-up* et dimension de Krull

Nous allons maintenant démontrer le lemme dit de *going-up*. Il est extrêmement utile en algèbre commutative et géométrie algébrique (le langage des schémas permettra d'en donner une interprétation géométrique), mais est également intéressant pour sa preuve. Celle-ci consiste en effet essentiellement à se ramener à un cas particulier élémentaire que nous traitons au préalable (lemme 2.8.11 ci-dessous) par de judicieux passages au quotient et localisations; elle peut donc aider à mieux comprendre comment utiliser en pratique ces opérations.

(2.8.11) Lemme. *Soit B un anneau intègre et soit A un sous-anneau de B . On suppose que B est entier sur A . Les assertions suivantes sont alors équivalentes.*

- i) A est un corps.
- ii) B est un corps.

Démonstration. Supposons que A est un corps, et soit x un élément non nul de B . Comme x est entier sur A , la A -algèbre $A[x]$ est un A -espace vectoriel de dimension finie. Comme B est intègre et x non nul, l'endomorphisme $y \mapsto xy$ de $A[x]$ est injectif, et partant surjectif. Il existe en particulier $y \in A[x] \subset B$ tel que $xy = 1$, et x est inversible dans B . Ainsi, B est un corps.

Supposons maintenant que B est un corps, et soit x un élément non nul de A . Comme B est un corps, x possède un inverse $1/x$ dans B . Comme B est entière sur A , il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans A tels que

$$\frac{1}{x^n} + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + a_0 = 0.$$

En multipliant par x^n , il vient

$$1 = x(-a_{n-1} - a_{n-2}x - \dots - a_0x^{n-1}),$$

et donc

$$\frac{1}{x} = -a_{n-1} - a_{n-2}x - \dots - a_0x^{n-1},$$

qui appartient à A . Ainsi, x est inversible dans A et A est un corps. $\square$

(2.8.12) Lemme de *going-up*. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux faisant de B une A -algèbre entière.

- 1) Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B , l'idéal premier $f^{-1}(\mathfrak{q})$ de A est maximal si et seulement si $\mathfrak{q}$ est maximal.
- 2) Si $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ sont deux idéaux premiers distincts de B tels que l'on ait $f^{-1}(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q}')$, alors $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ sont non comparables pour l'inclusion.
- 3) Si J est un idéal de B et si l'on pose $I = f^{-1}(J)$, il existe pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contenant I un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B contenant J tel que $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

Remarque. Dans le cas où f est injectif, on a $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ et l'assertion 3) ci-dessus affirme alors que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tel que $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ (en fait, comme on le verra ci-dessous, on ramène la preuve de 3) à celle de ce cas particulier). Autrement dit, si $f : A \rightarrow B$ est une injection entière alors $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est surjective.

(2.8.13) Démonstration du lemme de *going-up*. On commence par établir l'assertion 1), qui sera elle-même utilisée dans la preuve de 2) et 3).

(2.8.13.1) Preuve de 1). Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B . Posons $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$. La flèche $f : A \rightarrow B$ induit une injection $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$, qui fait de $B/\mathfrak{q}$ une $A/\mathfrak{p}$ -algèbre entière (2.8.4.5). Comme $\mathfrak{q}$ est premier, $B/\mathfrak{q}$ est intègre. Il résulte alors du lemme 2.8.11 que $B/\mathfrak{q}$ est un corps si et seulement si $A/\mathfrak{p}$ est un corps; autrement dit, $\mathfrak{q}$ est maximal si et seulement si $\mathfrak{p}$ est maximal, ce qui achève de prouver 1).

(2.8.13.2) Preuve de 2). Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A . Il s'agit de montrer que les éléments de $\{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B, f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\}$ sont deux à deux non comparables pour l'inclusion, c'est-à-dire encore que les antécédents de $\mathfrak{p}$ pour l'application $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ induite par f sont deux à deux non comparables pour l'inclusion.

Posons $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Le localisé $S^{-1}A$ est l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ d'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, et l'on a par ailleurs

$$f(S)^{-1}B \simeq B \otimes_A A_{\mathfrak{p}};$$

en particulier, $f(S)^{-1}B$ est entier sur $A_{\mathfrak{p}}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B & \longleftarrow & \text{Spec } f(S)^{-1}B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } A & \longleftarrow & \text{Spec } A_{\mathfrak{p}} \end{array} .$$

La flèche $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Spec } A$ induit une bijection d'ensembles ordonnés entre $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ et l'ensemble des idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{p}$ (elle fait correspondre $\mathfrak{p}$ à $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$); la flèche $\text{Spec } f(S)^{-1}B \rightarrow \text{Spec } B$ induit une bijection d'ensembles ordonnés entre $\text{Spec } f(S)^{-1}B$ et l'ensemble des idéaux premiers de B ne rencontrant pas $f(S)$.

Par ailleurs, soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B situé au-dessus de $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire tel que $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Cette dernière égalité assure que $\mathfrak{q}$ ne rencontre pas $f(S)$, et donc que $\mathfrak{q}$ appartient à l'image de $\text{Spec } f(S)^{-1}B$. Il s'ensuit qu'il existe une bijection d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des idéaux premiers de B situés au-dessus de $\mathfrak{p}$, et celui des idéaux premiers de $f(S)^{-1}B$ situés au-dessus de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Mais comme $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est l'idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$, il résulte de l'assertion 1), appliquée à la $A_{\mathfrak{p}}$ -algèbre entière $f(S)^{-1}B$, que l'ensemble des idéaux premiers de $f(S)^{-1}B$ situés au-dessus de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est exactement l'ensemble des idéaux *maximaux* de $f(S)^{-1}B$; or ceux-ci sont deux à deux non comparables pour l'inclusion, et il en va donc de même des idéaux premiers de B situés au-dessus de $\mathfrak{p}$, d'où 2).

(2.8.13.3) Preuve de 3). La flèche $A \rightarrow B$ induit une injection $A/I \rightarrow B/J$. On a par ailleurs un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B/J & \longrightarrow & \text{Spec } B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } A/I & \longrightarrow & \text{Spec } A \end{array} .$$

La flèche $\text{Spec } A/I \rightarrow \text{Spec } A$ induit une bijection entre $\text{Spec } A/I$ et l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I , et la flèche $\text{Spec } B/J \rightarrow \text{Spec } B$ induit une bijection entre $\text{Spec } B/J$ et l'ensemble des idéaux premiers de A contenant J ; on peut donc, quitte à remplacer A par A/I et B par B/J , se ramener au cas où I et J sont nuls et où f est injective

Il s'agit maintenant, un idéal premier $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ étant donné, de montrer l'existence d'un idéal premier $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ au-dessus de $\mathfrak{p}$.

Posons $S = A \setminus \mathfrak{p}$. En se fondant sur le diagramme commutatif considéré au 2.8.13.2 ci-dessus lors de la preuve de 2), on voit qu'il suffit de montrer l'existence d'un idéal premier de $f(S)^{-1}B$ situé au-dessus de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Par définition de S , cette partie ne contient pas 0. Comme f est injective, $f(S)$ ne contient pas non plus 0; par conséquent, $f(S)^{-1}B$ est non nul. Il possède

dès lors un idéal maximal $\mathfrak{m}$. En vertu de l'assertion 1), appliquée à la $A_{\mathfrak{p}}$ -algèbre entière $f(S)^{-1}B$, l'idéal $\mathfrak{m}$ est situé au-dessus d'un idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$, et donc de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Ceci achève la démonstration. $\square$

(2.8.14) Définition. Soit A un anneau. On appelle *dimension de Krull* de A la borne supérieure de l'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers n tels qu'il existe une chaîne

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

où les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers de A (attention : notez bien que la numérotation commence à 0).

(2.8.14.1) Remarque. L'ensemble $\mathcal{E}$ peut être vide. C'est le cas si et seulement si A n'a pas d'idéaux premiers, c'est-à-dire si et seulement si $A = \{0\}$; il y a alors une ambiguïté dans la définition de la dimension de Krull³, qu'on lève en posant par convention $\dim_{\text{Krull}}\{0\} = -\infty$.

Lorsque A est non nul, l'ensemble non vide $\mathcal{E}$ peut être fini, auquel cas la dimension de Krull appartient à $\mathbb{N}$, ou infini – cela signifie qu'il existe des chaînes strictement croissantes arbitrairement longues d'idéaux premiers de A , et l'on a alors $\dim_{\text{Krull}} A = +\infty$.

(2.8.14.2) Commentaire sur la terminologie. Nous verrons plus bas que le terme *dimension* est bien choisi : la dimension de Krull d'un anneau peut en effet s'interpréter comme la dimension du schéma qui lui est associé.

(2.8.14.3) Anneaux de dimension nulle. Un anneau A est de dimension de Krull nulle si et seulement si A est non nul et tout idéal premier de A est maximal. Lorsque A est intègre, ceci revient à demander que (0) soit maximal, c'est-à-dire que A soit un corps.

(2.8.14.4) Anneaux intègres de dimension 1. Un anneau intègre A est de dimension 1 si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- A possède un idéal premier non nul ;
- tout idéal premier non nul de A est maximal.

C'est notamment le cas lorsque A est un anneau de Dedekind qui n'est pas un corps. En particulier, tout anneau principal qui n'est pas un corps est de dimension de Krull égale à 1.

(2.8.14.5) Un anneau de dimension de Krull infinie. Soit A l'anneau $k[X_i]_{1 \leq i}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'idéal $\mathfrak{p}_j := (X_i)_{1 \leq i \leq j}$ de A est premier : en effet, le quotient $A/\mathfrak{p}_j$ s'identifie naturellement à l'anneau intègre $k[X_i]_{i > j}$. Pour tout entier n , on dispose d'une chaîne strictement croissante de $n + 1$ idéaux premiers de A , à savoir

$$(0) \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n.$$

En conséquence, $\dim_{\text{Krull}} A = +\infty$.

3. En effet, nous invitons le lecteur à vérifier que la borne supérieure de la partie vide est par définition *le plus petit élément de l'ensemble ordonné dans lequel on travaille* (s'il existe). Il faut donc préciser ici quel est l'ensemble en question ; les conventions adoptées reviennent à décider qu'on travaille dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(2.8.15) On démontre que si A est un anneau *local noethérien* dont l'idéal maximal possède un système de générateurs de cardinal n , alors $\dim_{\text{Krull}} A \leq n$ (en particulier, $\dim_{\text{Krull}} A$ est finie).

(2.8.15.1) Un anneau local A est dit *régulier* s'il est noethérien et si son idéal maximal possède un système de générateurs de cardinal exactement égal à $\dim_{\text{Krull}} A$. Les anneaux locaux réguliers jouent un rôle majeur en géométrie algébrique.

(2.8.15.2) Nagata a construit un exemple d'anneau noethérien (non local) dont la dimension de Krull est infinie.

(2.8.16) Proposition. *Soit A un anneau et soit B une A -algèbre. On suppose que la flèche $f : A \rightarrow B$ est injective et que B est entière sur A . On a alors $\dim_{\text{Krull}} B = \dim_{\text{Krull}} A$.*

Démonstration. On va montrer l'égalité des dimensions par double majoration.

(2.8.16.1) *Prouvons que $\dim_{\text{Krull}} B \geq \dim_{\text{Krull}} A$.* Soit $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de A . Il existe alors une chaîne $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_n$ d'idéaux premiers de B tels que $f^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$ pour tout i . Pour le voir, on raisonne par récurrence sur n .

Si $n = 0$, c'est vrai par la remarque suivant l'énoncé du lemme de going-up (c'est ici qu'intervient l'injectivité de f).

Supposons maintenant $n > 0$ et les $\mathfrak{q}_i$ construits pour $i \leq n-1$. On applique alors l'assertion 3) du lemme de going-up avec $J = \mathfrak{q}_{n-1}$, $I = f^{-1}(\mathfrak{q}_{n-1}) = \mathfrak{p}_{n-1}$, et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$. Elle assure l'existence d'un idéal premier $\mathfrak{q}_n$ de B contenant $\mathfrak{q}_{n-1}$ et tel que $f^{-1}(\mathfrak{q}_n) = \mathfrak{p}_n$, qui est ce qu'on souhaitait.

Comme $f^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$ pour tout i , et comme les $\mathfrak{p}_i$ sont deux à deux distincts, les $\mathfrak{q}_i$ sont deux à deux distincts. La chaîne des $\mathfrak{q}_i$ est ainsi *strictement* croissante, et a même longueur que celle des $\mathfrak{p}_i$. On en déduit l'inégalité requise

$$\dim_{\text{Krull}} B \geq \dim_{\text{Krull}} A.$$

(2.8.16.2) *Prouvons que $\dim_{\text{Krull}} A \geq \dim_{\text{Krull}} B$.* Soit $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de B . Pour tout indice i , posons $\mathfrak{p}_i = f^{-1}(\mathfrak{q}_i)$. Les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers de A .

Soit $i \leq n-1$; nous allons montrer que $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$. L'inclusion large $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{i+1}$ provient immédiatement des définitions (et de l'inclusion large de $\mathfrak{q}_i$ dans $\mathfrak{q}_{i+1}$). Il reste à s'assurer que $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}$; mais s'ils étaient égaux, on aurait alors $f^{-1}(\mathfrak{q}_i) = f^{-1}(\mathfrak{q}_{i+1})$ avec $\mathfrak{q}_i \subsetneq \mathfrak{q}_{i+1}$, contredisant l'assertion 2) du lemme de going-up.

La chaîne des $\mathfrak{p}_i$ est ainsi *strictement* croissante, et a même longueur que celle des $\mathfrak{q}_i$. On en déduit l'inégalité requise

$$\dim_{\text{Krull}} A \geq \dim_{\text{Krull}} B,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

2.9 Rappels et compléments sur les extensions de corps

Nous nous proposons dans cette section d'étudier les propriétés de base des extensions de corps. En ce qui concerne les extensions algébriques, vous avez sans doute déjà rencontré la plupart des résultats qui y sont présentés, mais probablement avec des preuves différentes de celles que nous allons donner ici, qui exploitent le produit tensoriel ainsi que la notion d'*algèbre de scindage universelle* que nous allons maintenant introduire.

L'algèbre de scindage universelle

(2.9.1) *La division euclidienne.* Soit A un anneau. Si P et D sont deux éléments de $A[X]$ et si le coefficient dominant de D est inversible, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $A[X]$ avec $\deg R < \deg D$ tel que $P = QD + R$; la preuve est *mutatis mutandis* la même que dans le cas classique des corps, et nous la laissons en exercice au lecteur.

En particulier, si a est un élément de A , il existe un unique couple (Q, α) tel que $P = (X - a)Q + \alpha$ où Q appartient à $A[X]$ et α à A . Il s'ensuit que $P(a) = 0$ si et seulement si le polynôme P peut s'écrire comme un produit $(X - a)Q$ dans l'anneau $A[X]$, et un tel Q est alors unique (insistons sur le fait que cela vaut sans aucune hypothèse sur A , qu'on ne suppose pas intègre ni même réduit); on peut donc parler dans ce cas du quotient de P par $X - a$, et le noter $P/(X - a)$.

(2.9.2) Pour tout entier j et toute famille finie $(a_1, \dots, a_n)$ d'éléments d'un anneau A , on pose

$$\Sigma_j(a_1, \dots, a_n) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, \text{card } I=j} \prod_{i \in I} a_i$$

(les Σ_j sont les «fonctions symétriques élémentaires»).

(2.9.3) Soit A un anneau, soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ un polynôme unitaire appartenant à $A[X]$ et soit B une A -algèbre. Un *scindage* de P dans B est une famille $(b_1, \dots, b_n)$ d'éléments de B tels que $P = \prod (X - b_i)$, c'est-à-dire encore tels que $a_j = (-1)^{n-j} \Sigma_{n-j}(b_1, \dots, b_n)$ pour tout j appartenant à $1, \dots, n-1$ (par abus, on note encore P son image dans $B[X]$).

Si $(b_1, \dots, b_n)$ est un n -uplet d'éléments de B , il résulte immédiatement des définitions que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $(b_1, \dots, b_n)$ est un scindage de P ;
- ii) $P(b_1) = 0$ et $(b_2, \dots, b_n)$ est un scindage de $P/(X - b_1)$.

(2.9.3.1) On note $\mathcal{S}_A(P)$ la A -algèbre

$$A[T_1, \dots, T_n] / ((-1)^{n-j} \Sigma_{n-j}(T_1, \dots, T_n) - a_j)_{1 \leq j \leq n}.$$

Par construction, $(\overline{T_1}, \dots, \overline{T_n})$ est un scindage de P dans $\mathcal{S}_A(P)$, et pour toute A -algèbre B la flèche $\varphi \mapsto \varphi(\overline{T_1}, \dots, \overline{T_n})$ établit une bijection fonctorielle en B entre $\text{Hom}_A(\mathcal{S}_A(P), B)$ et l'ensemble des scindages de P dans B . On dit que $\mathcal{S}_A(P)$ est l'*algèbre de scindage universelle* de P sur A .

(2.9.3.2) Le polynôme P annule l'élément $\bar{T}$ de $A[T]/P$. On peut donc former le quotient Q de P par $X - \bar{T}$ dans $(A[T]/P)[X]$; c'est un polynôme unitaire de degré $n - 1$.

(2.9.3.3) Lemme. *Les A -algèbres $\mathcal{S}_A(P)$ et $\mathcal{S}_{A[T]/P}(Q)$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. Écrivons $Q = X^{n-1} + \alpha_{n-2}X^{n-2} + \dots + \alpha_0$; on a alors

$$\mathcal{S}_{A[T]/P}(Q) = (A[T]/P)[S_2, \dots, S_n] / ((-1)^{n-j} \Sigma_{n-j}(S_2, \dots, S_n) - \alpha_j)_{1 \leq j \leq n-1}.$$

Soit B une A -algèbre. Se donner un morphisme de A -algèbres de $\mathcal{S}_{A[T]/P}(Q)$ dans B revient à se donner un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{A[T]/P}(Q) & \xrightarrow{\quad} & B \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ A[T]/P & & \\ \uparrow & \nearrow & \\ A & & \end{array}$$

(la flèche de $A[T]/P$ vers B est en effet uniquement déterminée par les autres flèches et la commutativité du diagramme). En dévissant ce diagramme en ses deux triangles, on voit que cela revient à effectuer deux choix successifs.

- *Première étape (le triangle inférieur).* On choisit un morphisme de A -algèbres de $A[T]/P$ dans B , c'est-à-dire un élément b_1 de B tel que $P(b_1) = 0$ (l'image de $\bar{T}$); notons que ce morphisme fait de B une $A[T]/P$ -algèbre.
- *Seconde étape (le triangle supérieur).* On choisit un morphisme de $A[T]/P$ -algèbres de $\mathcal{S}_{A[T]/P}(Q)$ dans B , c'est-à-dire un scindage $(b_2, \dots, b_n)$ de Q dans B (l'image de $(\bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n)$).

Mais par définition, un scindage de Q dans B est la même chose qu'un scindage de $\tilde{Q}$ dans B , où $\tilde{Q}$ désigne l'image de Q dans $B[X]$; et l'on déduit par ailleurs de l'égalité $(X - \bar{T})Q = P$ que $(X - b_1)\tilde{Q} = P$ dans $B[X]$, ou encore que $\tilde{Q} = P/(X - b_1)$.

On a donc finalement montré que $\varphi \mapsto (\varphi(\bar{T}), \varphi(\bar{S}_2), \dots, \varphi(\bar{S}_n))$ établit une bijection entre $\text{Hom}_A(\mathcal{S}_{A[T]/P}(Q), B)$ et l'ensemble des éléments $(b_1, \dots, b_n)$ de B^n tels que $P(b_1) = 0$ et tels que $(b_2, \dots, b_n)$ soit un scindage de $P/(X - b_1)$, ensemble qui n'est autre que celui des scindages de P dans B ; et cette bijection est clairement fonctorielle en B . Il résulte alors du lemme de Yoneda qu'il existe un (unique) isomorphisme de A -algèbres de $\mathcal{S}_A(P)$ sur $\mathcal{S}_{A[T]/P}(Q)$ qui envoie $\bar{T}_1$ sur $\bar{T}$ et $\bar{T}_i$ sur $\bar{S}_i$ pour $i \geq 2$. $\square$

(2.9.3.4) Corollaire. *Le A -module $\mathcal{S}_A(P)$ est libre de rang $n!$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 0$ alors $P = 1$ et $\mathcal{S}_A(P) = A$, et l'assertion est vraie. Supposons maintenant $n > 0$ et l'assertion démontrée au rang $n - 1$, et reprenons les notations du lemme 2.9.3.3 ci-dessus. On a $\mathcal{S}_A(P) \simeq \mathcal{S}_{A[T]/P}(Q)$. L'algèbre $A[T]/P$ est libre de rang n

comme A -module (une base étant donnée par $\bar{1}, \dots, \overline{T^{n-1}}$). Le polynôme Q étant unitaire de degré $n - 1$, l'hypothèse de récurrence assure que $\mathcal{S}_{A[T]/P}(Q)$ est libre de rang $(n - 1)!$ sur $A[T]/P$. Par le principe de la base télescopique, le A -module $\mathcal{S}_A(P)$ est libre de rang $n \cdot (n - 1)! = n!$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

(2.9.4) Soit maintenant $\mathbf{P} = (P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes unitaires à coefficients dans A ; pour tout i , on écrit

$$P_i = X^{n_i} + a_{i, n_i - 1} X^{n_i - 1} + \dots + a_{i, 0}.$$

Si B est une A -algèbre, on appellera scindage de $\mathbf{P}$ dans B toute famille $(b_{ij})_{i \in I, 1 \leq j \leq n_i}$ d'éléments de B telle que $(b_{i, j})_{1 \leq j \leq n_i}$ soit pour tout $i \in I$ un scindage de P_i .

Pour tout indice $i \in I$ et tout entier j compris entre 1 et n_i , on se donne n_i indéterminées $T_{i, 1}, \dots, T_{i, n_i}$ et l'on note $Q_{i, j}$ le polynôme $(-1)^{n_i - j} \sum_{\ell=0}^{n_i - j} T_{i, \ell} T_{i, n_i - \ell} - a_{i, j}$ en ces dernières.

On pose alors

$$\mathcal{S}_A(\mathbf{P}) = A[T_{i, \ell}]_{i \in I, 1 \leq \ell \leq n_i} / (Q_{i, j})_{i \in I, 1 \leq j \leq n_i}.$$

(2.9.4.1) Par construction, la famille $(\overline{T_{i, j}})_{i \in I, 1 \leq j \leq n_i}$ engendre $\mathcal{S}_A(\mathbf{P})$ comme A -algèbre, est un scindage de $\mathbf{P}$ dans celle-ci, et pour toute A -algèbre B la flèche $\varphi \mapsto (\varphi(\overline{T_{i, j}}))_{i, j}$ établit une bijection fonctorielle en B entre $\text{Hom}_A(\mathcal{S}_A(P), B)$ et l'ensemble des scindages de $\mathbf{P}$ dans B .

(2.9.4.2) Dans le cas d'une famille singleton, on retrouve l'algèbre construite au 2.9.3.1, et sa propriété universelle.

(2.9.4.3) Soit i_0 un élément de I et soit $\mathbf{P}'$ la famille $(P_i)_{i \neq i_0}$. Il résulte immédiatement des définitions que $\mathcal{S}_A(\mathbf{P}) \simeq \mathcal{S}_{\mathcal{S}_A(\mathbf{P}')}(\mathcal{S}_A(\mathbf{P}'))$; en vertu du corollaire 2.9.3.4, $\mathcal{S}_A(\mathbf{P})$ est libre de rang $n_{i_0}!$ sur $\mathcal{S}_A(\mathbf{P}')$. Si I est fini, on déduit de ce qui précède, en raisonnant par récurrence sur le cardinal de I , que $\mathcal{S}_A(\mathbf{P})$ est libre de rang $\prod_i n_i!$ sur A .

(2.9.4.4) Supposons que l'anneau A est non nul. L'algèbre $\mathcal{S}_A(\mathbf{P})$ est alors non nulle. En effet, supposons qu'elle soit nulle; cela signifierait que 1 appartient à l'idéal engendré par les $Q_{i, j}$, et donc qu'on peut écrire $1 = \sum A_{i, j} Q_{i, j}$ pour une certaine famille $(A_{i, j})$ de polynômes *presque tous nuls*. Soit J le sous-ensemble de I formé des indices i pour lesquels il y a au moins un terme $A_{i, j}$ non nul; l'égalité $1 = \sum A_{i, j} Q_{i, j}$ implique que l'idéal $(Q_{i, j})_{i \in J, 1 \leq j \leq n_i}$ de l'algèbre $A[T_{i, \ell}]_{i \in J, 1 \leq \ell \leq n_i}$ contient 1, et donc que l'algèbre $\mathcal{S}_A(P_i)_{i \in J}$ est nulle. Mais c'est absurde car en vertu de 2.9.4.3 cette algèbre est, en tant que A -module, libre de rang $\prod_{i \in J} n_i!$ (qui est strictement positif), et est en particulier non nulle.

Extensions algébriques

(2.9.5) Soit $k \hookrightarrow L$ une extension de corps. L'ensemble des éléments de L algébriques sur k est une k -algèbre d'après le corollaire 2.8.6, qui est intègre et entière sur k ; c'est donc un corps en vertu du lemme 2.8.11 (on retrouve ainsi un

résultat classique, que vous connaissiez certainement). On l'appelle la *fermeture algébrique* de k dans L .

(2.9.6) Lemme. *Soit k un corps. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) tout polynôme irréductible de $k[X]$ est de degré 1 ;*
- ii) tout polynôme non constant de $k[X]$ a une racine dans k ;*
- iii) tout polynôme non nul de $k[X]$ est scindé dans k ;*
- iv) toute extension algébrique de k est triviale.*

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que k est algébriquement clos.

Démonstration. Comme tout polynôme non constant admet au moins un diviseur irréductible, i) $\Rightarrow$ ii). L'implication ii) $\Rightarrow$ iii) se démontre par une récurrence immédiate sur le degré.

Supposons que iii) soit vraie, et soit L une extension algébrique de k . Soit x un élément de L ; son polynôme minimal sur k étant scindé dans k en vertu de l'hypothèse iii), l'élément x appartient en fait à k . Par conséquent, $L = k$ et iv) est vraie.

Enfin, supposons iv) vraie et soit P un polynôme irréductible de $k[X]$. Le quotient $k[X]/P$ est une extension finie de k de degré $\deg P$. Elle est triviale en vertu de l'hypothèse iv), ce qui entraîne que $\deg P = 1$. $\square$

(2.9.6.1) Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

(2.9.6.2) On appelle *clôture algébrique* d'un corps k toute extension algébrique de k qui est algébriquement close.

(2.9.6.3) Soit k un corps et soit L une extension algébriquement close de k . La fermeture algébrique K de k dans L est alors une clôture algébrique de k . En effet, K est par définition une extension algébrique de k . Soit P un polynôme non nul de $K[X]$. Comme L est algébriquement clos, P est scindé dans L et s'écrit donc $a \prod (X - a_i)$ avec les a_i dans L , et $a \in K^\times$. Mais chaque a_i est algébrique sur K et partant sur k (puisque K est algébrique sur k). Par conséquent, les a_i appartiennent à K et ce dernier est donc algébriquement clos.

Ainsi, la fermeture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

(2.9.7) Corps de décomposition d'une famille de polynômes sur k . Soit $\mathbf{P} = (P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes non nuls de $k[X]$. Si L est une extension de k , nous dirons qu'un élément de L est une racine de $\mathbf{P}$ si c'est une racine de l'un des P_i ; nous dirons que $\mathbf{P}$ est scindé dans L si tous les P_i sont scindés dans L .

Nous appellerons *corps de décomposition de $\mathbf{P}$ sur k* toute extension de k dans laquelle $\mathbf{P}$ est scindé et qui est engendrée comme extension de k par les racines de $\mathbf{P}$; notons qu'une telle extension est automatiquement algébrique, et finie si $\mathbf{P}$ est finie.

(2.9.8) Exemples.

(2.9.8.1) Le corps k est un corps de décomposition de la famille *vide* sur k .

(2.9.8.2) Lorsque $\mathbf{P}$ est une famille singleton $\{P\}$, on parle simplement de corps de décomposition du polynôme P .

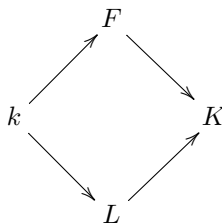
Notez que si $\mathbf{P} = (P_i)$ est finie, un corps de décomposition de $\mathbf{P}$ est simplement un corps de décomposition de $\prod_i P_i$.

(2.9.8.3) Soit $\mathbf{P} = (P_i)$ la famille de *tous* les polynômes unitaires à coefficients dans k et soit L une extension de k . C'est un corps de décomposition de $\mathbf{P}$ sur k si et seulement si c'est une clôture algébrique de k .

En effet, supposons que L soit un corps de décomposition de $\mathbf{P}$. C'est alors une extension algébrique de k . De plus, soit L' une extension algébrique de L et soit $x \in L'$. Comme x est algébrique sur L , il est algébrique sur k . Comme son polynôme minimal sur k est l'un des P_i , il est scindé dans L ; par conséquent, $x \in L$ et $L' = L$; ainsi, L est algébriquement clos et est donc une clôture algébrique de k .

Réciproquement, soit L une clôture algébrique de k . Comme L est algébriquement clos, chacun des P_i est scindé dans L . Par ailleurs, L est constitué d'éléments algébriques sur k , et chacun d'eux est une racine de l'un des P_i (son polynôme minimal, par exemple). En conséquence L est un corps de décomposition de $\mathbf{P}$ sur k .

(2.9.9) Proposition. Soient $k \hookrightarrow F$ et $k \hookrightarrow L$ deux extensions de corps. Il existe alors un corps K et deux plongements $F \hookrightarrow K$ et $L \hookrightarrow K$ tels que le diagramme



commute.

Démonstration. Les k -espaces vectoriels F et L sont non nuls, puisque ce sont des corps. Comme ils sont libres sur k (c'est le cas de tout espace vectoriel), leur produit tensoriel est *non nul*. La k -algèbre $F \otimes_k L$ étant non nulle, elle possède un idéal maximal. Si l'on note K le corps quotient correspondant, les flèches composées $F \rightarrow F \otimes_k L \rightarrow K$ et $L \rightarrow F \otimes_k L \rightarrow K$ satisfont les conditions requises. $\square$

(2.9.10) Théorème. Soit k un corps et soit $\mathbf{P} = (P_i)$ une famille de polynômes non nuls à coefficients dans k . Il existe un corps de décomposition de $\mathbf{P}$ sur k , et deux tels corps sont isomorphes comme extensions de k .

Démonstration. Nous allons prouver séparément l'existence et l'unicité à isomorphisme près.

(2.9.10.1) Existence d'un corps de décomposition. Quitte à diviser chacun des P_i par son coefficient dominant (ce qui ne change pas la notion de corps de décomposition de $\mathbf{P}$), on peut supposer qu'ils sont tous unitaires. Soit R la k -algèbre $\mathcal{S}_k(\mathbf{P})$ (2.9.4). Les propriétés de R que nous allons utiliser ici sont les suivantes : c'est une k -algèbre *non nulle* (2.9.4.4), engendrée par une famille $(r_{ij})_{i \in I, 1 \leq r_i \leq \deg P_i}$ qui est un scindage de $\mathbf{P}$, ce qui signifie que P_i est égal à $\prod_{1 \leq j \leq \deg P_i} (X - r_{ij})$ pour tout i .

Puisque R est non nulle, elle possède un idéal maximal ; en d'autres termes, il existe une surjection de R vers un corps K , que nous voyons comme une extension de k via la flèche composée $k \rightarrow R \rightarrow K$. Pour tout (i, j) , on note s_{ij} l'image de r_{ij} dans K ; par construction, les s_{ij} engendrent K comme extension de k , et l'on a $P_i = \prod_{1 \leq j \leq \deg P_i} (X - s_{ij})$ pour tout i . Ainsi, $\mathbf{P}$ est scindée dans K et celui-ci est engendré comme extension de k par les racines de $\mathbf{P}$. Autrement dit, K est un corps de décomposition de $\mathbf{P}$ sur k .

(2.9.10.2) Unicité à isomorphisme près. Soient F et L deux corps de décomposition de $\mathbf{P}$ sur k . La proposition 2.9.9 assure l'existence d'une extension K de k et de deux k -plongements $i : F \hookrightarrow K$ et $j : L \hookrightarrow K$. L'image $i(F)$ est isomorphe à F , et est donc un corps de décomposition de $\mathbf{P}$. Il s'ensuit que $\mathbf{P}$ est scindée dans K , et que $i(F)$ est le sous-corps de K engendré par k et les racines de $\mathbf{P}$. Pour la même raison, $j(L)$ est le sous-corps de K engendré par k et les racines de $\mathbf{P}$. Par conséquent, $j(L) = i(K)$. On a donc deux k -isomorphismes $F \simeq i(F)$ et $i(F) = j(L) \simeq L$, d'où un k -isomorphisme $F \simeq L$. $\square$

(2.9.11) Corollaire. *Soit k un corps. Il possède une clôture algébrique, et deux clôtures algébriques de k sont isomorphes comme extensions de k .*

Démonstration. Il suffit en vertu de 2.9.8.3 d'appliquer le théorème 2.9.10 à la famille de tous les polynômes unitaires de $k[X]$. $\square$

(2.9.12) Commentaires.

(2.9.12.1) La démonstration que nous avons donnée de l'existence d'un corps de décomposition de $\mathbf{P}$ est naturelle : elle consiste à scinder les P_i «par décret».

Celle de son unicité à isomorphisme près peut apparaître plus déroutante et le lecteur pourrait se demander à son propos à quel moment «il se passe vraiment quelque chose». C'est en fait lors du choix d'un idéal maximal de $F \otimes_k L$, effectué lorsqu'on veut exhiber une extension K dans laquelle se plongent F et L (cf. la preuve de la proposition 2.9.9).

(2.9.12.2) Si l'existence d'un idéal maximal dans un anneau non nul A quelconque requiert l'axiome du choix, il n'est pas nécessaire d'invoquer ce dernier si A est une algèbre finie sur un corps : il suffit alors de prendre un idéal strict de A de dimension maximale.

Par conséquent, notre preuve du théorème 2.9.10 *ne nécessite pas l'axiome du choix lorsque $\mathbf{P}$ est finie*, puisqu'elle ne fait appel à l'existence d'idéaux maximaux que dans $\mathcal{S}_k(\mathbf{P})$ qui est alors une k -algèbre finie (2.9.4.3), et dans $F \otimes_k L$ qui est par exemple une F -algèbre finie puisque L est finie sur k (en l'occurrence, F est aussi finie sur k mais la finitude de l'un des deux facteurs du produit tensoriel est ici suffisante).

(2.9.13) Lemme. *Soit k un corps, soit F une extension algébrique de k , et soit L une extension algébriquement close de k . Il existe alors un k -plongement de F dans L .*

Démonstration. La proposition 2.9.9 assure l'existence d'une extension K de k et de deux k -plongements $i : F \hookrightarrow K$ et $j : L \hookrightarrow K$. L'image $j(L)$ est un sous-corps algébriquement clos de K contenant k . Par ailleurs, tout élément de $i(F)$ est algébrique sur k , et *a fortiori* sur $j(L)$; puisque ce dernier

est algébriquement clos, il vient $i(F) \subset j(L)$. Si l'on note j^{-1} l'isomorphisme réciproque de $j: L \simeq j(L)$ la composée $j^{-1} \circ i$ est alors un k -plongement de F dans L . $\square$

Degré de transcendance

(2.9.14) Soit k un corps, soit A une k -algèbre, et soit (x_i) une famille d'éléments de A . On dit que les x_i sont *algébriquement indépendants* sur k , ou que la famille (x_i) est *algébriquement indépendante* sur k , si le morphisme

$$k[X_i]_i \rightarrow k[x_i]_i$$

qui envoie X_i sur x_i pour tout i est bijectif. Il est toujours surjectif; par conséquent, les x_i sont algébriquement indépendants si et seulement si il est injectif, c'est-à-dire si et seulement si les x_i n'annulent aucun polynôme non trivial à coefficients dans k . Dans ce cas $x_i \neq x_j$ dès que $i \neq j$, et toute sous-famille de $(x_i)_{i \in I}$ est encore algébriquement indépendante.

Si A est non nulle il existe toujours au moins une famille d'éléments de A algébriquement indépendants sur k : la famille *vide*. Notons par contre que si $A = \{0\}$ elle ne possède aucune famille d'éléments algébriquement indépendants puisque k ne s'injecte pas dans $\{0\}$.

(2.9.15) Exemple. Soit k un corps et soit L une extension de k . Si $x \in L$, la famille singleton $\{x\}$ est algébriquement indépendante sur k si et seulement si x n'est pas algébrique sur k . On dit alors que x est *transcendant* sur k .

(2.9.16) Soit k un corps et soit L une extension de k . Si S est une partie de L on note $k(S)$ la sous-extension de L engendrée par S , c'est-à-dire encore le sous-corps de L engendré par k et S ; c'est aussi le corps des fractions de l'algèbre $k[S]$. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de L , on écrira $k(x_i)_{i \in I}$ plutôt que $k(\{x_i\}_{i \in I})$, et si $x \in L$ on écrira $k[x]$ plutôt que $k\{x\}$.

Si les x_i sont algébriquement indépendants sur k , le corps $k(x_i)_i$ s'identifie au corps $k(X_i)_i$ des fractions rationnelles en les indéterminées X_i .

(2.9.17) On fixe pour toute la suite de la section un corps k et une extension L de k . Soit $\prec$ la relation entre éléments et parties de L telle que $x \prec S$ si et seulement si x est algébrique sur $k(S)$.

La relation $\prec$ est une relation de dépendance au sens de la définition 0.4.2. L'axiome (1) de *loc. cit.* est en effet clairement vérifié; l'axiome (2) résulte de la transitivité de l'algébricité, et l'axiome (3) du fait qu'un polynôme n'a qu'un nombre fini de coefficients non nuls. Montrons pour terminer l'axiome (4). Soit donc S un sous-ensemble de L , soit y un élément de S , soit T l'ensemble $S \setminus \{y\}$ et soit x un élément de L tel que $x \prec S$ et $x \not\prec T$. Puisque $x \prec S$, il existe une famille $(a_0, \dots, a_n)$ d'éléments de $k(S)$ avec $a_n \neq 0$ tels que $\sum_i a_i x^i = 0$; et quitte à multiplier les a_i par un élément convenable et non nul de $k[S]$, on peut supposer qu'ils appartiennent tous à $k[S] = k[T][y]$; écrivons $a_i = \sum_j \alpha_{ij} y^j$ avec $\alpha_{ij} \in k[T]$. On a

$$\sum_j \left(\sum_i \alpha_{ij} x^i \right) y^j = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x^i y^j = \sum_i a_i x^i = 0.$$

Nous allons montrer qu'il existe j tel que $\sum_i \alpha_{ij} x^i$ soit non nul, ce qui entraînera au vu de ce qui précède que y est algébrique sur $k(T \cup \{x\})$ et donc que l'axiome (4) est satisfait. Supposons par l'absurde que $\sum_i \alpha_{ij} x^i$ soit nul pour tout j . Comme x est par hypothèse transcendant sur $k(T)$, il s'ensuit que $\alpha_{ij} = 0$ pour tout (i, j) , puisque que $a_i = 0$ pour tout i , ce qui est absurde.

(2.9.18) Puisque $\prec$ est une relation de dépendance, les résultats généraux de la section 0.4 s'appliquent ici; nous allons voir concrètement comment ils se déclinent. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de L .

(2.9.18.1) La famille (x_i) est libre au sens de 0.4.4.1 si et seulement si elle est algébriquement indépendante.

En effet, supposons que (x_i) soit libre au sens de 0.4.4.1 et montrons par l'absurde que les x_i sont algébriquement indépendants; on les suppose donc algébriquement liés. Comme un polynôme n'a qu'un nombre fini de monômes non nuls, il existe un sous-ensemble fini I' de I tel que les x_i pour $i \in I'$ soient algébriquement liés; on peut de surcroît supposer I' minimal pour cette propriété. Par définition de I' , il existe un polynôme P non nul dans $k[X_i]_{i \in I'}$ s'annulant sur $(x_i)_{i \in I'}$; puisque L est non nul, P est non constant et il existe donc $j \in I'$ tel que la variable X_j apparaisse effectivement dans P , c'est-à-dire encore tel que P soit non constant lorsqu'on l'écrit comme un polynôme $\sum A_\ell X_j^\ell$ appartenant à $k[X_i]_{i \in I', i \neq j}[X_j]$. Il existe donc $m > 0$ tel que l'élément A_m de $k[X_i]_{i \in I', i \neq j}$ soit non nul; par minimalité de I' , les x_i pour i parcourant $I' \setminus \{j\}$ sont algébriquement indépendants, et $A_m(x_i)_{i \in I', i \neq j}$ est dès lors non nul. Le polynôme $\sum A_\ell(x_i)_{i \in I', i \neq j} X_j^\ell$ est alors un polynôme non nul à coefficients dans $k(x_i)_{i \in I', i \neq j}$ et annulant x_j ; ce dernier est par conséquent algébrique sur $k(x_i)_{i \neq j}$, contredisant le fait que (x_i) est libre au sens de 0.4.4.1.

Réciproquement, supposons que (x_i) soit algébriquement indépendante, et montrons que cette famille est libre au sens de 0.4.4.1. Soit $j \in I$; il s'agit de s'assurer que $x_j \notin \{x_i\}_{i \neq j}$. On raisonne par l'absurde; on suppose donc que x_j annule un polynôme non nul $\sum \alpha_\ell X^\ell$ à coefficients dans $k(x_i)_{i \neq j}$. En multipliant ce polynôme par un élément convenable de $k[x_i]_{i \neq j}$ on peut supposer que chacun des α_ℓ appartient à $k[x_i]_{i \neq j}$, c'est-à-dire qu'il est de la forme $A_\ell[x_i]_{i \neq j}$ pour un certain polynôme $A_\ell \in k[X_i]_{i \neq j}$. Mais alors $\sum A_\ell X_j^\ell$ est un polynôme non nul de $k[X_i]_{i \in I}$ qui s'annule en (x_i) , contredisant le caractère algébriquement indépendant de cette famille.

(2.9.18.2) Il résulte immédiatement des définitions que la famille (x_i) est génératrice au sens de 0.4.4.2 si et seulement si L est algébrique sur son sous-corps $k(x_i)_{i \in I}$.

(2.9.18.3) On appellera *base de transcendance* de L sur k toute famille $(x_i)_i$ d'éléments de L qui est une base au sens de 0.4.4.3. Au vu de 2.9.18.1 et 2.9.18.2, cela revient à demander que les x_i soient algébriquement indépendants et que L soit algébrique sur $k(x_i)_i$.

(2.9.19) Les faits suivants résultent de ce qui précède et des corollaires 0.4.8.1, 0.4.8.2 et 0.4.8.3.

(2.9.19.1) Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de L algébriquement indépendants sur k , et soit $(y_j)_{j \in J}$ une famille d'éléments de L tels que L soit algébrique sur $k(y_j)_j$. Il existe alors un sous-ensemble J' de J tel que $(x_i)_{i \in I} \amalg (y_j)_{j \in J'}$ soit une base de transcendance de L sur k .

(2.9.19.2) Toute famille d'éléments de L algébriquement indépendants sur k est contenue dans une base de transcendance de L sur k . Toute famille d'éléments de L engendrant une sous-extension de L sur laquelle L est algébrique contient une base de transcendance de L sur k .

(2.9.19.3) Le corps L possède une base de transcendance sur k et toutes les bases de transcendance de L sur k ont même cardinal, que nous notons N .

Le cardinal de toute famille d'éléments de L algébriquement indépendants sur k est inférieur ou égal à N , et si N est fini, ce cardinal est égal à N si et seulement si la famille en question est une base de transcendance de L sur k .

Le cardinal de toute famille d'éléments de L engendrant une sous-extension sur laquelle L est algébrique est supérieur ou égal à N , et si N est fini, ce cardinal est égal à N si et seulement si la famille en question est une base de transcendance de L sur k .

(2.9.20) Définition. On appelle *degré de transcendance* de L sur k le cardinal commun à toutes les bases de transcendance de L sur k (2.9.19.3).

(2.9.21) Exemples. Le degré de transcendance de $k(X_1, \dots, X_n)$ sur k est égal à n , et $(X_1, \dots, X_n)$ en est une base de transcendance.

Soit f une fraction rationnelle non constante dans $k(X)$. L'élément X est alors algébrique sur $k(f)$ (exercice facile). En conséquence f est transcendant (sinon, X serait algébrique sur k), et $\{f\}$ est une base de transcendance de $k(X)$ sur k .

2.10 Algèbres de type fini sur un corps : normalisation de Noether, *Nullstellensatz*

On fixe pour toute cette section un corps k .

Le lemme de normalisation de Noether

(2.10.1) Notre premier objectif est de démontrer le «lemme de normalisation de Noether», qui permet dans certaines situations de ramener l'étude d'une k -algèbre de type fini A à celle d'une algèbre de polynômes (le fait de savoir écrire A comme un *quotient* d'une telle algèbre est le plus souvent insuffisant, tant la théorie des idéaux de $k[X_1, \dots, X_n]$ est complexe dès que $n > 1$).

Pour ce faire, nous avons choisi d'isoler le cœur technique de la démonstration en lui donnant un statut de proposition indépendante, par laquelle nous allons commencer.

(2.10.2) Proposition. Soit $n \geq 0$ et soit I un idéal strict de $k[X_1, \dots, X_n]$. Il existe n éléments $Y_1, \dots, Y_n$ de $k[X_1, \dots, X_n]$ tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- 1) les Y_i sont algébriquement indépendants sur k ;
- 2) $k[X_1, \dots, X_n]$ est entière sur $k[Y_1, \dots, Y_n]$;
- 3) l'idéal $I \cap k[Y_1, \dots, Y_n]$ de $k[Y_1, \dots, Y_n]$ est engendré par $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ pour un certain entier m compris entre 0 et n .

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

(2.10.2.1) Remarque préalable. Supposons avoir construit une famille $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $k[X_1, \dots, X_n]$ telle que $k[X_1, \dots, X_n]$ soit entière sur $k[Y_1, \dots, Y_n]$. Le corps $k(X_1, \dots, X_n)$ est alors engendré par des éléments algébriques sur $k(Y_1, \dots, Y_n)$, et est donc lui-même algébrique sur $k(Y_1, \dots, Y_n)$. En conséquence, $(Y_1, \dots, Y_n)$ contient une base de transcendance de $k(X_1, \dots, X_n)$ sur k ; mais comme le degré de transcendance de $k(X_1, \dots, X_n)$ sur k vaut n , cela signifie que $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de transcendance de $k(X_1, \dots, X_n)$ sur k . En particulier, les Y_i sont algébriquement indépendants. Ainsi, si l'on prouve 2), l'assertion 1) sera *automatiquement* vérifiée.

(2.10.2.2) Pour démontrer la proposition, on procède par récurrence sur n . Si $n = 0$ alors $k[X_1, \dots, X_n] = k$. Comme I est strict, il est nécessairement nul. On vérifie alors aussitôt qu'on peut prendre pour (Y_i) la famille vide.

Supposons maintenant $n > 0$, et la proposition vraie au rang $n-1$. Si $I = \{0\}$ on peut prendre $Y_i = X_i$ pour tout i . On se place désormais dans le cas où $I \neq \{0\}$. On choisit alors un élément $P \neq 0$ dans I ; comme I est strict, P est non constant.

(2.10.2.3) On pose $Z_1 = P$. La prochaine étape de la preuve consiste à construire $Z_2, \dots, Z_n$ de sorte que $k[X_1, \dots, X_n]$ soit entier sur $k[Z_1, \dots, Z_n]$.

Nous allons en fait chercher les Z_i sous une forme très particulière. Plus précisément, donnons-nous une famille $r_2, \dots, r_n$ d'entiers > 0 . Nous allons chercher des conditions suffisantes sur les r_i pour que $k[X_1, \dots, X_n]$ soit entier sur $k[Z_1, \dots, Z_n]$ avec $Z_i = X_i + X_1^{r_i}$ pour $i \geq 2$.

Notons déjà que comme $X_i = Z_i - X_1^{r_i}$ pour tout $i \geq 2$, et comme Z_i est évidemment entier sur $k[Z_1, \dots, Z_n]$ pour tout i il suffit, pour obtenir ce qu'on souhaite, de faire en sorte que X_1 soit entier sur $k[Z_1, \dots, Z_n]$.

Lorsqu'on remplace dans l'écriture de P chacun des X_i pour $i \geq 2$ par $Z_i - X_1^{r_i}$, un monôme donné de multi-degré $(i_1, \dots, i_n)$ donne lieu à un polynôme en X_1 à coefficients dans $k[Z_2, \dots, Z_n]$ dont le terme dominant est de la forme $\alpha X_1^{i_1 + r_2 i_2 + \dots + r_n i_n}$, avec $\alpha \in k^\times$.

(2.10.2.4) Supposons que lorsque $(i_1, \dots, i_n)$ parcourt l'ensemble des multi-degrés des monômes de P , les entiers $i_1 + r_2 i_2 + \dots + r_n i_n$ soient deux à deux distincts. Dans ce cas, le maximum N de ces entiers est atteint pour un et un seul multi-degré $(i_1, \dots, i_n)$, et N est nécessairement non nul puisque P n'est pas constant. Il résulte alors de ce qui précède que l'égalité $P - Z_1 = 0$ peut se récrire

$$\alpha X_1^N + Q(X_1) - Z_1 = 0,$$

où $\alpha \in k^\times$ et où Q est un polynôme de degré $< N$ en X_1 , à coefficients dans $k[Z_2, \dots, Z_n]$. Comme $N > 0$, le polynôme $Q(X_1) - Z_1$ est encore un polynôme de degré $< N$ en X_1 , à coefficients dans $k[Z_1, \dots, Z_n]$. En multipliant l'égalité ci-dessus par α^{-1} , on obtient

$$X_1^N + \alpha^{-1}(Q(X_1) - Z_1) = 0,$$

et X_1 est entier sur $k[Z_1, \dots, Z_n]$.

(2.10.2.5) Il suffit donc, pour construire des polynômes $Z_2, \dots, Z_n$ satisfaisant la propriété souhaitée, d'exhiber une famille $(r_2, \dots, r_n)$ d'entiers strictement

positifs telle que les entiers $i_1 + r_2 i_2 + \dots + r_n i_n$ soient deux à deux distincts lorsque $(i_1, \dots, i_n)$ parcourt l'ensemble des multi-degrés des monômes de P .

Soit p un entier strictement supérieur au maximum des degrés intervenant dans les monômes de P . On peut alors prendre $r_2 = p, r_3 = p^2, \dots, r_n = p^{n-1}$: en effet, ils satisfont la condition exigée en vertu de l'unicité du développement d'un entier en base p .

(2.10.2.6) Construction des Y_i et conclusion. On déduit de 2.10.2.1 que les Z_i sont algébriquement indépendants sur k . En particulier, $k[Z_2, \dots, Z_n]$ est une algèbre de polynômes en $n-1$ variables. Comme I est strict, $1 \notin I \cap k[Z_2, \dots, Z_n]$ et ce dernier est donc un idéal strict de $k[Z_2, \dots, Z_n]$. Il s'ensuit, par l'hypothèse de récurrence, qu'il existe une famille $(Y_2, \dots, Y_n)$ d'éléments de $k[Z_2, \dots, Z_n]$, algébriquement indépendants sur k et tels que :

- $k[Z_2, \dots, Z_n]$ est entier sur $k[Y_2, \dots, Y_n]$;
- l'idéal $I \cap k[Y_2, \dots, Y_n]$ de $k[Y_2, \dots, Y_n]$ est engendré par $(Y_2, \dots, Y_m)$ pour un certain m .

Posons $Y_1 = Z_1$. L'anneau $k[Z_1, \dots, Z_n]$ est alors engendré par des éléments entiers sur $k[Y_1, \dots, Y_n]$. Il est donc entier sur $k[Y_1, \dots, Y_n]$; par transitivité, $k[X_1, \dots, X_n]$ est entier sur $k[Y_1, \dots, Y_n]$. Cela force les Y_i à être algébriquement indépendants sur k (2.10.2.1).

Pour conclure, il suffit de montrer que l'idéal $I \cap k[Y_1, \dots, Y_n]$ de $k[Y_1, \dots, Y_n]$ est engendré par $(Y_1, \dots, Y_m)$. On a $Y_1 = Z_1 = P \in I$, et $Y_j \in I$ pour $2 \leq j \leq m$ par choix des Y_j . Par conséquent, l'idéal de $k[Y_1, \dots, Y_n]$ engendré par les Y_j pour $1 \leq j \leq m$ est contenu $I \cap k[Y_1, \dots, Y_n]$.

Il reste à vérifier l'inclusion réciproque. Soit $R \in I \cap k[Y_1, \dots, Y_n]$. On peut écrire $R = Y_1 S + T$, où $T \in k[Y_2, \dots, Y_n]$ (on met à part les monômes contenant Y_1). Comme $R \in I$ et $Y_1 \in I$, on a $T \in I \cap k[Y_2, \dots, Y_n]$. Par conséquent, T s'écrit $\sum_{2 \leq i \leq m} A_i Y_i$ avec $A_i \in k[Y_2, \dots, Y_m]$ pour tout i , et on a alors $R = S Y_1 + \sum_{2 \leq i \leq m} A_i Y_i$. Ainsi, R appartient à l'idéal de $k[Y_1, \dots, Y_n]$ engendré par $(Y_1, \dots, Y_m)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(2.10.3) Lemme de normalisation de Noether. Soit A une k -algèbre de type fini non nulle. Il existe une famille $(y_1, \dots, y_d)$ d'éléments de A algébriquement indépendants sur k et tels que A soit entière sur $k[y_1, \dots, y_d]$.

Démonstration. Comme A est de type fini, elle s'identifie à $k[X_1, \dots, X_n]/I$ pour un certain n et un certain idéal I de $k[X_1, \dots, X_n]$, qui est strict puisque A est non nulle. On peut donc appliquer la proposition 2.10.2 ci-dessus. Elle assure l'existence d'une famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ d'éléments de $k[X_1, \dots, X_n]$ algébriquement indépendants sur k et d'un entier $m \leq n$ tels que $k[X_1, \dots, X_n]$ soit entière sur $k[Y_1, \dots, Y_n]$, et tels que l'idéal $I \cap k[Y_1, \dots, Y_n]$ de $k[Y_1, \dots, Y_n]$ soit engendré par $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$.

L'isomorphisme de k -algèbres $(k[X_1, \dots, X_n]/I) \simeq A$ induit une injection $k[Y_1, \dots, Y_n]/(I \cap k[Y_1, \dots, Y_n]) \hookrightarrow A$, donc un isomorphisme de $k[Y_1, \dots, Y_n]/(I \cap k[Y_1, \dots, Y_n])$ sur une sous-algèbre A_0 de A ; comme $k[X_1, \dots, X_n]$ est entier sur $k[Y_1, \dots, Y_n]$, l'anneau A est entier sur A_0 .

Par ailleurs, l'intersection $I \cap k[Y_1, \dots, Y_n]$ étant égale à l'idéal $(Y_1, \dots, Y_m)$ de $k[Y_1, \dots, Y_n]$, la flèche composée

$$k[Y_{m+1}, \dots, Y_n] \rightarrow k[Y_1, \dots, Y_n] \rightarrow k[Y_1, \dots, Y_n]/(I \cap k[Y_1, \dots, Y_n])$$

est un isomorphisme. Il en résulte que l'isomorphisme $(k[X_1, \dots, X_n]/I) \simeq A$ induit un isomorphisme de k -algèbres $k[Y_{m+1}, \dots, Y_n] \simeq A_0$. Soient $y_1, \dots, y_d$ les images respectives de $Y_{m+1}, \dots, Y_m$ dans A (avec donc $d = n - m$) ; par ce qui précède, les y_i sont algébriquement indépendants sur k et la sous-algèbre A_0 de A est égale à $k[y_1, \dots, y_d]$; ceci achève la démonstration, puisqu'on a vu plus haut que A est entier sur A_0 . $\square$

(2.10.4) Commentaires.

(2.10.4.1) Comme A est de type fini comme k -algèbre, elle est de type fini comme B -algèbre pour toute sous-algèbre B de A . Il résulte alors de la proposition 2.8.5 que l'on obtiendrait un énoncé équivalent à celui du lemme de normalisation de Noether en remplaçant «entière sur $k[y_1, \dots, y_d]$ » par «finie sur $k[y_1, \dots, y_d]$ ». Nous avons opté pour l'épithète «entière» car ce que notre preuve du lemme de normalisation de Noether montre *effectivement*, c'est bien le caractère entier de A sur $k[y_1, \dots, y_d]$.

(2.10.4.2) Supposons A intègre. Dans ce cas, son corps des fractions est engendré par des éléments algébriques sur $k(y_1, \dots, y_d)$ et est donc lui-même algébrique sur $k(y_1, \dots, y_d)$. En conséquence, $(y_1, \dots, y_d)$ est une base de transcendance de $\text{Frac } A$ sur k , et l'entier d est dès lors nécessairement égal au degré de transcendance de $\text{Frac } A$ sur k .

Le Nullstellensatz

(2.10.5) Nous allons maintenant donner trois variantes du *Nullstellensatz*⁴, également appelé «théorème des zéros de Hilbert». Les deux premières s'énoncent dans un langage purement algébrique, la troisième évoque la géométrie algébrique et justifiera l'appellation du théorème.

(2.10.6) Première variante du Nullstellensatz. Soit A une k -algèbre de type fini. Si A est un corps, c'est une extension finie de k .

Démonstration. Le lemme de normalisation de Noether assure qu'il existe des éléments $y_1, \dots, y_d$ de A , algébriquement indépendants sur k et tels que A soit entière (ou finie, cf. 2.10.4.1) sur $k[y_1, \dots, y_d]$.

Si A est un corps, l'anneau de polynômes $k[y_1, \dots, y_d]$ est lui aussi un corps d'après le lemme 2.8.11, ce qui force d à être nul, et $k[y_1, \dots, y_d]$ à être égale à k ; le corps A est alors une k -algèbre finie, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

(2.10.7) Deuxième variante du Nullstellensatz. Soit A une k -algèbre de type fini et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A . les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $A/\mathfrak{p}$ est une extension finie de k ;
- ii) $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ est une extension finie de k ;
- iii) $\mathfrak{p}$ est maximal.

Démonstration. Il est clair que i) $\Rightarrow$ ii). Supposons que ii) soit vraie. L'algèbre $A/\mathfrak{p}$ est alors, en tant que sous-algèbre de $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$, une algèbre intègre et entière sur k . D'après le lemme 2.8.11, c'est un corps et $\mathfrak{p}$ est maximal.

4. En allemand : théorème du lieu des zéros.

Enfin, si $\mathfrak{p}$ est maximal alors $A/\mathfrak{p}$ est une k -algèbre de type fini qui est un corps, et c'est donc une extension finie de k en vertu de la variante précédente du *Nullstellensatz* (2.10.6). $\square$

(2.10.8) Troisième variante du *Nullstellensatz*. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes appartenant à $k[T_1, \dots, T_n]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) Il existe une extension finie L de k et un n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$ tel que $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout i .
- 2) Il existe une extension L de k et un n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$ tel que $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout i .
- 3) Pour toute famille $(Q_i)_{i \in I}$ de polynômes presque tous nuls appartenant à $k[X_1, \dots, X_n]$, on a $\sum Q_i P_i \neq 1$.

Démonstration. L'implication 1) $\Rightarrow$ 2) est évidente. Supposons que 2) soit vraie, et donnons-nous une famille (Q_i) de polynômes presque tous nuls appartenant à $k[X_1, \dots, X_n]$. On a

$$\left(\sum Q_i P_i\right)(x_1, \dots, x_n) = \sum Q_i(x_1, \dots, x_n) P_i(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

ce qui entraîne que $\sum Q_i P_i \neq 1$.

Supposons enfin que 3) soit vraie. Cela signifie que l'idéal J de $k[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les P_i ne contient pas 1 ; autrement dit, il est strict. L'algèbre quotient $A := k[X_1, \dots, X_n]/J$ est alors non nulle, et elle admet de ce fait un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Comme A est de type fini sur k par construction, le corps quotient $L := A/\mathfrak{m}$ est une extension finie de k en vertu de la deuxième variante du *Nullstellensatz* (2.10.7). Si l'on note x_i l'image de $\bar{X}_i$ par la surjection canonique $A \rightarrow L$, le n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ annule par construction chacun des P_i , d'où 1). $\square$

(2.10.9) Commentaires.

(2.10.9.1) Si le corps k est algébriquement clos, l'assertion 1) ci-dessus peut se reformuler en disant qu'il existe un n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments du corps *lui-même* tels que $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout i .

(2.10.9.2) Supposons que les trois conditions équivalentes 1), 2) et 3) ci-dessus soient satisfaites, et soit F une extension algébriquement close de k . Il existe alors un n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$ tel que $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout i .

En effet, commençons par choisir L et $(x_1, \dots, x_n)$ comme dans 1). Comme L est une extension finie de k , elle admet un k -plongement dans F (lemme 2.9.13). Ce plongement permet de voir L comme un sous-corps de F , et $(x_1, \dots, x_n)$ comme un n -uplet d'éléments de F , d'où l'assertion.

Un calcul de dimension de Krull

(2.10.10) Le but de cette section est de calculer explicitement la dimension de Krull d'une k -algèbre intègre de type fini, en se fondant de manière cruciale sur le lemme de normalisation de Noether. On désigne toujours par k un corps.

(2.10.11) Théorème. *Soit A une k -algèbre intègre de type fini. La dimension de Krull de A est finie, et coïncide avec le degré de transcendance de $\text{Frac } A$ sur k .*

Démonstration. Le lemme de normalisation de Noether assure l'existence d'éléments $y_1, \dots, y_d$ de A , algébriquement indépendants sur k et tels que A soit entière sur $k[y_1, \dots, y_d]$. De plus, l'entier d est nécessairement égal au degré de transcendance de $\text{Frac } A$ sur k (2.10.4.2). On raisonne désormais par récurrence sur d .

(2.10.11.1) Si $d = 0$ alors $k[y_1, \dots, y_d] = k$, et A est donc une algèbre intègre entière sur k . C'est dès lors un corps en vertu du lemme 2.8.11 ; par conséquent, sa dimension de Krull est nulle.

(2.10.11.2) Supposons $d > 0$ et la proposition vraie pour les entiers $< d$. Comme $k[y_1, \dots, y_d]$ s'injecte dans A et comme A est entière sur $k[y_1, \dots, y_d]$, il résulte de la proposition 2.8.16 que la dimension de Krull de A est égale à celle de l'algèbre de polynômes $k[y_1, \dots, y_d]$. Il suffit donc de montrer que la dimension de Krull de $k[y_1, \dots, y_d]$ est égale à d .

Pour tout $i \leq d$, notons $\mathfrak{p}_i$ l'idéal $(y_1, \dots, y_i)$ de $k[y_1, \dots, y_d]$. Il est premier (le quotient $k[y_1, \dots, y_d]/\mathfrak{p}_i$ est l'anneau intègre $k[y_j]_{i < j \leq d}$), et l'on a ainsi construit une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers

$$(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d$$

(que les inclusions soient strictes résulte du fait évident que $y_i \notin \mathfrak{p}_{i-1}$ pour tout $i \geq 1$). Par conséquent, la dimension de Krull de $k[y_1, \dots, y_d]$ est au moins égale à d .

Nous allons montrer maintenant qu'elle vaut au plus d . Soit

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_m$$

une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de $k[y_1, \dots, y_d]$; nous allons prouver que $m \leq d$, ce qui permettra de conclure.

Quitte à rajouter (0) en début de chaîne, on peut toujours supposer que l'on a $\mathfrak{q}_0 = (0)$. Si $m = 0$ alors $m \leq d$; on suppose maintenant que $m > 0$. L'idéal $\mathfrak{q}_1$ est alors non nul, il possède donc un élément $f \in k[y_1, \dots, y_d]$ qui est non constant (puisque $\mathfrak{q}_1$ est strict). Comme $\mathfrak{q}_1$ est premier, il existe un diviseur irréductible g de f qui appartient à $\mathfrak{q}_1$. La chaîne

$$\mathfrak{q}_1/(g) \subsetneq \mathfrak{q}_2/(g) \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_m/(g)$$

est une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de $k[y_1, \dots, y_d]/(g)$. Il suffit maintenant pour obtenir la majoration souhaitée de prouver que la dimension de Krull de $k[y_1, \dots, y_d]/(g)$ est majorée par $d - 1$.

L'anneau $B := k[y_1, \dots, y_d]/(g)$ est intègre (puisque g est irréductible, et puisque $k[y_1, \dots, y_d]$ est factoriel). Il est engendré par les $\overline{y_i}$ comme k -algèbre. Le corps $\text{Frac } B$ est donc engendré par les $\overline{y_i}$ comme extension de k ; en particulier, la famille $(\overline{y_i})$ contient une base de transcendance de $\text{Frac } B$ sur k .

Par ailleurs, les $\overline{y_i}$ ne sont pas algébriquement indépendants sur k , puisque $g(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_d}) = 0$ par construction. En conséquence, $(\overline{y_i})$ n'est pas elle-même une base de transcendance de $\text{Frac } B$ sur k . Le degré de transcendance δ de $\text{Frac } B$ sur k est donc strictement inférieur à d . En vertu de l'hypothèse de récurrence, la dimension de Krull de B est égale à $\delta \leq d - 1$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(2.10.12) Commentaires.

(2.10.12.1) Le théorème ci-dessus assure en particulier que la dimension de Krull de la k -algèbre $k[X_1, \dots, X_d]$ (qui n'est autre du point de vue de la géométrie algébrique que «l'anneau des fonctions sur l'espace affine de dimension d ») est égale à d ; on a d'ailleurs démontré explicitement cette égalité au cours de la preuve.

(2.10.12.2) Exercice. En reprenant les notations du 2.10.11.2 ci-dessus, montrez que le degré de transcendance de $\text{Frac } B$ est *exactement* égal à $d - 1$.

(2.10.13) Corollaire. Soit A une k -algèbre non nulle de type fini.

- (1) La dimension de Krull δ de A est finie.
- (2) Si $(y_1, \dots, y_d)$ est une famille d'éléments de A algébriquement indépendants sur k telle que A soit entière sur $k[y_1, \dots, y_d]$ alors $d = \delta$.

Démonstration. Le lemme de normalisation de Noether assure l'existence d'une famille finie $(y_1, \dots, y_d)$ d'éléments de A algébriquement indépendants sur k telle que A soit entière sur $k[y_1, \dots, y_d]$. Il résulte alors de la proposition 2.8.16 que la dimension de Krull de A est égale à celle de $k[y_1, \dots, y_d]$, laquelle est égale à d en vertu du théorème 2.10.11. $\square$

Chapitre 3

Théorie des faisceaux

3.1 Préfaisceaux et faisceaux

(3.1.1) Nous allons définir dans ce qui suit les notions de *préfaisceau*, puis plus tard de *faisceau*, sur un espace topologique. Il en existe plusieurs variantes : on peut manipuler des faisceaux ou préfaisceaux d'ensembles, mais aussi de groupes, d'anneaux... Aussi, afin d'éviter des répétitions fastidieuses ou une profusion pénible d'abréviations «resp.», nous fixons une catégorie $\mathbf{C}$, qui peut être $\mathbf{Ens}$, $\mathbf{Gp}$, $\mathbf{Ann}$, $A\text{-Mod}$ ou $A\text{-Alg}$ pour un certain anneau A .

Nous utiliserons relativement souvent des constructions faisant appel à la notion de colimite *filtrante* (cf. 1.6.11) dans la catégorie $\mathbf{C}$. Nous attirons votre attention sur le fait qu'une telle limite est «indépendante» de la catégorie $\mathbf{C}$, dans le sens précis suivant : son ensemble sous-jacent coïncide avec la colimite ensembliste du diagramme considéré.

Préfaisceaux

(3.1.2) Soit X un espace topologique. Soulignons qu'on ne fait *aucune* hypothèse sur X : on ne suppose pas qu'il est séparé, ni même que tous ses points sont fermés... Cette généralité ne complique ni les définitions, ni les preuves, et elle est indispensable en géométrie algébrique : en effet, le plus souvent, un schéma possède des points non fermés, et n'est *a fortiori* pas topologiquement séparé.

(3.1.3) **Définition.** Un *préfaisceau* $\mathcal{F}$ sur X à valeurs dans $\mathbf{C}$ consiste en les données suivantes.

- Pour tout ouvert U de X , un objet $\mathcal{F}(U)$ de $\mathbf{C}$ dont les éléments sont parfois appelés les *sections* de $\mathcal{F}$ sur U ;
- Pour tout couple (U, V) d'ouverts de X avec $V \subset U$, un morphisme

$$r_{U \rightarrow V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

dit de *restriction*, et parfois notée $s \mapsto s|_V$.

Ces données sont sujettes aux deux axiomes suivants :

$\diamond r_{U \rightarrow U} = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$ pour tout ouvert U de X ;
 $\diamond r_{V \rightarrow W} \circ r_{U \rightarrow V} = r_{U \rightarrow W}$ pour tout triplet (U, V, W) d'ouverts de X avec $W \subset V \subset U$.

(3.1.3.1) Convention terminologique. Lorsqu'il sera nécessaire de préciser la catégorie dans laquelle nos préfaisceaux prennent leurs valeurs, nous parlerons de préfaisceaux de groupes, d'ensembles, etc. Lorsque nous dirons «préfaisceaux» sans référence à une catégorie particulière, cela signifiera «préfaisceaux à valeurs dans $\mathbf{C}$ ».

(3.1.3.2) On peut définir un préfaisceau de façon plus concise, qui vous paraîtra peut-être un peu pédante (mais a l'avantage de se généraliser à bien d'autres cadres que celui de la topologie). Soit Ouv_X la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et les flèches les *inclusions*; un préfaisceau sur X est alors simplement un foncteur contravariant de Ouv_X vers $\mathbf{C}$, c'est-à-dire encore un foncteur covariant de Ouv_X^{op} vers $\mathbf{C}$.

(3.1.4) Exemples. Nous allons donner quelques exemples de préfaisceaux, que nous allons décrire en nous contentant de donner leurs valeurs sur les ouverts : la définition des flèches de restriction est à chaque fois évidente.

(3.1.4.1) Si X est un espace topologique, $U \mapsto \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ est un préfaisceau de $\mathbb{R}$ -algèbres sur X .

(3.1.4.2) Si X est une variété différentielle, $U \mapsto \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ est un préfaisceau de $\mathbb{R}$ -algèbres sur X .

(3.1.4.3) Si X est une variété analytique complexe, $U \mapsto \mathcal{H}(U, \mathbb{C})$ est un préfaisceau de $\mathbb{C}$ -algèbres sur X , où $\mathcal{H}(U, \mathbb{C})$ désigne l'anneau des fonctions holomorphes sur U .

(3.1.4.4) Si X est un espace topologique et E un ensemble, $U \mapsto E$ est un préfaisceau d'ensembles sur X , appelé le *préfaisceau constant associé à E* . Si E est un groupe (resp. ...), le préfaisceau constant associé hérite d'une structure naturelle de préfaisceau de groupes (resp. ...).

(3.1.4.5) Terminons par un exemple un peu plus artificiel que les précédents : si X est un espace topologique, les formules

$$U \mapsto \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } U = X \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

définissent un préfaisceau de groupes abéliens sur X .

(3.1.5) Soit X un espace topologique, soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X , soit x un point de X et soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages ouverts de x , qui est filtrant pour l'ordre *opposé* à l'inclusion. Soit $\mathcal{D}$ le diagramme commutatif filtrant

$$\mathcal{D} = ((\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{V}}, (r_{U \rightarrow V})_{V \subset U})$$

dans la catégorie $\mathbf{C}$. La colimite de $\mathcal{D}$ est notée $\mathcal{F}_x$ et est appelée la *fibres* de $\mathcal{F}$ en x .

Concrètement, on peut identifier $\mathcal{F}_x$ au quotient de l'ensemble des couples (U, s) , où $U \in \mathcal{V}$ et où s est une section de $\mathcal{F}$ sur U , par la relation

d'équivalence $\sim$ définie comme suit : $(U, s) \sim (V, t)$ si et seulement si il existe un voisinage ouvert W de x dans $U \cap V$ tel que $s|_W = t|_W$.

De manière un peu plus informelle, $\mathcal{F}_x$ est l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ définies au voisinage de x , deux sections appartenant à $\mathcal{F}_x$ étant considérées comme égales si elles coïncident au voisinage de x .

(3.1.5.1) Soit U un voisinage ouvert de x et soit $s \in \mathcal{F}(U)$. L'image de s dans $\mathcal{F}_x$ est appelée le *germe de s en x* et est notée s_x .

(3.1.5.2) *Exemples de fibres.* Si $\mathcal{F}$ est le préfaisceau constant associé à un ensemble E alors $\mathcal{F}_x \simeq E$.

Supposons que $X = \mathbb{C}$, que x est l'origine et que $\mathcal{F}$ est le préfaisceau des fonctions holomorphes. La fibre $\mathcal{F}_x$ s'identifie alors à la $\mathbb{C}$ -algèbre $\mathbb{C}\{z\}$ des séries formelles en z de rayon > 0 .

(3.1.6) Soit X un espace topologique. Les préfaisceaux sur X forment une catégorie Pref_X , les flèches se décrivant comme suit. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tels préfaisceaux, un morphisme de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$ consiste en la donnée, pour tout ouvert U de X , d'un morphisme $\varphi(U)$ de $\mathcal{F}(U)$ vers $\mathcal{G}(U)$, de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ r_{U \rightarrow V} \downarrow & & \downarrow r_{U \rightarrow V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

commute pour tout couple (U, V) d'ouverts de X tels que $V \subset U$.

On dit que φ est *injectif* (resp. *surjectif*) si $\varphi(U)$ est injectif (resp. surjectif) pour tout U .

(3.1.6.1) Si l'on considère les préfaisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ comme des foncteurs de Ouv_X^{op} vers $\mathbb{C}$, un morphisme de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$ n'est autre qu'un morphisme de foncteurs de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$.

Il s'ensuit qu'un morphisme φ est un isomorphisme si et seulement si $\varphi(U)$ est bijectif pour tout U .

(3.1.6.2) Si $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux, si U est un ouvert de X et si s est une section de $\mathcal{F}$ sur U , on écrira souvent $\varphi(s)$ au lieu de $\varphi(U)(s)$.

(3.1.6.3) Si $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de préfaisceaux sur X , il induit pour tout x un morphisme $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$.

(3.1.6.4) Soit $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux sur X . On définit le préfaisceau $\text{Im } \varphi$ par la formule

$$U \mapsto \text{Im } \varphi(U)$$

pour tout ouvert U de X . On dit que $\text{Im } \varphi$ est l'*image* de φ ; c'est un sous-préfaisceau de $\mathcal{G}$, en un sens évident; il est égal à $\mathcal{G}$ si et seulement si φ est surjectif.

(3.1.6.5) On suppose que $\mathbb{C} = \text{Gp}$ ou $A\text{-Mod}$. Soit $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux de groupes sur X . On définit le préfaisceau $\text{Ker } \varphi$ par la formule

$$U \mapsto \text{Ker } \varphi(U)$$

pour tout ouvert U de X . On dit que $\text{Ker } \varphi$ est le *noyau* de φ ; c'est un sous-préfaisceau de $\mathcal{F}$, et φ est injectif si et seulement si son noyau est le préfaisceau trivial.

(3.1.6.6) Soit $\mathcal{D}$ un diagramme dans Pref_X ; pour tout ouvert U de X , on note $\mathcal{D}(U)$ le diagramme dans $\mathbf{C}$ déduit de $\mathcal{D}$ par évaluation en U de ses constituants. Il est immédiat que

$$U \mapsto \lim \mathcal{D}(U) \quad \text{et} \quad U \mapsto \text{colim } \mathcal{D}(U)$$

définissent deux préfaisceaux sur X , et que ceux-ci sont respectivement les limite et colimite de $\mathcal{D}$.

(3.1.7) Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue entre espaces topologiques.

(3.1.7.1) Soit $\mathcal{G}$ un préfaisceau sur Y . La formule

$$U \mapsto \mathcal{G}(f^{-1}(U))$$

définit un préfaisceau sur X , que l'on note $f_*\mathcal{G}$.

(3.1.7.2) Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X . Si V est un ouvert de Y , on note $\mathfrak{E}^V$ l'ensemble des voisinages ouverts de $f(V)$, et $\mathcal{D}^V$ le diagramme commutatif filtrant

$$((\mathcal{F}(U))_{U \in \mathfrak{E}^V}, (r_{U \rightarrow U'})_{U' \subset U}).$$

On note alors $f^{-1}\mathcal{F}$ le préfaisceau $V \mapsto \text{colim } \mathcal{D}^V$.

Si V est un ouvert de Y et si $U \in \mathfrak{E}^V$ on dispose d'une application naturelle de $\mathcal{F}(U)$ dans $f^{-1}\mathcal{F}(V)$ qu'on note souvent f^{-1} (sans mentionner explicitement U et V s'il n'y a pas d'ambiguïté à leur propos).

(3.1.7.3) On vérifie aussitôt que f_* est de façon naturelle un foncteur covariant de Pref_Y vers Pref_X , et que f^{-1} est de façon naturelle un foncteur covariant de Pref_X vers Pref_Y . On notera que ces foncteurs sont «indépendants de $\mathbf{C}$ » : pour f_* , c'est évident par sa définition même, et pour f^{-1} , cf. 3.1.1.

(3.1.7.4) Si Z est un espace topologique et $g : Z \rightarrow Y$ une application continue, il existe des isomorphismes canoniques de foncteurs (construisez-les à titre d'exercice!)

$$(f \circ g)_* \simeq f_* \circ g_* \quad \text{et} \quad (f \circ g)^{-1} \simeq g^{-1} \circ f^{-1}.$$

(3.1.8) Deux cas particuliers intéressants.

(3.1.8.1) Soit X un espace topologique, soit U un ouvert de X et soit j l'inclusion $U \hookrightarrow X$. Il résulte immédiatement de la définition que pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X , le préfaisceau $j^{-1}\mathcal{F}$ n'est autre que la *restriction* $\mathcal{F}|_U$ de $\mathcal{F}$ à U , c'est-à-dire le préfaisceau $V \mapsto \mathcal{F}(V)$ où V se contente de parcourir l'ensemble des ouverts de U .

(3.1.8.2) Soit X un espace topologique, soit $x \in X$ et soit i la flèche canonique $\{x\} \hookrightarrow X$. Il résulte immédiatement des définitions que l'on a pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X l'égalité $i^{-1}\mathcal{F}(\{x\}) = \mathcal{F}_x$.

(3.1.9) Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue entre espaces topologiques. La définition du foncteur f^{-1} est sensiblement plus compliquée que celle de f_* , mais

f^{-1} se comporte plus simplement que f_* en ce qui concerne les fibres. En effet, si $y \in Y$ et si x désigne son image sur X , on dispose pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X d'un isomorphisme naturel $f^{-1}\mathcal{F}_y \simeq \mathcal{F}_x$; le lecteur le déduira à peu près formellement de 3.1.7.4 et 3.1.8.2.

Par contre, si $\mathcal{G}$ est un préfaisceau sur Y , la fibre $f_*\mathcal{G}_x$ n'admet pas à notre connaissance de description maniable.

(3.1.10) Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue entre espaces topologiques. Nous allons démontrer que (f^{-1}, f_*) est un couple de foncteurs adjoints. À cette fin, nous allons construire pour tout couple $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ formé d'un préfaisceau sur X et d'un préfaisceau sur Y un ensemble «intermédiaire» $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et exhiber deux isomorphismes

$$H(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \text{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G}) \text{ et } H(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$$

fonctoriels en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Soient donc $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X et $\mathcal{G}$ un préfaisceau sur Y . On note $\mathfrak{E}$ l'ensemble des couples (U, V) où U est un ouvert de X et où V est un ouvert de Y tel que $f(V) \subset U$. On munit $\mathfrak{E}$ de la relation d'ordre partiel pour laquelle on a $(U', V') \leq (U, V)$ si $U' \subset U$ et $V' \subset V$.

Si V est un ouvert de Y on note $\mathfrak{E}^V$ l'ensemble des ouverts U de X tels que $(U, V) \in \mathfrak{E}$ (cette notation est compatible avec celle introduite au 3.1.7.2).

(3.1.10.1) *Définition de $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.* On définit $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ comme l'ensemble des familles $(h_{(U,V)})_{(U,V) \in \mathfrak{E}}$ telles que :

- $h_{U,V}$ est pour tout $(U, V) \in \mathfrak{E}$ un élément de $\text{Hom}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(V))$;
- pour tout $(U, V) \in \mathfrak{E}$ et pour tout $(U', V') \in \mathfrak{E}$ tel que $(U', V') \leq (U, V)$

le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_{U,V}} & \mathcal{G}(V) \\ r_{U \rightarrow U'} \downarrow & & \downarrow r_{V \rightarrow V'} \\ \mathcal{F}(U') & \xrightarrow{h_{U',V'}} & \mathcal{G}(V') \end{array}$$

commute.

(3.1.10.2) *Construction d'un isomorphisme $H(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G})$.*

Soit $(h_{U,V})$ un élément de $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Les faits suivants découlent de la définition de $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$:

- pour tout ouvert V de Y , la famille $(h_{U,V})_{U \in \mathfrak{E}^V}$ est un morphisme du diagramme $\mathcal{D}^V$ défini en 3.1.7.2 vers $\mathcal{G}(V)$ et induit donc un morphisme $\varphi(V)$ de $f^{-1}\mathcal{F}(V)$ dans $\mathcal{G}(V)$;
- lorsque V parcourt l'ensemble des ouverts de Y , la famille des $\varphi(V)$ se comporte bien vis-à-vis des restrictions, et définit dès lors un morphisme φ de $f^{-1}\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$.

En envoyant $(h_{U,V})$ sur φ , on définit une application a de $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ vers $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G})$ qui est manifestement fonctorielle en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Réciproquement soit φ un morphisme de $f^{-1}\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$, et soit $(U, V) \in \mathfrak{E}$. On dispose par définition de $f^{-1}\mathcal{F}$ d'une flèche naturelle $\mathcal{F}(U) \rightarrow f^{-1}\mathcal{F}(V)$;

sa composée avec $\varphi(V)$ est un morphisme $h_{U,V}$ de $\mathcal{F}(U)$ vers $\mathcal{G}(V)$. On vérifie sans difficulté que $(h_{U,V}) \in H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. En envoyant φ sur $(h_{U,V})$ on définit une application b de $\text{Hom}(f^{-1}(\mathcal{F}), \mathcal{G})$ vers $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, fonctorielle en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Nous laissons le lecteur s'assurer que a et b sont inverses l'une de l'autre.

(3.1.10.3) *Construction d'un isomorphisme $H(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$.*

Soit $(h_{U,V})$ un élément de $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Pour tout ouvert U de X , on pose $\psi(U) = h_{U, f^{-1}(U)}$. C'est par définition un morphisme de $\mathcal{F}(U)$ dans $\mathcal{G}(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{G}(U)$. Lorsque U parcourt l'ensemble des ouverts de X , la famille des $\psi(U)$ se comporte bien vis-à-vis des restrictions, et définit dès lors un morphisme ψ de $\mathcal{F}$ vers $f_*\mathcal{G}$.

En envoyant $(h_{U,V})$ sur ψ , on définit une application α de $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ vers $\text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$ qui est manifestement fonctorielle en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Réciproquement soit ψ un morphisme de $\mathcal{F}$ vers $f_*\mathcal{G}$, et soit $(U, V) \in \mathfrak{E}$. Par définition, $\psi(U)$ est une flèche de $\mathcal{F}(U)$ vers $f_*\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(f^{-1}(U))$; sa composition avec la restriction $\mathcal{G}(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ est un morphisme $h_{U,V}$ de $\mathcal{F}(U)$ vers $\mathcal{G}(V)$. On vérifie sans difficulté que $(h_{U,V}) \in H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. En envoyant ψ sur $(h_{U,V})$ on définit une application β de $\text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$ vers $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, fonctorielle en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Nous laissons le lecteur s'assurer que α et β sont inverses l'une de l'autre.

Faisceaux

(3.1.11) Définition. Soit X un espace topologique. On dit qu'un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X (à valeurs, comme d'habitude, dans la catégorie $\mathbf{C}$ de 3.1.1), est un *faisceau* s'il satisfait la condition suivante : *pour tout ouvert U de X , pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U et toute famille $(s_i) \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ telle que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tout (i, j) , il existe une et une seule section s de $\mathcal{F}$ sur U telle que $s|_{U_i} = s_i$ pour tout i .*

(3.1.11.1) Si s et les s_i sont comme ci-dessus, on dit que s est obtenue par *recollement* des s_i .

(3.1.11.2) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X . L'ouvert vide de X est alors recouvert par la *famille vide* d'ouverts; en appliquant à celle-ci et à la *famille vide* de sections la définition d'un faisceau, on voit qu'il existe une et une seule section de $\mathcal{F}$ sur $\emptyset$. Ainsi $\mathcal{F}(\emptyset)$ est un singleton. Lorsque $\mathbf{C} = \mathbf{Gp}$ (resp. $A\text{-Mod}$, $\mathbf{Ann}$ ou $A\text{-Alg}$) cela signifie que $\mathcal{F}(\emptyset)$ est le groupe trivial (resp. le module, l'anneau ou l'algèbre nuls).

Le lecteur que rebuterait (bien à tort) ce style de gymnastique mentale peut prendre l'égalité $\mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}$ comme un axiome supplémentaire à rajouter à la définition d'un faisceau.

(3.1.12) On voit les faisceaux sur X comme une sous-catégorie *pleine* $\mathbf{Faisc}_X$ de celle des préfaisceaux sur X : si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux faisceaux sur X , un morphisme de faisceaux de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$ est simplement un morphisme de préfaisceaux de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{G}$.

(3.1.13) Soit X un espace topologique. Il résulte immédiatement de la définition qu'une section s d'un faisceau sur X est entièrement déterminée

par la famille $(s_x)_{x \in X}$ de ses germes. On en déduit qu'un morphisme d'un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X vers un faisceau $\mathcal{G}$ sur X est entièrement déterminé par la famille $(\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x)_{x \in X}$ de morphismes induits au niveau des fibres.

(3.1.14) Exemples.

(3.1.14.1) Si X est un espace topologique, $U \mapsto \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ est un faisceau de $\mathbb{R}$ -algèbres sur X .

(3.1.14.2) Si X est une variété différentielle, $U \mapsto \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ est un faisceau de $\mathbb{R}$ -algèbres sur X .

(3.1.14.3) Si X est une variété analytique complexe, $U \mapsto \mathcal{H}(U, \mathbb{C})$ est un faisceau de $\mathbb{C}$ -algèbres sur X , où $\mathcal{H}(U, \mathbb{C})$ désigne l'anneau des fonctions holomorphes sur U .

(3.1.14.4) Si X est un espace topologique et $\{*\}$ un singleton, le préfaisceau constant $U \mapsto \{*\}$ est un faisceau d'ensembles (et aussi d'ailleurs de groupes, anneaux, A -modules ou A -algèbres si l'on y tient).

(3.1.14.5) Si $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceau de groupes sur un espace topologique X , le préfaisceau noyau $\text{Ker } \varphi$ (défini au 3.1.6.4) est un faisceau.

(3.1.14.6) Soit X un espace topologique. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X , et tout ouvert U de X , la restriction de $\mathcal{F}$ à U est un faisceau sur U .

(3.1.15) Contre-exemples.

(3.1.15.1) Soit X un espace topologique. Si X admet un recouvrement (U_i) par des ouverts *stricts*¹, le préfaisceau de groupes

$$U \mapsto \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } U = X \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas un faisceau : les sections globales 1 et 0 sont distinctes, mais ont toutes deux mêmes restrictions à chacun des U_i .

(3.1.15.2) Soit X un espace topologique et soit E un ensemble *non singleton*. Le préfaisceau d'ensembles constant associé à E envoie en particulier $\emptyset$ sur E et n'est donc pas un faisceau en vertu de 3.1.11.2.

(3.1.16) **Autour des images préfaisceautiques.** Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X . On vérifie immédiatement qu'un sous-préfaisceau $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est un faisceau si et seulement si «l'appartenance à $\mathcal{F}'$ est une propriété locale», *i.e.* si pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert (U_i) de U , une section s de $\mathcal{F}$ sur U appartient à $\mathcal{F}'(U)$ dès que $s|_{U_i}$ appartient à $\mathcal{F}'(U_i)$ pour tout i .

(3.1.16.1) Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux, et soit s une section de $\mathcal{G}$ sur un ouvert U de X ; soit (U_i) un recouvrement ouvert de U tel que $s|_{U_i}$ appartiennent à $\text{Im } \varphi$ pour tout i . Choisissons pour tout i un antécédent t_i de $s|_{U_i}$ dans $\mathcal{F}(U_i)$.

1. Il existe des espaces topologiques naturels du point de vue de la géométrie algébrique qui sont non vides et pour lesquels cette condition n'est pas vérifiée : par exemple l'espace $\{a, b\}$ dont les ouverts sont $\emptyset$, $\{a\}$ et $\{a, b\}$. Notons toutefois que si X est de cardinal au moins 2 et si tous ses points sont fermés, X est bien recouvert par des ouverts stricts.

Supposons que φ est injective (il n'y a alors qu'un choix possible pour les t_i). Dans ce cas, $t_i|_{U_i \cap U_j}$ et $t_j|_{U_i \cap U_j}$ coïncident pour tout (i, j) , puisque ce sont deux antécédents de $s|_{U_i \cap U_j}$ par une flèche injective. Il s'ensuit que les t_i se recollent en une section t de $\mathcal{F}$ sur U , qui satisfait par construction l'égalité $\varphi(t) = s$. Ainsi, $\text{Im } \varphi$ est un sous-faisceau de $\mathcal{G}$.

On ne suppose plus φ injective. Dans ce cas, rien ne garantit *a priori* que le système (t_i) d'antécédents puisse être choisi de sorte que les t_i se recollent, et le contre-exemple ci-dessous montre que $\text{Im } \varphi$ n'est pas un faisceau en général.

(3.1.16.2) Soit $\mathcal{H}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, et soit d la dérivation $f \mapsto f'$, qui est un endomorphisme du faisceau de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels $\mathcal{H}$. La fonction $z \mapsto 1/z$ appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\times)$. Comme n'importe quelle fonction holomorphe, elle admet localement des primitives et appartient donc localement à $\text{Im } d$. Par contre, elle n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^\times$ (il n'existe pas de logarithme complexe continu sur $\mathbb{C}^\times$) ; elle n'appartient donc pas à $\text{Im } d(\mathbb{C}^\times)$. En conséquence, $\text{Im } d$ n'est pas un faisceau.

(3.1.17) On observe là un cas particulier d'un phénomène général : lorsqu'on applique aux faisceaux des constructions «naïves» (c'est-à-dire définies ouvert par ouvert), on obtient des préfaisceaux qui n'ont en général aucune raison d'être des faisceaux. Qu'à cela ne tienne : on y remédie grâce au procédé de *faisceautisation*, que nous allons maintenant décrire. Il consiste *grosso modo* à modifier un préfaisceau donné pour en faire un faisceau, sans l'altérer davantage que ne le requiert cet objectif ; cela va se traduire rigoureusement en terme de foncteur à représenter.

La faisceautisation

(3.1.18) Proposition-définition. Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X . Le foncteur covariant de $\mathbf{Faisc}_X$ vers $\mathbf{Ens}$ qui envoie un faisceau $\mathcal{G}$ sur $\text{Hom}_{\mathbf{Pref}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est représentable par un couple $(\widehat{\mathcal{F}}, \pi : \mathcal{F} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}})$. Le faisceau $\widehat{\mathcal{F}}$ est appelé le faisceautisé de $\mathcal{F}$, ou encore le faisceau associé à $\mathcal{F}$.

(3.1.19) Formulation équivalente. Il revient au même de dire qu'il existe un faisceau $\widehat{\mathcal{F}}$ sur X et un morphisme de préfaisceaux $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}$ tel que pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur X et tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, il existe un unique morphisme $\psi : \widehat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \pi \downarrow & \nearrow \psi & \\ \widehat{\mathcal{F}} & & \end{array} .$$

(3.1.20) Démonstration de la proposition 3.1.18. L'idée qui préside à la construction de $\widehat{\mathcal{F}}$ est simple : puisqu'une section d'un faisceau est caractérisée par ses germes, on va définir une section de $\widehat{\mathcal{F}}$ comme une collection «raisonnable» de germes de sections de $\mathcal{F}$. Plus précisément, soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble $\coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Pour tout ouvert U de X , on note $\widehat{\mathcal{F}}(U)$ l'ensemble des applications $f : U \rightarrow \mathfrak{G}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- a) $f(x) \in \mathcal{F}_x$ pour tout $x \in U$;
- b) pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert V de x dans U et une section s de $\mathcal{F}$ sur V telle que $f(y) = s_y$ pour tout $y \in U$.

Il est immédiat que $\widehat{\mathcal{F}}$ est un faisceau (de fonctions à valeurs dans $\mathfrak{G}$). On note π le morphisme de préfaisceaux de $\mathcal{F}$ vers $\widehat{\mathcal{F}}$ qui pour tout ouvert U de X associe à un élément s de $\mathcal{F}(U)$ l'élément $(x \mapsto s_x)$ de $\widehat{\mathcal{F}}(U)$.

Si U est un ouvert de X , si $x \in U$ et si $f \in \widehat{\mathcal{F}}(U)$, il existe un voisinage ouvert V de x dans U et une section $t \in \mathcal{F}(U)$ telle que $f|_V = \pi(t)$: c'est une reformulation de b).

(3.1.20.1) Nous allons maintenant établir un résultat qui nous sera utile pour établir la propriété universelle de $(\widehat{\mathcal{F}}, \pi)$ et qui présente par ailleurs un intérêt intrinsèque : *pour tout $x \in X$, la flèche $\pi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_x$ est bijective*. Soit donc $x \in X$.

Surjectivité de $\mathcal{F}_x \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_x$. Soit $\sigma \in \widehat{\mathcal{F}}_x$; par définition, σ est le germe en x d'une section τ de $\widehat{\mathcal{F}}$ définie sur un voisinage ouvert U de x , et l'on peut restreindre U de sorte qu'il existe $t \in \mathcal{F}(U)$ vérifiant l'égalité $\pi(t) = \tau$. On a alors $\pi_x(t_x) = \tau_x = \sigma$; ainsi, π_x est surjective.

Injectivité de π_x . Soient s et s' deux éléments de $\mathcal{F}_x$ dont les images dans $\widehat{\mathcal{F}}_x$ coïncident. Il existe un voisinage ouvert U de x et deux sections t et t' de $\mathcal{F}$ sur U telles que $t_x = s$ et $t'_x = s'$; comme $\pi(t)_x = \pi(t')_x$ par hypothèse, on peut restreindre U de sorte que $\pi(t) = \pi(t')$. Par définition de π , cela signifie que $t_y = t'_y$ pour tout $y \in U$. En appliquant ceci avec $y = x$, il vient $s = s'$, et la flèche $\mathcal{F}_x \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_x$ est injective.

Calcul des germes d'une section de $\widehat{\mathcal{F}}$. Soit U un ouvert de X , soit $f \in \widehat{\mathcal{F}}(U)$ et soit $x \in U$. Il existe un voisinage ouvert V de x dans U et une section t de $\mathcal{F}$ sur V telle que $f|_V = \pi(t)$. On a alors $f_x = \pi_x(t_x)$; et par ailleurs la définition même de π assure que $t_x = f(x)$.

En conséquence, $f_x = \pi_x(f(x))$; on peut reformuler cette égalité en disant que $f_x = f(x)$ modulo la bijection naturelle $\pi_x : \mathcal{F}_x \simeq \widehat{\mathcal{F}}_x$.

(3.1.20.2) Prouvons maintenant que $(\widehat{\mathcal{F}}, \pi)$ satisfait la propriété universelle requise. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau sur X , et soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux. Il s'agit de montrer l'existence et l'unicité de $\psi : \widehat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \pi \downarrow & \nearrow \psi & \\ \widehat{\mathcal{F}} & & \end{array}$$

commute.

Unicité de ψ . Si ψ est un morphisme faisant commuter le diagramme, on a pour tout $x \in X$ l'égalité $\psi_x \circ \pi_x = \varphi_x$, et donc $\psi_x = \varphi_x \circ \pi_x^{-1}$ (rappelons que π_x est bijective, cf. 3.1.20.1 *supra*). L'unicité de ψ découle alors du fait qu'un morphisme d'un préfaisceau vers un faisceau est entièrement déterminé par son effet sur les fibres.

Existence de ψ . Soit U un ouvert de X et soit $f \in \widehat{\mathcal{F}}(U)$. Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe une section t de $\mathcal{G}$ sur U , nécessairement unique, telle que $t_x = \varphi_x(f(x))$ pour tout $x \in U$.

Il existe un recouvrement ouvert (U_i) de U et pour tout i une section s_i de $\mathcal{F}$ sur U_i telle que $f(x) = s_{i,x}$ pour tout $x \in U_i$. Posons $t_i = \varphi(s_i)$. On a alors par construction pour tout $x \in U_i$ l'égalité $t_{i,x} = \varphi_x(s_{i,x}) = \varphi_x(f(x))$. Cette dernière écriture ne dépend plus de i . Il s'ensuit que si $x \in U_i \cap U_j$ alors $t_{i,x} = t_{j,x}$. Comme $\mathcal{G}$ est un faisceau, ceci entraîne que $t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tout (i, j) , puis que les t_i se recollent en une section t de $\mathcal{G}$; on a bien par construction $t_x = \varphi_x(f(x))$ pour tout $x \in U$.

On pose alors $\psi(f) = t$. Si V est un ouvert de U , on a $t_x = \varphi_x(f(x))$ pour tout $x \in V$, et $t|_V$ est donc l'unique section de $\mathcal{G}$ sur V dont le germe en tout point x de V est égal à $\varphi_x(f(x))$; il vient $\psi(f|_V) = t|_V$, ce qui signifie que ψ est un morphisme de préfaisceaux.

On a pour tout ouvert U de X , tout point x de U et toute section $f \in \widehat{\mathcal{F}}(U)$ les égalités

$$\underbrace{\psi_x(f_x) = \varphi_x(f(x))}_{\text{par construction de } \psi} = \varphi_x(\pi_x^{-1}(f_x)).$$

On a donc $\psi_x = \varphi_x \circ \pi_x^{-1}$ pour tout $x \in X$, soit encore $\psi_x \circ \pi_x = \varphi_x$. Comme un morphisme d'un préfaisceau vers un faisceau est entièrement déterminé par son effet sur les fibres, on a $\psi \circ \pi = \varphi$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(3.1.21) Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X , et soit $\mathcal{G}$ un faisceau sur X . On a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pref}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Faisc}_X}(\widehat{\mathcal{F}}, \mathcal{G}),$$

fonctorielle en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. En conséquence, $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de Pref_X dans Faisc_X .

(3.1.22) Exemples.

(3.1.22.1) Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur un espace topologique X alors $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$; on le déduit ou bien de la construction de $\widehat{\mathcal{F}}$, ou bien du fait que $(\mathcal{F}, \mathrm{Id}_{\mathcal{F}})$ satisfait visiblement la propriété universelle requise.

(3.1.22.2) Soit E un ensemble et soit X un espace topologique. Pour tout x appartenant à X , la fibre en x du préfaisceau d'ensembles constant $U \mapsto E$ est égale à E . Son faisceautisé s'identifie donc, d'après notre construction, au faisceau des applications localement constantes sur X à valeurs dans E . On l'appelle le *faisceau constant associé à E* , et on le note $\underline{E}$.

Notez que si X est localement connexe, le faisceau $\underline{E}$ envoie un ouvert U de X sur $E^{\pi_0(U)}$, où $\pi_0(U)$ est l'ensemble des composantes connexes de U . Mais en général la description de $\underline{E}$ est un peu plus compliquée : se donner une section de $\underline{E}$ sur un ouvert U revient à se donner une partition de U en ouverts fermés, et à assigner à chacun d'eux un élément de E .

(3.1.22.3) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau, et soit $\mathcal{G}$ un sous-préfaisceau de $\mathcal{F}$. L'inclusion $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}$ induit un morphisme $\widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{F}$.

La flèche $\widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{F}$ est injective. En effet, soit U un ouvert de X et soient s et t deux sections de $\widehat{\mathcal{G}}$ sur U dont les images dans $\mathcal{F}(U)$ coïncident. Soit $x \in U$.

D'après la construction de $\widehat{\mathcal{G}}$, il existe un voisinage ouvert V de x dans U et deux sections s' et t' de $\mathcal{G}$ sur V dont les images dans $\mathcal{G}(V)$ sont respectivement égales à $s|_V$ et $t|_V$. Comme $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ se factorise par $\widehat{\mathcal{G}}$, les images de s' et t' dans $\mathcal{F}(V)$ sont égales, ce qui entraîne que $s' = t'$ puisque $\mathcal{G}$ est un sous-préfaisceau de $\mathcal{F}$; en conséquence, $s|_V = t|_V$. Les sections s et t du faisceau $\widehat{\mathcal{G}}$ coïncident donc au voisinage de tout point de U , et sont dès lors égales, d'où notre assertion.

Puisque $\widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{F}$ est une injection par laquelle $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}$ se factorise, on peut voir $\widehat{\mathcal{G}}$ comme un sous-faisceau de $\mathcal{F}$ contenant $\mathcal{G}$, et la flèche canonique $\mathcal{G} \rightarrow \widehat{\mathcal{G}}$ comme l'inclusion; c'est ce que nous faisons désormais.

Soit U un ouvert de X . Nous allons montrer que $\widehat{\mathcal{G}(U)}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{F}(U)$ formé des sections s qui *appartiennent localement* à $\mathcal{G}$, c'est-à-dire qui satisfont la condition suivante : pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que $s|_V \in \mathcal{G}(V)$.

Soit $s \in \widehat{\mathcal{G}(U)}$. Soit $x \in U$. D'après la construction de $\widehat{\mathcal{G}}$, il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que $s|_V$ provienne de, c'est-à-dire ici appartienne à, $\mathcal{G}(V)$; ainsi, s appartient localement à $\mathcal{G}$.

Réciproquement, soit s une section de $\mathcal{F}$ sur U appartenant localement à $\mathcal{G}$. Il existe alors un recouvrement ouvert (U_i) de U tel que $s_i := s|_{U_i}$ appartienne pour tout i à $\mathcal{G}(U_i) \subset \widehat{\mathcal{G}}(U_i)$. On a $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} = s|_{U_i \cap U_j}$ pour tout (i, j) ; comme $\widehat{\mathcal{G}}$ est un faisceau, les sections s_i se recollent en une section $t \in \widehat{\mathcal{G}}(U) \subset \mathcal{F}(U)$. Par définition, $t|_{U_i} = s_i = s|_{U_i}$ pour tout i ; en conséquence, $t = s$ et $s \in \widehat{\mathcal{G}}(U)$.

Images faisceautiques et défaut d'exactitude

(3.1.23) Image faisceautique. Soit X un espace topologique. Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X . Ce qu'on notera désormais $\text{Im } \varphi$, ce sera l'image *faisceautique* de φ , c'est-à-dire le *faisceau associé* à son image préfaisceautique $U \mapsto \{\varphi(s), s \in \mathcal{F}(U)\} \subset \mathcal{G}(U)$. D'après le 3.1.22.3 ci-dessus, une section de $\text{Im } \varphi$ sur un ouvert U de X est une section de $\mathcal{G}$ sur U qui admet *localement* un antécédent par φ .

(3.1.24) Exemples.

(3.1.24.1) Si φ est un morphisme *injectif* entre deux faisceaux sur un espace topologique, $\text{Im } \varphi$ coïncide avec l'image préfaisceautique de φ , puisque celle-ci est déjà un faisceau (3.1.16.1).

(3.1.24.2) Ce n'est pas le cas en général : on a vu au 3.1.16.2 que si $\mathcal{H}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ et $d : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ la dérivation, l'image préfaisceautique de d n'est pas un faisceau.

Par ailleurs, comme toute fonction holomorphe admet *localement* une primitive, on a $\text{Im } d = \mathcal{H}$.

(3.1.25) Soit X un espace topologique et soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X . De même qu'on a modifié la définition de l'image, on modifie celle de la surjectivité : on dira désormais que φ est surjectif si son image (faisceautique!) est égale à $\mathcal{G}$. Ainsi, *la dérivation est un endomorphisme surjectif du faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.*

(3.1.25.1) Insistons sur le fait qu'on n'a par contre pas modifié la définition de l'injectivité, ni celle du noyau pour un morphisme de faisceaux de groupes : elles restent définies ouvert par ouvert comme pour les morphismes de préfaisceaux.

(3.1.25.2) Rappelons que φ est un isomorphisme si et seulement si la flèche $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est bijective pour tout ouvert U de X (3.1.6.1). Il s'ensuit, en vertu de 3.1.24.1, que φ est un isomorphisme si et seulement si il est à la fois injectif et surjectif.

(3.1.25.3) **Exercice.** Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X . Montrez que pour que φ soit un isomorphisme, il suffit que $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ soit un isomorphisme pour tout $U \in \mathcal{B}$.

(3.1.25.4) Le lemme suivant a l'avantage de remettre injectivité et surjectivité sur le même plan, alors qu'on pouvait avoir l'impression d'une certaine dissymétrie entre elles – l'injectivité étant définie de manière naïve quand la surjectivité ne se teste qu'après faisceautisation de l'image.

(3.1.26) **Lemme.** Soit X un espace topologique et soit $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X . Le morphisme φ est injectif (resp. surjectif, resp. bijectif) si et seulement si $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ est injectif (resp. surjectif, resp. bijectif) pour tout $x \in X$.

Démonstration. Nous allons démontrer séparément les assertions relative à l'injectivité et à la surjectivité – dont la conjonction entraîne l'assertion relative à la bijectivité.

(3.1.26.1) *Le cas de l'injectivité.* Supposons φ injectif et soit $x \in X$. Soient α et β deux éléments de $\mathcal{F}_x$ ayant même image dans $\mathcal{G}_x$. Choisissons un voisinage ouvert U de x tel que α et β soient les germes respectifs de deux sections s et t de $\mathcal{F}$ sur U . On a alors

$$\varphi(s)_x = \varphi_x(s_x) = \varphi_x(\alpha) = \varphi_x(\beta) = \varphi_x(t_x) = \varphi(t)_x$$

et l'on peut dès lors restreindre U de sorte que $\varphi(s) = \varphi(t)$; comme φ est injectif il vient $s = t$, puis $\alpha = \beta$; ainsi, φ_x est injectif.

Réciproquement, supposons que φ_x soit injectif pour tout x . Soit U un ouvert de X et soient s et t deux sections de $\mathcal{F}$ sur U telles que $\varphi(s) = \varphi(t)$. On a alors pour tout $x \in U$ les égalités

$$\varphi_x(s_x) = \varphi(s)_x = \varphi(t)_x = \varphi_x(t_x),$$

et partant $s_x = t_x$ par injectivité de φ_x . Comme ceci vaut pour tout $x \in U$, et puisque $\mathcal{F}$ est un faisceau, on a $s = t$ et φ est injectif.

(3.1.26.2) *Le cas de la surjectivité.* Supposons φ surjectif et soit $x \in X$. Soit α un élément de $\mathcal{G}_x$. Choisissons un voisinage ouvert U de x tel que α soit le germe d'une section s de $\mathcal{G}$ sur U . Par définition de la surjectivité faisceautique, on peut restreindre U de sorte que s soit l'image par φ d'une section t de $\mathcal{F}(U)$. On a alors $\alpha = s_x = \varphi(t)_x = \varphi_x(t_x)$ et φ_x est surjectif.

Réciproquement, supposons que φ_x soit surjectif pour tout x . Soit U un ouvert de X et soit s une section de $\mathcal{G}$ sur U . Soit $x \in U$. Puisque φ_x est surjectif, il existe $\alpha \in \mathcal{F}_x$ tel que $\varphi_x(\alpha) = s_x$. Soit V un voisinage ouvert de x dans U tel que α soit le germe d'une section t de $\mathcal{F}$ sur V . On a alors

$\varphi(t)_x = \varphi_x(t_x) = \varphi_x(\alpha) = s_x$, ce qui signifie qu'on peut restreindre V de sorte que $\varphi(t) = s|_V$. Il s'ensuit que φ est surjectif. $\square$

(3.1.27) Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X .

(3.1.27.1) Soit $\mathcal{F}'$ un sous-faisceau de $\mathcal{F}$. Le lemme 3.1.26 assure que $\mathcal{F}'_x$ s'injecte dans $\mathcal{F}_x$ pour tout $x \in X$, ce qui permet de considérer $\mathcal{F}'_x$ comme un sous-objet (au sens de la catégorie $\mathbf{C}$) de $\mathcal{F}_x$.

Soit s une section de $\mathcal{F}$ sur un ouvert U de X . Comme l'appartenance à $\mathcal{F}'$ est une propriété locale, on voit que $s \in \mathcal{F}'(U)$ si et seulement si $s_x \in \mathcal{F}'_x$ pour tout $x \in U$.

Il en résulte que si $\mathcal{F}''$ est un (autre) sous-faisceau de $\mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}'$ si et seulement si $\mathcal{F}''_x \subset \mathcal{F}'_x$ pour tout $x \in X$; en raisonnant par double inclusion, on en déduit que $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}'$ si et seulement si $\mathcal{F}''_x = \mathcal{F}'_x$ pour tout $x \in X$.

(3.1.27.2) Soit $\mathcal{G}$ un faisceau sur X et soit $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme. Soit $\mathcal{I}$ l'image de φ . Le morphisme φ est la composée de la surjection $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$ et de l'inclusion $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{G}$.

Il découle du lemme 3.1.26 que pour tout $x \in X$, la flèche $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{I}_x$ est surjective. Il en résulte que $\mathcal{I}_x$, que l'on voit comme un sous-objet de $\mathcal{G}_x$ en vertu de 3.1.27.1, est égal à l'image de φ_x .

(3.1.27.3) On conserve les notations $\mathcal{G}$ et φ du 3.1.27.2 ci-dessus, en supposant de plus que $\mathbf{C} = \mathbf{Gp}$; soit $\mathcal{K}$ le noyau de φ .

Soit $x \in X$ et soit s une section de $\mathcal{F}$ sur un voisinage ouvert U de x . Si $s \in \mathcal{K}(U)$ alors $\varphi(s) = e$, et l'on a donc $\varphi_x(s_x) = \varphi(s)_x = e$; ainsi, s_x appartient à $\text{Ker } \varphi_x$.

Réciproquement, supposons que le germe s_x appartient à $\text{Ker } \varphi_x$, c'est-à-dire que $\varphi_x(s_x) = \varphi(s)_x = e$. Il existe alors un voisinage ouvert V de x dans U tel que $\varphi(s)|_V = \varphi(s|_V) = e$. Par conséquent, $s|_V \in \mathcal{K}(V)$ et $s_x \in \mathcal{K}_x$.

Il découle de ce qui précède que $\mathcal{K}_x = \text{Ker } \varphi_x$ pour tout x .

(3.1.28) **Suites exactes de faisceaux de groupes.** Soit X un espace topologique, soient A et B deux éléments de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soit

$$S = \dots \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{i+1} \rightarrow \mathcal{F}_{i+2} \rightarrow \dots$$

une suite de morphismes de faisceaux de groupes sur X , où i parcourt l'ensemble I des entiers relatifs compris entre A et B .

Soit i un élément de I tel que $i-1$ et $i+1$ appartiennent à I . On dit que la suite S est *exacte en* $\mathcal{F}_i$ si le noyau de $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{i+1}$ est égal à l'image de $\mathcal{F}_{i-1} \rightarrow \mathcal{F}_i$. On dit que S est *exacte* si elle est exacte en $\mathcal{F}_i$ pour tout i tel que $i-1$ et $i+1$ appartiennent à I (les indices extrêmes, s'ils existent, ne comptent donc pas).

Il résulte de la définition que dans une suite exacte, la composée de deux flèches successives est toujours nulle.

(3.1.28.1) On déduit de 3.1.27 et sq. que l'exactitude d'une suite de faisceaux de groupes en l'un de ses termes se teste sur les fibres.

(3.1.28.2) La suite

$$\mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si g est surjective et $\text{Ker } g = \text{Im } f$.

(3.1.28.3) La suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}''$$

est exacte si et seulement si f est injective et $\text{Ker } g = \text{Im } f$.

(3.1.28.4) La suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si f est injective, g est surjective et $\text{Ker } g = \text{Im } f$.

(3.1.29) **Exemples.** On note $\mathcal{H}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, et $\mathcal{H}^\times$ celui des fonctions holomorphes inversibles.

(3.1.29.1) On a vu au 3.1.24.2 que la dérivation d est un endomorphisme surjectif de $\mathcal{H}$ (vu comme faisceau de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels). Par ailleurs, une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ a une dérivée nulle si et seulement si elle est constante *sur chaque composante connexe de U* . On a donc une suite exacte naturelle de faisceaux de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels sur l'espace topologique $\mathbb{C}$:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{d} \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

Décrivons la suite exacte qui lui correspond au niveau des fibres. Soit x un point de $\mathbb{C}$. Le développement en série entière en la variable $u = z - x$ fournit un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres entre $\mathcal{H}_x$ et l'anneau $\mathbb{C}\{u\}$ des séries entières de rayon > 0 . La fibre en x de la suite exacte précédente est la suite exacte de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\{u\} \xrightarrow{\partial/\partial u} \mathbb{C}\{u\} \longrightarrow 0.$$

(3.1.29.2) Toute fonction holomorphe inversible est localement le logarithme d'une fonction holomorphe. Par ailleurs, l'exponentielle d'une fonction holomorphe f sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est égale à 1 si et seulement si f est constante de valeur appartenant à $2i\pi\mathbb{Z}$ sur chaque composante connexe de U . On a donc une suite exacte naturelle de faisceaux de groupes abéliens sur l'espace topologique $\mathbb{C}$, appelée *suite exponentielle* :

$$0 \longrightarrow 2i\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\exp} \mathcal{H}^\times \longrightarrow 1.$$

Décrivons la suite exacte qui lui correspond au niveau des fibres. Soit x un point de $\mathbb{C}$. Le développement en série entière en la variable $u = z - x$ fournit un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres entre $\mathcal{H}_x$ et l'anneau $\mathbb{C}\{u\}$ des séries entières de rayon > 0 . La fibre en x de la suite exacte précédente est la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow 2i\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}\{u\} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}\{u\}^\times \longrightarrow 1.$$

(3.1.30) Soit X un espace topologique et soit

$$1 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}''$$

une suite exacte de faisceaux de groupes sur X . Pour tout ouvert U de X , la suite

$$1 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}''(U)$$

est exacte. En effet :

- $\mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est injective par définition de l'injectivité d'un morphisme de faisceaux ;
- l'exactitude en $\mathcal{F}$ signifie que $\text{Ker } v = \text{Im } u$. Mais comme u est injective, $\text{Im } u$ coïncide avec l'image préfaisceautique de u , et l'exactitude en $\mathcal{F}(U)$ en découle aussitôt.

(3.1.30.1) Ainsi, le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$ est exact à gauche. Il n'est pas exact en général, car il ne transforme pas nécessairement les surjections en surjections, comme en atteste notre sempiternel contre-exemple : si $\mathcal{H}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ la dérivation $d : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est surjective, mais l'application induite $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\times) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C}^\times)$ ne l'est pas, puisque son image ne contient pas $z \mapsto 1/z$.

Donnons-en un autre, qui traduit le même phénomène (l'absence de logarithme continu sur $\mathbb{C}^\times$) : la flèche $\exp : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^\times$ est surjective, mais l'application induite $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\times) \rightarrow \mathcal{H}^\times(\mathbb{C}^\times)$ ne l'est pas, car son image ne contient pas l'identité.

(3.1.30.2) Ce défaut d'exactitude – dont la mesure précise constitue l'objet de ce qu'on appelle la *cohomologie* – est, en un sens, le principal intérêt de la théorie des faisceaux : il traduit en effet les difficultés de recollement d'antécédents, elles-mêmes liées à la «forme» de l'espace topologique considéré (présence ou non de «trous», etc.) ; il permet donc d'une certaine manière de décrire cette forme algébriquement.

Ainsi, les deux contre-exemples du 3.1.30.1 ci-dessus sont intimement liés au fait que $\mathbb{C}^\times$ n'est pas simplement connexe.

(3.1.31) **Quotients.** Soit X un espace topologique, soit $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes sur X , et soit $\mathcal{H}$ un sous-faisceau de groupes de $\mathcal{G}$. Le *faisceau quotient* $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ est le faisceau *d'ensembles* associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{H}(U)$, et l'on dispose d'une surjection naturelle $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Supposons que $\mathcal{H}$ est distingué dans $\mathcal{G}$ (i.e. $\mathcal{H}(U)$ est distingué dans $\mathcal{G}(U)$ pour tout ouvert U). Le faisceau quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ hérite alors d'une structure naturelle de faisceau de groupes, et $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ est un morphisme de faisceaux de groupes ; nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et prouver la propriété universelle du couple $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H})$ sous ces hypothèses. Indiquons simplement que la suite

$$1 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow 1$$

est exacte ; et qu'inversement, si

$$1 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow 1$$

est une suite exacte de faisceaux de groupes, $\mathcal{H}$ est distingué dans $\mathcal{G}$ et le groupe $\mathcal{G}'$ s'identifie naturellement à $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

(3.1.32) Limites et colimites dans la catégorie des faisceaux. Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{D}$ un diagramme dans $\mathbf{Faisc}_X$; pour tout ouvert U de X , on note $\mathcal{D}(U)$ le diagramme de $\mathbf{C}$ obtenu en évaluant en U les constituants de $\mathcal{D}$.

Les limites et colimites de $\mathcal{D}$ existent; nous allons brièvement indiquer leur construction, en laissant le détail des vérifications au lecteur –elles sont élémentaires.

(3.1.32.1) Construction de la limite. Elle est on ne peut plus simple : le préfaisceau $U \mapsto \lim \mathcal{D}(U)$ a le bon goût d'être un faisceau, qui s'identifie à $\lim \mathcal{D}$.

(3.1.32.2) Construction de la colimite. Elle est un tout petit peu moins simple : le préfaisceau $U \mapsto \operatorname{colim} \mathcal{D}(U)$ n'est pas un faisceau en général, mais son faisceautisé s'identifie à $\operatorname{colim} \mathcal{D}$ (combinaison de la propriété universelle de la colimite préfaisceautique $U \mapsto \operatorname{colim} \mathcal{D}(U)$ et celle du faisceautisé).

(3.1.32.3) Exercice. Traduire en termes de colimite (resp. limite) l'exactitude de la suite de 3.1.28.2 (resp. 3.1.28.3), dans l'esprit de 2.4.13.1 et 2.4.13.2; montrez que le faisceau quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ de 3.1.31 peut s'interpréter comme la colimite d'un diagramme convenable.

(3.1.32.4) Il peut arriver dans certains cas qu'il ne soit pas nécessaire de faisceautiser pour obtenir une colimite : par exemple, le lecteur vérifiera que la somme directe *préfaisceautique* d'une famille *finie* de faisceaux de A -modules est un faisceau. Nous l'invitons à montrer par un contre-exemple que cette assertion est fautive en général sans hypothèse de finitude.

(3.1.32.5) Il y a une explication conceptuelle au fait que la limite préfaisceautique soit toujours un faisceau. Cette assertion peut en effet se reformuler en disant que le foncteur d'inclusion $I_X: \mathbf{Faisc}_X \hookrightarrow \mathbf{Pref}_X$ commute aux limites, et il a une excellente raison pour ce faire : il admet un adjoint à gauche, à savoir la faisceautisation.

Le foncteur I_X n'admet pas d'adjoint à droite *en général*, faute de commuter aux colimites (*cf. supra*). Il peut toutefois en admettre dans certains cas très simples : par exemple, si $X = \emptyset$ et si $\mathbf{C} = A\text{-Mod}$, la catégorie $\mathbf{Pref}_X$ s'identifie à celle des A -modules, et la catégorie $\mathbf{Faisc}_X$ à la catégorie $\mathbf{Nul}$ dont le seul objet est le module nul; et le foncteur $M \mapsto \{0\}$ est à la fois adjoint à gauche et à droite à l'inclusion $\mathbf{Nul} \hookrightarrow A\text{-Mod}$.

Notons par contre que si $\mathbf{C} = \mathbf{Ens}$, le foncteur I_X n'admet *jamais* d'adjoint à droite : en effet, l'objet initial de $\mathbf{Faisc}_X$ envoie U sur $\emptyset$ si $U \neq \emptyset$ et sur $\{*\}$ sinon, alors que l'objet initial de $\mathbf{Pref}_X$ envoie tout ouvert y compris $\emptyset$ sur $\emptyset$. Le foncteur I_X ne commute donc pas aux colimites, et n'admet dès lors pas d'adjoint à droite.

(3.1.33) Fonctorialité. Soit $f: Y \rightarrow X$ une application continue entre espaces topologiques.

(3.1.33.1) Si $\mathcal{G}$ est un faisceau sur Y , on vérifie immédiatement que le préfaisceau $f_*\mathcal{G}$ est un faisceau.

(3.1.33.2) Par contre, si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X , le préfaisceau $f^{-1}\mathcal{F}$ n'est pas un faisceau en général. *C'est désormais son faisceautisé que l'on désignera par $f^{-1}\mathcal{F}$.* Comme la faisceautisation ne modifie pas les fibres, on a encore pour tout $y \in Y$ d'image x sur X un isomorphisme $f^{-1}\mathcal{F}_y \simeq \mathcal{F}_x$.

Puisqu'un préfaisceau est muni d'un morphisme canonique dans son faisceautisé, on dispose encore dans ce contexte pour tout ouvert V de Y et tout ouvert U de X contenant $f(V)$ d'une application $f^{-1}: \mathcal{F}(U) \rightarrow f^{-1}\mathcal{F}(V)$.

(3.1.33.3) On a ainsi défini deux foncteurs : le foncteur f^{-1} de $\mathbf{Faisc}_X$ vers $\mathbf{Faisc}_Y$, et le foncteur f_* de $\mathbf{Faisc}_Y$ vers $\mathbf{Faisc}_X$.

Si Z est un espace topologique et si $g: Z \rightarrow Y$ est une application continue, on a des isomorphismes naturels de foncteurs

$$(f \circ g)_* \simeq f_* \circ g_* \quad \text{et} \quad (f \circ g)^{-1} \simeq g^{-1} \circ f^{-1}.$$

C'est en effet évident pour les images directes ; et en ce qui concerne les images réciproques, les définitions fournissent un morphisme naturel de $(f \circ g)^{-1}$ vers $g^{-1} \circ f^{-1}$, dont on vérifie sur les fibres que c'est un isomorphisme.

(3.1.33.4) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et soit $\mathcal{G}$ un faisceau sur Y . Reprenons la notation $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ introduite au 3.1.10.1. On a construit en 3.1.10.3 une bijection entre $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $\text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$, fonctorielle en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Introduisons par ailleurs pour un instant la notation $f^{-1}\mathcal{F}_{\text{pref}}$ pour l'image inverse *préfaisceautique* de $\mathcal{F}$ par f . On a construit en 3.1.10.2 une bijection entre $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}_{\text{pref}}, \mathcal{G})$, fonctoriel en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Mais la propriété universelle du faisceautisé fournit par ailleurs un isomorphisme canonique entre $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}_{\text{pref}}, \mathcal{G})$ et $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Ainsi, $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $\text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$ sont tous deux isomorphes à $H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, fonctoriellement en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

En particulier, il existe un isomorphisme $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$ qui est fonctoriel en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, et (f^{-1}, f_*) est donc un couple de foncteurs adjoints.

(3.1.33.5) Si U est un ouvert de X et si $j: U \hookrightarrow X$ est la flèche d'inclusion, on vérifie que pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X , le faisceau $j^{-1}\mathcal{F}$ n'est autre que la restriction de $\mathcal{F}$ à U .

(3.1.33.6) Si $x \in X$ et si $i: \{x\} \hookrightarrow X$ est l'inclusion, on vérifie que pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X , le faisceau $i^{-1}\mathcal{F}$ envoie $\{x\}$ sur $\mathcal{F}_x$ (et $\emptyset$ sur $\{*\}$, nécessairement).

3.2 Espaces annelés

Définition, exemples, premières propriétés

(3.2.1) Définition. Un *espace annelé* est un couple $(X, \mathcal{O}_X)$ où X est un espace topologique et $\mathcal{O}_X$ un faisceau d'anneaux sur X , que l'on appelle parfois le faisceau *structural*.

(3.2.2) Exemples.

(3.2.2.1) Soit X un espace topologique, et soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions continues à valeurs réelles sur X . Le couple $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé (en $\mathbb{R}$ -algèbres).

(3.2.2.2) Soit X une variété différentielle, et soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X . Le couple $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé (en $\mathbb{R}$ -algèbres).

(3.2.2.3) Soit X une variété analytique complexe, et soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X . Le couple $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé (en $\mathbb{C}$ -algèbres).

(3.2.2.4) Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau constant $\mathbb{Z}$ sur X . Le couple $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé.

(3.2.2.5) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, et soit U un ouvert de X . Le couple $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ est un espace annelé; sauf mention expresse du contraire, on considèrera toujours U comme étant muni de cette structure d'espace annelé, et on écrira à l'occasion $\mathcal{O}_U$ au lieu de $\mathcal{O}_X|_U$.

(3.2.3) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé et soit f appartenant à $\mathcal{O}_X(X)$.

(3.2.3.1) Soit (U_i) une famille d'ouverts de X tels que $f|_{U_i}$ soit inversible pour tout i , et soit U la réunion des U_i . La restriction de f à U est alors inversible. En effet, désignons pour tout i par g_i l'inverse de $f|_{U_i}$ dans $\mathcal{O}_X(U_i)$. Par unicité de l'inverse de $f|_{U_i \cap U_j}$, les restrictions $g_i|_{U_i \cap U_j}$ et $g_j|_{U_i \cap U_j}$ coïncident pour tout couple (i, j) ; par conséquent, les sections g_i de $\mathcal{O}_X$ se recollent en une section g de $\mathcal{O}_X$ sur U . On a par construction $(gf)|_{U_i} = 1$ pour tout i , si bien que $gf = 1$ dans $\mathcal{O}_X(U)$.

(3.2.3.2) Notons $D(f)$ la réunion de tous les ouverts de X en restriction auxquels f est inversible. En vertu de 3.2.3.1, la restriction de f à $D(f)$ est inversible; ainsi, $D(f)$ apparaît comme *le plus grand ouvert de X en restriction auquel f est inversible*.

On déduit de cette caractérisation de $D(f)$ que si V est un ouvert de X alors $D(f|_V) = D(f) \cap V$.

(3.2.3.3) Soit $x \in X$. L'image de f dans $\mathcal{O}_{X,x}$ est inversible si et seulement si il existe un voisinage ouvert de x dans X en restriction auquel f est inversible; par ce qui précède, cela revient à demander que x appartienne à $D(f)$.

(3.2.4) Définition. Soient $(Y, \mathcal{O}_Y)$ et $(X, \mathcal{O}_X)$ deux espaces annelés. Un *morphisme d'espaces annelés* de $(Y, \mathcal{O}_Y)$ vers $(X, \mathcal{O}_X)$ est constitué d'une application continue $\varphi : Y \rightarrow X$ et d'une donnée supplémentaire que l'on peut présenter de trois façons différentes, dont l'équivalence résulte de 3.1.33.4 :

- a) un morphisme de faisceaux d'anneaux de $\mathcal{O}_X$ vers $\varphi_* \mathcal{O}_Y$;
- b) un morphisme de faisceaux d'anneaux de $\varphi^{-1} \mathcal{O}_X$ vers $\mathcal{O}_Y$;
- c) pour tout couple (U, V) formé d'un ouvert U de X et d'un ouvert V de Y tel que $\varphi(V) \subset U$, un morphisme d'anneaux de $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(V)$ traditionnellement noté φ^* , en exigeant que si U et U' sont deux ouverts de X avec $U' \subset U$, et V et V' deux ouverts de Y avec $V' \subset V$, $\varphi(V) \subset U$

et $\varphi(V') \subset U'$ alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{O}_Y(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(U') & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{O}_Y(V') \end{array}$$

commute.

(3.2.4.1) On prendra garde que si (U, V) est comme au c) l'application φ va de V vers U , mais l'application φ^* entre anneaux de sections va «dans l'autre sens», à savoir de $\mathcal{O}_X(U)$ vers $\mathcal{O}_Y(V)$.

(3.2.4.2) Les espaces annelés constituent ainsi une catégorie notée **EspAnn** – la définition des identités et de la composition des morphismes est laissée au lecteur.

(3.2.5) Exemples.

(3.2.5.1) Soient Y et X deux espaces topologique, respectivement munis de leurs faisceaux de fonctions continues à valeurs réelles, et soit φ une application continue de Y vers X . Elle induit naturellement un morphisme d'espaces annelés entre Y et X : pour tout ouvert U de X , tout ouvert V de Y tel que $\varphi(V) \subset U$ et toute fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, on pose $\varphi^*f = f \circ \varphi$.

(3.2.5.2) Soient Y et X deux variétés différentielles, respectivement munies de leurs faisceaux de fonctions continues à valeurs réelles, et soit φ une application $\mathcal{C}^\infty$ de Y vers X . Elle induit naturellement un morphisme d'espaces annelés entre Y et X : pour tout ouvert U de X , tout ouvert V de Y tel que $\varphi(V) \subset U$ et toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, on pose $\varphi^*f = f \circ \varphi$.

(3.2.5.3) Soient Y et X deux variétés analytiques complexes, respectivement munies de leurs faisceaux de fonctions holomorphes, et soit φ une application holomorphe de Y vers X . Elle induit naturellement un morphisme d'espaces annelés entre Y et X : pour tout ouvert U de X , tout ouvert V de Y tel que $\varphi(V) \subset U$ et toute fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, on pose $\varphi^*f = f \circ \varphi$.

(3.2.5.4) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, et soit U un ouvert de X . L'immersion $j : U \hookrightarrow X$ est sous-jacente à un morphisme naturel d'espace annelés : si U' est un ouvert de U et X' un ouvert de X contenant U' , le morphisme $j^* : \mathcal{O}_X(X') \rightarrow \mathcal{O}_U(U') = \mathcal{O}_X(U')$ est simplement la restriction.

Soit $\varphi : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'espaces annelés tel que $\varphi(Y)$ soit contenu dans U . L'application continue $Y \rightarrow U$ induite par φ est sous-jacente à un morphisme d'espaces annelés de $(Y, \mathcal{O}_Y)$ vers $(U, \mathcal{O}_U)$: si W est un ouvert de Y et si V est un ouvert de U contenant $\varphi(W)$, le morphisme d'anneaux correspondant $\mathcal{O}_U(W) = \mathcal{O}_X(W) \rightarrow \mathcal{O}_Y(V)$ n'est autre que φ^* .

En d'autres termes, toute factorisation *ensembliste* par U est automatiquement *morphique*.

On vérifie aisément que ce morphisme d'espace annelés $(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (U, \mathcal{O}_U)$ est le seul dont la composée avec j soit égale à φ . Cela signifie que $((U, \mathcal{O}_U), j)$ représente le foncteur qui envoie un espace annelé $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sur

$$\{\varphi \in \text{Hom}_{\text{EspAnn}}((Y, \mathcal{O}_Y), (X, \mathcal{O}_X)), \quad \varphi(Y) \subset U\}.$$

(3.2.5.5) Nous dirons qu'un morphisme d'espaces annelés $\varphi: Y \rightarrow X$ est une *immersion ouverte* s'il induit un isomorphisme entre Y et un ouvert de X .

(3.2.5.6) Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces annelés et soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Comme $\varphi^* f$ est inversible sur $\varphi^{-1}(D(f))$ il vient $\varphi^{-1}(D(f)) \subset D(\varphi^* f)$.

(3.2.5.7) Soit $\varphi: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'espaces annelés; soit y un point de Y et soit x son image sur X . Le morphisme φ induit alors de manière naturelle un morphisme d'anneaux de $\mathcal{O}_{X,x}$ vers $\mathcal{O}_{Y,y}$, souvent encore noté φ^* .

(3.2.6) Limites d'espaces annelés. Soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans la catégorie des espaces annelés. Il admet une limite que nous allons décrire brièvement, les justifications étant laissées au lecteur. Soit X la limite du diagramme $\mathcal{D}$ dans la catégorie des espaces topologiques, décrite au 1.6.8.2; pour tout i , notons p_i l'application continue structurale $X \rightarrow X_i$. Soient i et j deux indices et soit $f \in E_{ij}$. Le morphisme naturel $f^{-1}\mathcal{O}_{X_j} \rightarrow \mathcal{O}_{X_i}$ induit par application du foncteur p_i^{-1} un morphisme

$$\mu(f): p_j^{-1}\mathcal{O}_{X_j} \rightarrow p_i^{-1}\mathcal{O}_{X_i}.$$

Le diagramme $((p_i^{-1}\mathcal{O}_{X_i})_i, (\mu(E_{ij}))_{j,i})$ admet une colimite $\mathcal{O}_X$ dans la catégorie des faisceaux d'anneaux sur X : on construit d'abord ouvert par ouvert la colimite correspondante dans la catégorie des anneaux (2.6.9 et sq.), puis on faisceautise le préfaisceau ainsi obtenu. L'espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ est alors la limite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des espaces annelés.

(3.2.7) Colimites d'espaces annelés. Soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans la catégorie des espaces annelés. Il admet une colimite que nous allons décrire brièvement, les justifications étant laissées au lecteur. Soit X la colimite du diagramme $\mathcal{D}$ dans la catégorie des espaces topologiques, décrite au 1.6.10.2; pour tout i , notons λ_i l'application continue structurale $X_i \rightarrow X$. Soient i et j deux indices et soit $f \in E_{ij}$. Le morphisme naturel $\mathcal{O}_{X_j} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{X_i}$ induit par application du foncteur $\lambda_{j,*}$ un morphisme

$$\mu(f): \lambda_{j,*}\mathcal{O}_{X_j} \rightarrow \lambda_{i,*}\mathcal{O}_{X_i}.$$

Le diagramme $((\lambda_{i,*}\mathcal{O}_{X_i})_i, (\mu(E_{ij}))_{j,i})$ admet une limite $\mathcal{O}_X$ dans la catégorie des faisceaux d'anneaux sur X : il suffit de construire ouvert par ouvert la limite correspondante dans la catégorie des anneaux, et le préfaisceau ainsi obtenu est directement un faisceau. L'espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ est alors la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des espaces annelés.

Nous allons maintenant donner une description un peu plus tangible de X .

(3.2.7.1) La famille des λ_i identifie *topologiquement* X au quotient de $\coprod X_i$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ engendrée par les relations $x \sim f(x)$ où $x \in X_i$ et $f \in E_{ij}$ pour un certain couple (i, j) . Cette relation $\mathcal{R}$ peut être explicitée. Soient i et j deux indices, soit $x \in X_i$ et soit $y \in X_j$. On a alors $x \mathcal{R} y$ si et seulement s'il existe une *chaîne* (de relations élémentaires) reliant x et y , c'est-à-dire la donnée :

- ◇ d'une famille finie d'indices $i = i_1, \dots, i_n = j$;
- ◇ pour tout ℓ entre 1 et n , d'un élément x_ℓ de X_{i_ℓ} avec $x_1 = x$ et $x_n = y$;
- ◇ pour tout ℓ entre 1 et $n-1$, d'un élément $\varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}$ et d'une flèche g_ℓ telle que :

- (a) si $\varepsilon_\ell = 1$ alors $g_\ell \in E_{i_\ell, i_{\ell+1}}$ et $g_\ell(x_\ell) = x_{\ell+1}$;
- (b) si $\varepsilon_\ell = -1$ alors $g_\ell \in E_{i_{\ell+1}, i_\ell}$ et $g_\ell(x_{\ell+1}) = x_\ell$.

(3.2.7.2) Par définition du quotient topologique par une relation d'équivalence, $U \mapsto (\lambda_i^{-1}(U))_i$ établit une bijection croissante entre l'ensemble des ouverts de X et l'ensemble des familles (U_i) telles que :

- ◇ U_i est pour tout i un ouvert de X_i ;
- ◇ on a pour tout (i, j) et toute $f \in E_{ij}$ l'égalité $U_i = f^{-1}(U_j)$.

La réciproque de cette bijection envoie la famille (U_i) sur $\bigcup \lambda_i(U_i)$.

Soit U un ouvert de X . Il résulte de la définition du faisceau $\mathcal{O}_X$ que la flèche $g \mapsto (\lambda_i^* g)$ établit un isomorphisme d'anneaux entre $\mathcal{O}_X(U)$ et l'ensemble des familles (g_i) telles que :

- ◇ $g_i \in \mathcal{O}_{X_i}(\lambda_i^{-1}(U))$ pour tout indice i ;
- ◇ on a $g_i = f^* g_j$ pour tout (i, j) et toute $f \in E_{ij}$.

(3.2.8) L'exemple de la somme disjointe. Soit (X_i) une famille d'espaces annelés. Il découle de ce qui précède que la somme disjointe des X_i dans la catégorie des espaces annelés est leur somme disjointe topologique X , munie de l'unique structure d'espace annelé faisant de chacun des $X_i \hookrightarrow X$ une immersion ouverte.

(3.2.9) Les recollements. On désigne toujours par $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans la catégorie des espaces, par X sa colimite, et par $\lambda_i: X_i \rightarrow X$ les flèches structurales (pour i variable). Pour tout (i, j) , on note U_{ij} l'ensemble des points de X_i qui sont en relation *via* $\mathcal{R}$ avec un point de X_j (en d'autres termes, $U_{ij} = \lambda_i^{-1}(\lambda_j(X_j))$).

On se propose maintenant de montrer que si les flèches de $\mathcal{D}$ sont toutes des immersions ouvertes et si $\mathcal{D}$ est de surcroît « simplement connexe » (voir 3.2.9.3 ci-dessous pour la définition), les λ_i sont elles-mêmes des immersions ouvertes, ce qui permet de voir X comme un *recollement* des X_i .

Ce passage n'est pas difficile mais est un peu laborieux. On pourra l'omettre en première lecture, admettre ses conclusions (3.2.9.5) et se reporter directement à 3.2.12 et 3.2.13 pour voir comment elles se déclinent dans deux cas particuliers importants de tels recollements – les seuls dont nous aurons besoin en pratique.

(3.2.9.1) *On suppose à partir de maintenant que les ensembles E_{ij} sont constitués d'immersions ouvertes.*

Soient i et j deux indices, soit $x \in X_i$ et soit $y \in X_j$ tel que $x \mathcal{R} y$. Remarquons tout d'abord que dans ce contexte, une chaîne $c = ((i_1, \dots, i_n), (x_1, \dots, x_n), (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}), (g_1, \dots, g_{n-1}))$ reliant x à y est entièrement déterminée par $((i_1, \dots, i_n), (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}), (g_1, \dots, g_{n-1}))$: la condition $x_1 = x$ et l'injectivité des g_ℓ (qui ne sert que pour les indices ℓ tels que $\varepsilon_\ell = -1$) permettent en effet de reconstruire sans ambiguïté la suite des x_ℓ , y compris le point y . Par conséquent, nous écrirons désormais simplement $c = ((i_1, \dots, i_n), (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}), (g_1, \dots, g_{n-1}))$ sans mentionner les x_ℓ ; et puisque cette chaîne détermine y , ce dernier est le seul point de X_j relié à x par c .

Soit donc $c = ((i_1, \dots, i_n), (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}), (g_1, \dots, g_{n-1}))$ une chaîne reliant x à y . On définit pour tout ℓ compris entre 1 et n un ouvert V_ℓ de X_{i_ℓ} , par récurrence descendante sur ℓ : on pose $V_n = X_{i_n}$, et si $\ell \leq n-1$ et si $V_{\ell+1}$ est supposé construit, on pose $V_\ell = g_\ell^{-1}(V_{\ell+1})$ si $\varepsilon_\ell = 1$, et $V_\ell = g_\ell(V_{\ell+1})$ sinon. Pour tout ℓ le morphisme g_ℓ est une immersion ouverte et induit donc une immersion

ouverte de V_ℓ dans $V_{\ell+1}$ (directement si $\varepsilon_\ell = 1$, après inversion si $\varepsilon_\ell = -1$), cette immersion étant alors en fait un isomorphisme; par composition, on en déduit une immersion ouverte g de V_1 dans X_j , qui vérifie $g(x) = y$. Par construction, v et $g(v)$ sont reliés par la même chaîne c pour tout $v \in V_1$; plus précisément, V_1 est exactement l'ensemble des points de X_i reliés à un point de X_j (uniquement déterminé) par la chaîne c . En particulier, $v\mathcal{R}g(v)$ pour tout $v \in V_1$; il s'ensuit que $V \subset U_{ij}$, puis que U_{ij} est un ouvert de X_i .

Si ℓ est tel que $\varepsilon_\ell = 1$ on a évidemment $\lambda_{i_{\ell+1}} \circ g_\ell = \lambda_{i_\ell}|_{V_\ell}$; et si $\varepsilon_\ell = -1$, on a $\lambda_{i_\ell} \circ g_\ell = \lambda_{i_{\ell+1}}|_{V_{\ell+1}}$; en composant cette égalité avec $g_\ell^{-1}: V_\ell \rightarrow V_{\ell+1}$, il vient $\lambda_{i_{\ell+1}} \circ g_\ell^{-1} = \lambda_{i_\ell}|_{V_\ell}$. On en déduit que $\lambda_j \circ g = \lambda_i|_{V_1}$.

(3.2.9.2) Récapitulation. Soient i et j deux indices et soit c une chaîne reliant un point de X_i à un point de X_j . D'après le 3.2.9.1 ci-dessus l'ensemble des points de X_i reliés à un point de X_j par la chaîne c est un ouvert V_c de X_i , et il existe une immersion ouverte $g_c: V_c \rightarrow X_j$ telle que $g_c(x)$ soit le seul point de X_j relié à x par c pour tout $x \in V_c$.

Les faits suivants résultent de notre construction :

- (1) on a $\lambda_j \circ g_c = \lambda_i|_{V_c}$;
- (2) si $i = j$ et si c est la chaîne triviale, $V_c = X_i$ et $g_c = \text{Id}_{X_i}$;
- (3) si $n = 2$, la chaîne c consiste en une flèche g_1 de V_i vers V_j si $\varepsilon_1 = 1$ et de V_j vers V_i et si $\varepsilon_1 = -1$; dans le premier cas on a $V_c = V_i$ et $g_c = g_1$; dans le second cas on a $V_c = g_1(V_j)$ et g_c est la réciproque de l'isomorphisme de V_j sur $g_1(V_j)$ induit par g_1 ;
- (4) si l'on désigne par c' la chaîne déduite de c en «renversant l'ordre de parcours», $g_c(V_c) = V_{c'}$ et $g_{c'}$ s'obtient en composant la réciproque de $g_c: V_c \simeq V_{c'}$ et l'inclusion de $V_{c'}$ dans X_j ;
- (5) si k est un indice, si z un point de X_k et si d est une chaîne reliant y à z alors $V_{c \amalg d} = g_c^{-1}(V_d)$ et $g_{c \amalg d} = g_d \circ g_c$.

(3.2.9.3) Nous supposons de surcroît que si i, j et c sont comme ci-dessus alors pour tout $x \in V_c$ le germe de g_c en x ne dépend que de i, x et j , et pas de c . Précisons ici que lorsque nous parlons du germe de g_c , nous voyons g_c comme une section du faisceau $U \mapsto \text{Hom}(U, X_j)$ sur l'espace X_i . Notre énoncé signifie donc que si l'on se donne une chaîne c' reliant x à un point de X_j alors il existe un voisinage ouvert W de x dans $V_c \cap V_{c'}$ tel que $g_c|_W = g_{c'}|_W$.

Nous pensons à cette hypothèse comme assurant l'unicité locale du chemin (morphique) de X_i à X_j qu'on peut construire à partir des flèches de $\mathcal{D}$; pour cette raison, nous la résumerons en disant que $\mathcal{D}$ est *simplement connexe*.

Donnons une première conséquence de la simple connexité de $\mathcal{D}$. Si x, i, j, c et c' sont comme ci-dessus alors $g_c(x) = g_{c'}(x)$. Autrement dit, pour tout (i, j) et tout $x \in X_i$ il y a *au plus* un point $y \in X_j$ en relation avec x .

Soient i et j deux indices. Pour tout $x \in U_{ij}$ il existe par ce qui précède un unique $y_x \in X_j$ en relation avec x ; choisissons une chaîne c_x reliant x à y_x . Puisque $\mathcal{D}$ est simplement connexe, le germe en x de g_{c_x} ne dépend pas de c_x .

Soient x et x' deux points de U_{ij} et soit z un point de $V_{c_x} \cap V_{c_{x'}}$. Les chaînes c_x et $c_{x'}$ et relient toutes deux z à y_z , si bien que les germes en z de g_{c_x} et $g_{c_{x'}}$ sont égaux; autrement dit, g_{c_x} et $g_{c_{x'}}$ coïncident au voisinage de z dans $V_{c_x} \cap V_{c_{x'}}$.

Il résulte de ce qui précède que lorsque x varie, les g_{c_x} se recollent en un morphisme g_{ij} de U_{ij} dans X_j . Il est caractérisé par le fait que son germe en tout point x de U_{ij} est égal à celui de g_c pour n'importe quelle chaîne c reliant

x à y_x ; on en particulier $g_{ij}(x) = y_x$, ce qui veut dire que g_{ij} envoie un point x de U_{ij} sur l'unique point de X_j avec lequel il est en relation *via* $\mathcal{R}$.

Comme un point de X_j ne peut être en relation avec deux points distincts de X_i (par application de ce qui précède en intervertissant les rôles de i et j), le morphisme g_{ij} est ensemblistement injectif ; puisque c'est localement une immersion ouverte (il coïncide au voisinage de tout point avec g_c pour une chaîne c convenable), c'en est une globalement ; par construction, $g_{ij}(U_{ij}) = U_{ji}$. Autrement dit, g_{ij} induit un isomorphisme de U_{ij} sur U_{ji} . Les faits suivants se déduisent des assertions (1), (2), (3), (4) et (5) de 3.2.9.2 :

- (1) on a $\lambda_j \circ g_{ij} = \lambda_i|_{U_{ij}}$;
- (2) on a $U_{ii} = X_i$ et $g_{ii} = \text{Id}_{X_i}$ pour tout i ;
- (3) si E_{ij} est non vide alors $U_{ij} = X_i$, $E_{ij} = \{g_{ij}\}$ et $U_{ji} = g_{ij}(X_i)$;
- (4) pour tout (i, j) la réciproque de $g_{ij}: U_{ij} \simeq U_{ji}$ est (induite par) g_{ji} ;
- (5) si k est un indice alors $U_{ij} \cap U_{ik} = g_{ij}^{-1}(U_{jk} \cap U_{ji})$ et on a l'égalité

$$g_{ik} = g_{jk} \circ g_{ij}$$

entre isomorphismes de $U_{ij} \cap U_{ik}$ sur $U_{kj} \cap U_{ki}$.

Notons en particulier qu'en vertu de (3) chaque ensemble E_{ij} comprend au plus une flèche.

(3.2.9.4) Nous allons maintenant montrer que les λ_i sont des immersions ouvertes. Fixons i . Pour tout $x \in X_i$, il y a un unique point de X_i en relation avec x *via* $\mathcal{R}$, qui n'est évidemment autre que x lui-même. Par conséquent, λ_i est injective.

Soit U un ouvert de X_i . Pour tout j , posons $V_j = \lambda_j^{-1}(\lambda_i(U))$; notons que $V_i = U$ par injectivité de λ_i . Par définition, V_j est constitué des points de X_j qui ont même image dans la colimite X qu'un point de U , c'est-à-dire encore qui sont équivalents à un point de U ; il vient

$$V_j = g_{ij}(U_{ij} \cap U).$$

Il s'ensuit que V_j est un ouvert de X_j . Pour tout (j, k, f) avec $f \in E_{jk}$ on a par construction $V_j = f^{-1}(V_k)$; il en résulte que $\lambda_i(U)$ est un ouvert de X . L'injection continue λ_i est en conséquence ouverte, si bien que λ_i est *topologiquement* une immersion ouverte.

Pour montrer que λ_i est une immersion ouverte, il reste à s'assurer que $(s_j)_j \mapsto s_i$ induit un isomorphisme d'anneaux entre

$$A := \left\{ (s_j) \in \prod_j \mathcal{O}_{X_j}(V_j), s_j = f^* s_k \text{ pour tout } (j, k, f) \text{ avec } f \in E_{jk} \right\}$$

et $\mathcal{O}_{X_i}(V_i) = \mathcal{O}_{X_i}(U)$.

Soit $(s_j) \in A$. Il existe une unique fonction $s \in \mathcal{O}_X(\lambda_i(U))$ telle que $s_j = \lambda_j^* s$ pour tout j . On a en particulier pour tout j les égalités

$$s_j = \lambda_j^* s_i = g_{ji}^* \lambda_i^* s = g_{ji}^* s_i.$$

Ainsi, la famille (s_j) est uniquement déterminée par s_i .

Réciproquement, fixons $\sigma \in \mathcal{O}_{X_i}(U)$, et pour tout indice j notons s_j la fonction $g_{ji}^* \sigma$ sur l'ouvert V_j ; remarquons que $s_i = \sigma$. Soient j et k deux indices

tel que E_{jk} soit non vide, ce qui veut dire qu'il est égal au singleton $\{g_{jk}\}$. On a alors

$$g_{jk}^* s_k = g_{jk}^* g_{ki}^* s_i = g_{ji}^* s_i = s_j.$$

Ainsi, $(s_j) \in A$, et c'est un antécédent de σ puisque $s_i = \sigma$, ce qui termine la démonstration.

(3.2.9.5) Conclusion. Chacune des flèches λ_i est donc sous nos hypothèses une immersion ouverte, et X est par ailleurs réunion des $\lambda_i(X_i)$. Si i et j sont deux indices, on a

$$\lambda_i(X_i) \cap \lambda_j(X_j) = \lambda_i(U_{ij}) = \lambda_j(U_{ji}),$$

puisque U_{ij} (resp. U_{ji}) est précisément le sous-ensemble de X_i (resp. X_j) formé des points en relation avec un point de X_j (resp. X_i).

On peut ainsi identifier X_i et X_j via λ_i et λ_j à deux ouverts de X , dont l'intersection correspond à U_{ij} en tant qu'ouvert de X_i , et à U_{ji} en tant qu'ouvert de X_j ; cette intersection induit ainsi elle-même une identification entre U_{ij} et U_{ji} , qui n'est autre que g_{ij} , comme en atteste la formule $\lambda_j \circ g_{ij} = \lambda_i|_{U_{ij}}$.

La construction de X consiste donc bien en un sens à *recoller* les X_i le long des isomorphismes $g_{ij}: U_{ij} \simeq U_{ji}$.

(3.2.10) Remarques à propos des recollements.

(3.2.10.1) Si (X_i) est une famille d'espaces annelés, leur somme disjointe est la colimite du diagramme $\mathcal{D} = ((X_i), \emptyset)$. Les flèches de $\mathcal{D}$ sont toutes des immersions ouvertes (puisque'il n'a pas de flèches!) et il est immédiat que $\mathcal{D}$ est simplement connexe. On est donc dans un cas particulier de la situation générale étudiée aux 3.2.9 *et sq.*, avec $U_{ij} = \emptyset$ dès que $i \neq j$. Les conclusions de 3.2.9.5 s'appliquent par conséquent ici (la somme disjointe est en quelque sorte un recollement sans conditions de recollement!), mais il n'y a évidemment pas besoin de faire appel à tout ce formalisme pour décrire $\coprod X_i$, ce que nous avons fait d'emblée en 3.2.8.

(3.2.10.2) Soit X l'espace topologique $\mathbb{R}$ muni du faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, et soit φ l'homéomorphisme $x \mapsto -x$ de X . On fait de φ un isomorphisme d'espaces annelés en posant $\varphi^* f = f \circ \varphi$ pour toute section f de $\mathcal{O}_X$. Toutes les flèches du diagramme $\mathcal{D} = (\{X\}, \{\varphi\})$ sont alors des immersions ouvertes, mais si Y désigne sa colimite la flèche structurale $\lambda: X \rightarrow Y$ n'est pas une immersion ouverte (et $\mathcal{D}$ n'est donc pas simplement connexe). En effet, on vérifie immédiatement à l'aide de la description générale des colimites (3.2.7.1 et 3.2.7.2) que λ identifie topologiquement Y au quotient de X par l'action de $\{\text{Id}_X, -\text{Id}_X\}$, c'est-à-dire à $\mathbb{R}_+$ (et que $\mathcal{O}_Y(U)$ est pour tout ouvert U de Y l'anneau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ paires sur $\lambda^{-1}(U)$).

(3.2.11) Soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans la catégorie des espaces annelés. Nous avons décrit aux 3.2.9 *et sq.* la colimite de $\mathcal{D}$ comme un recollement des X_i lorsque les E_{ij} sont constitués d'immersions ouvertes et que $\mathcal{D}$ est simplement connexe au sens de 3.2.9.3. Nous allons donner un critère qui permet de s'assurer de cette dernière propriété; il peut sembler délicat à mettre en œuvre, puisqu'il requiert essentiellement de *deviner* ce que vont être les ouverts U_{ij} et les morphismes g_{ij} (ou plus précisément leur germe en tout point), mais nous verrons qu'en pratique il est exploitable.

On suppose que chaque ensemble E_{ij} comprend au plus un élément qui est le cas échéant noté f_{ij} et est une immersion ouverte, et qu'il existe pour tout couple (i, j) d'indices un ouvert U_{ij} de X_i et, pour tout $x \in U_{ij}$, un germe $\gamma_{ij,x}$ d'immersion ouverte d'un voisinage de x vers X_j , de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites pour tout (i, j, k) :

- (a) $U_{ii} = X_i$ et $\gamma_{ii,x} = \text{Id}_{X_i,x}$ pour tout $x \in X_i$;
- (b) si E_{ij} est non vide alors $U_{ij} = X_i$ et $\gamma_{ij,x} = f_{ij,x}$ pour tout $x \in X_i$;
- (c) si $x \in U_{ij}$ alors $y := \gamma_{ij,x}(x)$ appartient à U_{ji} et $\gamma_{ji,y} = \gamma_{ij,x}^{-1}$ (ce qui a un sens car une immersion ouverte induit un isomorphisme de sa source sur un ouvert de son but, si bien que son germe en tout point est inversible) ;
- (d) si $x \in U_{ij}$ et si $x' := \gamma_{ij,x}(x)$ appartient à U_{jk} alors x appartient à U_{ik} et $\gamma_{ik,x} = \gamma_{jk,x'} \circ \gamma_{ij,x}$;
- (e) pour tout $x \in U_{ij}$ le germe $\gamma_{ij,x}$ est composé d'un nombre fini de germes de la forme $f_{k\ell,z}$ ou $f_{k\ell,z}^{-1}$.

Sous ces conditions, les E_{ij} sont constitués d'immersions ouvertes par hypothèse, et $\mathcal{D}$ est simplement connexe : si i et j sont deux indices et si c est une chaîne reliant un point x de X_i à un point de X_j il découle en effet de (b), (c) et (d) que $x \in U_{ij}$ et que l'immersion ouverte g_c de 3.2.9.2 a pour germe $\gamma_{ij,x}$ en x , germe qui ne dépend pas de c .

Remarquons que la condition (e) assure que l'ouvert U_{ij} est précisément l'ensemble des points de X_i en relation avec un point de X_j , et que l'isomorphisme $g_{ij}: U_{ij} \simeq U_{ji}$ construit en 3.2.9.3 est caractérisé par le fait que son germe en tout $x \in U_{ij}$ est égal à $\gamma_{ij,x}$.

(3.2.12) Recollement d'espaces annelés : un premier exemple.

Soit I un ensemble ordonné et soit $\mathcal{D}$ un diagramme commutatif induit par un foncteur de I dans la catégorie des espaces annelés (1.6.11.1). Pour tout indice i appartenant à I on note X_i l'objet correspondant de $\mathcal{D}$; pour tout couple $(i, j) \in I^2$ avec $i \leq j$, on note f_{ij} la flèche $X_i \rightarrow X_j$ de $\mathcal{D}$. Nous faisons les hypothèses suivantes :

- (i) les f_{ij} sont toutes des immersions ouvertes ;
- (ii) pour tout $(i, j) \in I$ et tout ℓ majorant i et j , l'ouvert $f_{i\ell}(X_i) \cap f_{j\ell}(X_j)$ de X_ℓ est la réunion des $f_{\alpha\ell}(X_\alpha)$ pour α minorant i et j .

Soit X la colimite de $\mathcal{D}$; on notera $\lambda_i: X_i \rightarrow X$ les flèches structurales (pour i variable). Nous allons vérifier au 3.2.12.1 ci-dessous que $\mathcal{D}$ est simplement connexe, en utilisant le critère énoncé en 3.2.11. Cela conduira à la description de colim $\mathcal{D}$ comme recollement des X_i (3.2.12.2) ; on pourra en première lecture se contenter de cette description, qui est tout de dont nous aurons besoin en pratique pour travailler avec ce type de recollement.

(3.2.12.1) Vérification du critère 3.2.11. Soient i et j dans I . On note U_{ij} la réunion des ouverts $f_{ai}(X_a)$ pour a minorant i et j .

Soit x un point de X_i appartenant à U_{ij} . Choisissons un minorant a de i et j tel que $x \in f_{ai}(X_a)$, et soit y l'antécédent de x sur X_a . Le germe $f_{aj,y} \circ f_{ai,y}^{-1}$ d'immersion ouverte en x (de but V_j) ne dépend alors pas de a . En effet, soit b un (autre) minorant de i et j tel que x soit l'image d'un élément z de X_{bj} . Il existe alors un indice c minorant a et b tel que x soit l'image d'un élément t de X_c (qui est donc aussi un antécédent de z et y). On a alors

$$f_{cj,t} \circ f_{ci,t}^{-1} = f_{aj,y} \circ f_{ca,t} \circ f_{ca,t}^{-1} \circ f_{ai,y}^{-1}$$

$$= f_{aj,y} \circ f_{ai,y}^{-1}$$

et de même $f_{cj,t} \circ f_{ci,t}^{-1} = f_{bj,z} \circ f_{bi,z}^{-1}$ puisque (a, y) et (b, z) jouent exactement le même rôle, d'où notre assertion. Il est donc licite de noter ce germe $\gamma_{ij,x}$. Si x' désigne l'image de y sur X_j il résulte des définitions que $\gamma_{ij,x}(x) = x'$, que $x' \in V_{ji}$ et que $\gamma_{ji,x'} = \gamma_{ij,x}^{-1}$. Notons par ailleurs que si $i \leq j$ alors i minore à la fois i et j , d'où l'on déduit que $U_{ij} = X_i$ et $\gamma_{ij,x} = f_{ij,x}$ pour tout $x \in X_i$. En particulier $U_{ii} = X_i$ et $\gamma_{ii,x} = \text{Id}_{X_i,x}$ pour tout $x \in X_i$.

Soit k un indice tel que $x' \in U_{jk}$. Il existe alors b minorant j et k tel que x' provienne de X_b . Comme x' provient aussi de X_a , il existe c minorant a et b tel que x' provienne de X_c . Quitte à remplacer a et b par c on peut alors supposer que a minore i, j et k . Il s'ensuit que $x \in U_{ik}$, et l'on a

$$\gamma_{ik,x} = f_{ak,y} \circ f_{ai,x}^{-1} = f_{ak,y} \circ f_{aj,y}^{-1} \circ f_{aj,y} \circ f_{ai,y}^{-1} = \gamma_{jk,x'} \circ \gamma_{ij,x}.$$

(3.2.12.2) Le critère énoncé en 3.2.11 est donc satisfait. Le diagramme $\mathcal{D}$ est par conséquent simplement connexe, et on peut dès lors appliquer les conclusions générales de 3.2.9.5. Déclinées dans notre cas particulier, elles se résument comme suit, en remarquant que pour tout couple d'indices (i, j) avec $i \leq j$ on a $\lambda_i = \lambda_j \circ f_{ij}$, si bien que $\lambda_i(X_i) = \lambda_j(f_{ij}(X_i)) \subset \lambda_j(X_j)$.

- ◇ Pour tout i , la flèche canonique $\lambda_i: X_i \rightarrow X$ est une immersion ouverte, et X est la réunion des $\lambda_i(X_i)$.
- ◇ Soient i et j deux indices. L'intersection $\lambda_i(X_i) \cap \lambda_j(X_j)$ est la réunion des $\lambda_\alpha(X_\alpha)$ pour α minorant i et j .

On dit que X est l'espace annelé obtenu en *recollant les X_i le long des f_{ij}* .

(3.2.13) Recollement d'espaces annelés : un deuxième exemple. Soit I un ensemble (quelconque) d'indices. Pour tout i , soit X_i un espace annelé. Pour tout couple (i, j) d'éléments de I avec $i \neq j$ on se donne un ouvert (X_{ij}) de X_i et un isomorphisme $\iota_{ij}: X_{ij} \simeq X_{ji}$. On suppose que les ι_{ij} satisfont les conditions suivantes :

- (i) $\iota_{ij} = \iota_{ji}^{-1}$ pour tout (i, j) avec $i \neq j$;
- (ii) si (i, j, k) sont trois indices deux à deux distincts alors

$$\iota_{ij}(X_{ik} \cap X_{ij}) = X_{ji} \cap X_{jk}$$

et

$$\iota_{jk} \circ \iota_{ij} = \iota_{ik},$$

les deux membres étant vus comme des isomorphismes de $X_{ij} \cap X_{ik}$ sur $X_{ki} \cap X_{kj}$.

Soit $\mathcal{D}$ le diagramme dont les objets sont les X_i et les X_{ij} , et dont les flèches sont les isomorphismes ι_{ij} et les immersions ouvertes $X_{ij} \hookrightarrow X_i$. Soit X la colimite de $\mathcal{D}$; on notera $\lambda_i: X_i \rightarrow X$ et $\lambda_{ij}: X_{ij} \rightarrow X$ les flèches structurales (pour i et j variables).

Nous allons vérifier au 3.2.13.1 ci-dessous que $\mathcal{D}$ est simplement connexe, en utilisant le critère énoncé en 3.2.11. Cela conduira à la description de X comme recollement des X_i (3.2.13.2); on pourra en première lecture se contenter de cette description, qui est tout de dont nous aurons besoin en pratique pour travailler avec ce type de recollement.

(3.2.13.1) *Vérification du critère 3.2.11.* Donnons-nous deux indices a et b , chacun d'eux étant ou bien un élément de I , ou bien un couple de deux éléments distincts de I . Nous allons définir des ouverts U_{ab} et des germes $\gamma_{ab,x}$ en distinguant différents cas.

- ◇ si $a = b$ alors $U_{aa} = X_a$ et $\gamma_{aa,x} = \text{Id}_{X_a,x}$ pour tout $x \in X_a$;
- ◇ si $a = i$ et $b = j$, où i et j sont deux éléments distincts de I , alors $U_{ab} = X_{ij}$ et $\gamma_{ab,x}$ est le germe en x de ι_{ij} (composé avec l'inclusion de X_{ji} dans X_j) pour tout $x \in X_{ij}$;
- ◇ si $a = i$ et $b = (i, j)$ avec $j \neq i$ alors $U_{ab} = X_{ij}$ et $\gamma_{ab,x}$ est le germe en x de $\text{Id}_{X_{ij}}$ pour tout $x \in X_{ij}$;
- ◇ si $a = i$ et $b = (j, k)$ avec $j \neq i$ et $k \neq j$ (mais éventuellement $k = i$) alors $U_{ab} = \iota_{ij}^{-1}(X_{ji} \cap X_{jk})$, et $\gamma_{ab,x}$ est pour tout $x \in U_{ab}$ le germe de ι_{ij} ;
- ◇ si $a = (i, j)$ avec $i \neq j$ et si b est quelconque, on pose $U_{ab} = U_{ib} \cap X_{ij}$, et pour tout $x \in U_{ab}$ on pose $\gamma_{ab,x} = \gamma_{ib,x}$ (l'ouvert U_{ib} et le germe $\gamma_{ib,x}$ sont bien définis car ils relèvent de l'un des cas précédemment traités).

Les conditions (a), (b), (c), (d) et (e) de 3.2.11 sont alors satisfaites : cela découle directement des définitions pour (a), (b) et (e), et pour (c) et (d) cela découle respectivement des conditions (i) et (ii) de 3.2.13.

(3.2.13.2) Le critère énoncé en 3.2.11 est donc satisfait. Le diagramme $\mathcal{D}$ est par conséquent simplement connexe, et on peut dès lors appliquer les conclusions générales de 3.2.9.5. Déclinées dans notre cas particulier, elles se résument comme suit, en remarquant que λ_{ij} est pour tout (i, j) la composée de λ_i et de l'immersion ouverte $X_{ij} \hookrightarrow X_i$, si bien que $\lambda_{ij}(X_{ij}) = \lambda_i(X_{ij}) \subset \lambda_i(X_i)$.

- ◇ Pour tout i , la flèche canonique $\lambda_i: X_i \rightarrow X$ est une immersion ouverte, et X est la réunion des $\lambda_i(X_i)$.
- ◇ Soient i et j deux indices avec $i \neq j$. On a

$$\lambda_i(X_i) \cap \lambda_j(X_j) = \lambda_i(X_{ij}) = \lambda_j(X_{ji})$$

et

$$\lambda_i|_{X_{ij}} = \lambda_j|_{X_{ji}} \circ \iota_{ij} \text{ et } \lambda_j|_{X_{ji}} = \lambda_i|_{X_{ij}} \circ \iota_{ji}.$$

On dit que X est l'espace annelé obtenu en *recollant les X_i le long des ι_{ij}* .

Les $\mathcal{O}_X$ -modules

(3.2.14) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{M}$ est un faisceau en groupes abéliens $\mathcal{M}$ sur X muni, pour tout ouvert U de X , d'une loi externe $\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$ qui fait du groupe abélien $\mathcal{M}(U)$ un $\mathcal{O}_X(U)$ -module, ces données étant sujettes à la condition suivante : pour tout ouvert U de X , tout ouvert V de U , toute section $s \in \mathcal{M}(U)$ et toute $f \in \mathcal{O}_X(U)$, on a

$$(fs)|_V = (f|_V)(s|_V).$$

Un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules est un morphisme de faisceaux en groupes qui est $\mathcal{O}_X$ -linéaire en un sens évident.

(3.2.15) Donnons un premier exemple venu de la géométrie différentielle : si $(X, \mathcal{O}_X)$ est une variété différentielle munie de son faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$,

alors le faisceau des champs de vecteurs, qui associe à un ouvert U de X les sections du fibré tangent de X au-dessus de U (ou, de façon équivalente, les dérivations de la $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathcal{O}_X(U)$) est de manière naturelle un $\mathcal{O}_X$ -module.

(3.2.16) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. Pour tout x appartenant à X , la fibre $\mathcal{M}_x$ hérite d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_{X,x}$ -module.

(3.2.17) Faisceautisation d'opérations usuelles sur les modules. Les notions usuelles en théorie des modules se faisceautisent souvent, donnant ainsi lieu à des notions analogues en théorie des $\mathcal{O}_X$ -modules. Donnons quelques exemples; on fixe un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$.

(3.2.17.1) Limites et colimites. Soit $\mathcal{D}$ un diagramme dans $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$; pour tout U , notons $\mathcal{D}(U)$ le diagramme de $\mathcal{O}_X(U)\text{-Mod}$ obtenu par évaluation en U des constituants de $\mathcal{D}$.

Il admet une limite et une colimite, construites comme à la section précédente : le préfaisceau $U \mapsto \lim \mathcal{D}(U)$ est naturellement un faisceau, admettant une structure évidente de $\mathcal{O}_X$ -module, et il s'identifie à $\lim \mathcal{D}$; le préfaisceau $U \mapsto \text{colim } \mathcal{D}(U)$ n'est quant à lui en général pas un faisceau, mais quand on le faisceautise on obtient un $\mathcal{O}_X$ -module qui s'identifie à $\text{colim } \mathcal{D}$.

Il peut arriver que pour certaines colimites l'opération de faisceautisation ne soit pas nécessaire : on vérifie par exemple que la somme directe préfaisceautique d'une famille finie de $\mathcal{O}_X$ -modules est déjà un faisceau.

(3.2.17.2) Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{O}_X$ -modules. Le préfaisceau

$$U \mapsto \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)$$

n'est pas un faisceau en général; son faisceautisé est noté $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$, et hérite d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$ -module.

Le lecteur établira sans la moindre difficulté les faits suivants (en raisonnant ouvert par ouvert, et en appliquant la propriété universelle du faisceautisé). On dispose d'un morphisme bi- $\mathcal{O}_X$ -linéaire canonique de $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ dans $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$, notée $(f, g) \mapsto f \otimes g$; pour tout $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{P}$ et tout morphisme bi- $\mathcal{O}_X$ -linéaire $b: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$, il existe une unique application $\mathcal{O}_X$ -linéaire $\ell: \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ telle que $\ell(f \otimes g) = b(f, g)$ pour tout (f, g) .

(3.2.17.3) Soit n un entier. Le préfaisceau $U \mapsto \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U)^n$ est un faisceau, qui s'identifie à $\mathcal{M}^n$; le produit tensoriel $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^n$ s'obtient donc directement, sans faisceautisation, et est naturellement isomorphe à $\mathcal{M}^n$.

(3.2.17.4) On a pour tout $x \in X$ un isomorphisme canonique

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})_x \simeq \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{N}_x.$$

Pour s'en convaincre, on peut ou bien procéder «à la main» à l'aide des constructions explicites de la colimite filtrante et du produit tensoriel, ou bien remarquer que les deux $\mathcal{O}_{X,x}$ -modules en jeu représentent le même foncteur covariant, à savoir celui qui envoie un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module P sur

$$\lim \text{Bil}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{M}(U) \times \mathcal{N}(U), P)$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x .

(3.2.17.5) Une $\mathcal{O}_X$ -algèbre $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux sur X muni d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{A}$. Une $\mathcal{O}_X$ -algèbre hérite d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$ -module.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux $\mathcal{O}_X$ -algèbres, un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -algèbres de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ est un morphisme de faisceau d'anneaux de $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \uparrow & \nearrow & \\ \mathcal{O}_X & & \end{array} .$$

Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_X$ -algèbre et si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{A}$ -module, $\mathcal{N}$ hérite *via* la flèche $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{A}$ d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$ -module. On dit que cette structure est obtenue par *restriction des scalaires* de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{O}_X$.

Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_X$ -algèbre et si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module, le produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ hérite d'une structure naturelle de $\mathcal{A}$ -module; on dit que le $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ est déduit de $\mathcal{M}$ par *extension des scalaires* de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{O}_X$. Nous vous laissons en exercice la démonstration du fait suivant : l'extension des scalaires de $\mathcal{O}_X$ à $\mathcal{A}$ est l'adjoint à gauche de la restriction des scalaires de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{O}_X$.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux $\mathcal{O}_X$ -algèbres, leur produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}$ est de manière naturelle une $\mathcal{O}_X$ -algèbre; nous vous invitons à prouver que $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}$ est la somme disjointe de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -algèbres.

(3.2.18) Fonctorialité. Soit $\varphi : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'espaces annelés. Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_Y$ -module et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -module.

(3.2.18.1) La structure de $\mathcal{O}_Y$ -module sur $\mathcal{N}$ induit de manière naturelle une structure de $\varphi_* \mathcal{O}_Y$ -module sur $\varphi_* \mathcal{N}$. Le morphisme φ est par définition fourni avec un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Y$, par le biais duquel le $\varphi_* \mathcal{O}_Y$ -module $\varphi_* \mathcal{N}$ peut être vu comme un $\mathcal{O}_X$ -module.

(3.2.18.2) Les choses se passent un peu moins bien concernant le foncteur φ^{-1} : le faisceau $\varphi^{-1} \mathcal{M}$ hérite d'une structure naturelle de $\varphi^{-1}(\mathcal{O}_X)$ -module, mais la flèche $\varphi^{-1}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_Y$ va dans le mauvais sens et ne permet pas de faire de $\varphi^{-1} \mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_Y$ -module. Elle permet par contre de le *transformer* de manière universelle en un $\mathcal{O}_Y$ -module, par tensorisation; le $\mathcal{O}_Y$ -module $\mathcal{O}_Y \otimes_{\varphi^{-1} \mathcal{O}_X} \varphi^{-1} \mathcal{M}$ ainsi obtenu est noté $\varphi^* \mathcal{M}$. Si V est un ouvert de Y , si U est un ouvert de X contenant $f(V)$ et si m est une section de $\mathcal{M}$ sur U nous noterons $\varphi^* m$ l'image de $1 \otimes \varphi^{-1}(m)$ dans $\varphi^* \mathcal{M}(V)$.

Si $y \in Y$ et si x désigne son image sur X , il existe un isomorphisme naturel $(\varphi^* \mathcal{M})_y \simeq \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}_x$: on le voit en combinant le bon comportement vis-à-vis des fibres de φ^{-1} (3.1.33.2) et du produit tensoriel (3.2.17.4).

(3.2.18.3) On vérifie que φ_* est de façon naturelle un foncteur de la catégorie des $\mathcal{O}_Y$ -Mod vers $\mathcal{O}_X$ -Mod, et que φ^* est de façon naturelle un foncteur de la catégorie de $\mathcal{O}_X$ -Mod vers $\mathcal{O}_Y$ -Mod.

(3.2.18.4) Si Z est un espace annelé et $\psi : Z \rightarrow Y$ un morphisme, on dispose d'isomorphismes naturels de foncteurs

$$(\varphi \circ \psi)_* \simeq \varphi_* \circ \psi_* \text{ et } (\varphi \circ \psi)^* \simeq \psi^* \circ \varphi^*.$$

C'est en effet évident pour les images directes ; et en ce qui concerne les images réciproques, les définitions fournissent un morphisme de $(f \circ g)^*$ vers $g^* \circ f^*$, dont on vérifie sur les fibres que c'est un isomorphisme.

(3.2.18.5) Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{O}_X$ -modules ; on a un isomorphisme naturel

$$\varphi^* \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \varphi^* \mathcal{N} \simeq \varphi^* (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}).$$

En effet, les définitions fournissent un morphisme naturel du terme de gauche vers celui de droite, et l'on vérifie sur les fibres que c'est un isomorphisme.

(3.2.18.6) Le couple (φ^*, φ_*) est un couple de foncteurs adjoints : c'est une conséquence formelle des propriétés d'adjonction du couple $(\varphi^{-1}, \varphi_*)$, et du couple formé de l'extension des scalaires et de la restriction des scalaires (faisceautiques).

(3.2.18.7) Il résulte immédiatement de la définition que $\varphi^* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. Par ailleurs, comme φ^* a un adjoint à droite, il commute aux colimites et en particulier aux sommes directes quelconques (le lecteur pourra le vérifier directement). En particulier, $\varphi^*(\mathcal{O}_X^n) = \mathcal{O}_Y^n$ pour tout entier n .

(3.2.19) Le faisceau des homomorphismes. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux $\mathcal{O}_X$ -modules, on vérifie immédiatement que

$$U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

est un faisceau, qui possède lui-même une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$ -module ; on le note $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Le faisceau $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ sera également noté $\underline{\text{End}} \mathcal{F}$; il a une structure naturelle (via la composition des endomorphismes ouvert par ouvert) de $\mathcal{O}_X$ -algèbre *non commutative en général*.

(3.2.19.1) La flèche $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mapsto \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est de manière naturelle un foncteur covariant en $\mathcal{G}$ et un foncteur contravariant en $\mathcal{F}$.

(3.2.19.2) Exemple. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module et soit $n \in \mathbb{N}$. Soit U un ouvert de X et soient $e_1, \dots, e_n$ des sections de $\mathcal{F}$ sur U . La formule

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum a_i e_i$$

définit un morphisme de $\mathcal{O}_U$ -modules de $\mathcal{O}_U^n$ vers $\mathcal{F}|_U$, que l'on dira *induit par les e_i* . Réciproquement, tout morphisme φ de $\mathcal{O}_U$ -modules de $\mathcal{O}_U^n$ vers $\mathcal{F}|_U$ est de cette forme : prendre $e_i = \varphi(\underbrace{0, \dots, 1, \dots, 0}_{\text{le 1 est à la place } i})$.

En faisant varier U dans cette construction, on obtient un isomorphisme canonique $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}^n$. En particulier, $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X^m) \simeq \mathcal{O}_X^{nm}$ pour tout m .

(3.2.19.3) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. À toute section f de $\mathcal{O}_X$ sur un ouvert U de X est associée de manière naturelle un endomorphisme de $\mathcal{F}|_U$, à savoir *l'homothétie de rapport f* , donnée par la formule $s \mapsto fs$.

En faisant varier U dans cette construction, on obtient un morphisme canonique de $\mathcal{O}_X$ -algèbres $\mathcal{O}_X \rightarrow \underline{\text{End}} \mathcal{F}$. Lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, ce morphisme est un isomorphisme en vertu de 3.2.19.2.

(3.2.20) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. On note $\mathcal{F}^\vee$ le $\mathcal{O}_X$ -module $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$, que l'on appelle aussi le *dual* de $\mathcal{F}$.

(3.2.20.1) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. Soit U un ouvert de X et soit $s \in \mathcal{F}(U)$. La section s définit de manière naturelle un morphisme de $\mathcal{F}^\vee|_U$ vers $\mathcal{O}_U$, donné par la formule $\varphi \mapsto \varphi(s)$.

En faisant varier U dans cette construction, on obtient un morphisme canonique de $\mathcal{F}$ dans son bidual $\mathcal{F}^{\vee\vee}$.

On vérifie immédiatement à l'aide de 3.2.19.2 que $\mathcal{O}_X^n \rightarrow (\mathcal{O}_X^n)^{\vee\vee}$ est un isomorphisme pour tout n .

(3.2.20.2) Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{O}_X$ -modules. Soit U un ouvert de X , soit φ appartenant à $\mathcal{F}^\vee(U)$ et soit $s \in \mathcal{G}(U)$. Le couple (φ, s) définit un morphisme de $\mathcal{F}|_U$ vers $\mathcal{G}|_U$, donné par la formule $t \mapsto \varphi(t)s$.

En faisant varier U dans cette construction, on obtient un morphisme bi- $\mathcal{O}_X$ -linéaire de $\mathcal{F}^\vee \times \mathcal{G}$ vers $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, qui induit un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules de $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ vers $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

(3.2.20.3) Soient n et m deux entiers. En vertu de 3.2.19.2, la flèche naturelle

$$(\mathcal{O}_X^n)^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X^m(U) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_U^n, \mathcal{O}_U^m)$$

est un isomorphisme pour tout ouvert U de X . En conséquence,

$$(\mathcal{O}_X^n)^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^m \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X^m)$$

est un isomorphisme.

(3.2.21) Exercice. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. Montrez que $\mathcal{H} \mapsto \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ est adjoint à droite à $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.

3.3 Espaces localement annelés

Définition, exemples, premières propriétés

(3.3.1) Définition. On appelle *espace localement annelé* un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit pour tout $x \in X$ un anneau local.

(3.3.2) Exemples.

(3.3.2.1) Le cas des faisceaux de fonctions. Soit k un corps, soit X un espace topologique, et soit $\mathcal{O}_X$ un sous-faisceau de k -algèbres du faisceau de toutes les fonctions de X vers k (en particulier, $\mathcal{O}_X$ contient les fonctions constantes). Supposons que $\mathcal{O}_X$ possède la propriété suivante : *pour tout ouvert U de X et tout $x \in U$, une fonction $f \in \mathcal{O}_X(U)$ telle que $f(x) \neq 0$ admet un inverse dans $\mathcal{O}_X(V)$ pour un certain voisinage ouvert V de x dans U .*

Sous ces hypothèses, $(X, \mathcal{O}_X)$ est localement annelé ; pour tout $x \in X$, l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ est le noyau de la surjection $x \mapsto f(x)$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ sur k .

La preuve est *mutatis mutandis* celle donnée au 2.2.11 lorsque $k = \mathbb{R}$ et lorsque $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, mais l'assertion plus générale que nous présentons ici s'applique dans bien d'autres cas intéressants :

- le corps k est égal à $\mathbb{R}$, l'espace X est une variété différentielle et $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X ;
- le corps k est égal à $\mathbb{C}$, l'espace X est une variété analytique complexe et $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur X ;
- le corps k est algébriquement clos, X est une variété algébrique sur k au sens des articles FAC et GAGA de Serre (qui est aussi celui adopté par Perrin dans son cours de géométrie algébrique), et $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions régulières sur X .

(3.3.2.2) Stabilité par restriction à un ouvert. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace localement annelé, et soit U un ouvert de X . L'espace annelé $(U, \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U)$ est localement annelé : cela provient du fait que l'on a pour tout $x \in U$ l'égalité $\mathcal{O}_{U,x} = \mathcal{O}_{X,x}$.

(3.3.3) Une caractérisation des espaces localement annelés. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Il est localement annelé si et seulement si pour tout $x \in X$ l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est local, c'est-à-dire si et seulement si l'ensemble des éléments non inversibles de $\mathcal{O}_{X,x}$ en est un idéal ; notons que comme cet ensemble est visiblement stable par multiplication externe, il suffit pour que ce soit un idéal qu'il contienne 0 et qu'il soit stable par somme.

Or on sait que si U est un ouvert de X , si $f \in \mathcal{O}_X(U)$ et si $x \in U$ alors l'image de f dans $\mathcal{O}_{X,x}$ est inversible si et seulement si x appartient à l'ouvert $D(f)$ (le plus grand ouvert de U en restriction auquel f est inversible, cf. 3.2.3.2).

Il s'ensuit que l'espace annelé X est localement annelé si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- ◊ $D(0) = \emptyset$;
- ◊ pour tout ouvert U de X et tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{O}_X(U)$, on a $D(f + g) \subset D(f) \cup D(g)$.

(3.3.4) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace localement annelé.

(3.3.4.1) Soit $x \in X$. Notons $\kappa(x)$ le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. On dit aussi que c'est le corps résiduel *du point* x , et l'on dispose d'une surjection canonique $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \kappa(x)$. Pour des raisons *psychologiques*, on choisit de noter cette surjection $f \mapsto f(x)$, et d'appeler ce morphisme «évaluation en x ». On a ainsi l'équivalence

$$f(x) \neq 0 \iff f \text{ est inversible dans } \mathcal{O}_{X,x}.$$

(3.3.4.2) Soit U un ouvert de X et soit $x \in U$. La flèche composée

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \kappa(x)$$

sera encore notée $f \mapsto f(x)$. Remarquons que si f est un élément inversible de $\mathcal{O}_X(U)$, son image $f(x)$ par le morphisme d'évaluation est un élément inversible du corps $\kappa(x)$, et est en particulier non nulle.

(3.3.4.3) Si $X = \emptyset$ on a $\mathcal{O}_X(X) = \{0\}$ puisque $\mathcal{O}_X$ est un faisceau. Supposons maintenant que X soit non vide, et soit $x \in X$. L'évaluation en x fournit un

morphisme de $\mathcal{O}_X(X)$ vers le corps $\kappa(x)$, ce qui force $\mathcal{O}_X(X)$ à être *non nul* : si 1 était nul dans $\mathcal{O}_X(X)$ on aurait $1(x) = 0$, c'est-à-dire $1 = 0$ dans $\kappa(x)$, ce qui est absurde.

(3.3.4.4) Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$. L'ouvert $D(f)$ (3.2.3.2) coïncide en vertu de 3.3.4.1 et de 3.2.3.3 avec l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$.

(3.3.5) Commentaires. On voit que le faisceau structural d'un espace localement annelé *quelconque* ressemble par certains aspects aux faisceaux de fonctions à valeurs dans un corps tels que décrits en 3.3.2.1 : ses sections peuvent être évaluées en tout point (le résultat vivant dans un corps), le lieu des points en lesquels une section ne s'annule pas est un ouvert, et une section est inversible si et seulement si elle ne s'annule pas.

Pour cette raison, on pense assez souvent aux sections du faisceau structural comme à des fonctions, et il arrive fréquemment d'ailleurs qu'on les qualifie (un peu abusivement) ainsi.

Nous attirons toute fois l'attention sur deux points importants qui montrent les limites de l'intuition «fonctionnelle» appliquée aux espaces localement annelés généraux.

(3.3.5.1) Premier point. Dans un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$, le corps $\kappa(x)$ dépend a priori de x . Dans la situation considérée au 3.3.2.1 il était constant mais en général, il peut effectivement varier.

Nous n'avons pas pour le moment d'exemple naturel (c'est-à-dire non construit exprès) d'espace localement annelé sur lequel cela se produit. Indiquons simplement que cela arrive fréquemment sur un schéma, et donnons en attendant un exemple «artificiel» très simple : on prend pour X un ensemble à deux éléments x et y , muni de la topologie discrète et du faisceau

$$\emptyset \mapsto \{0\}, \quad \{x\} \mapsto \mathbb{C}, \quad \{y\} \mapsto \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad \{x, y\} \mapsto \mathbb{C} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On vérifie immédiatement que X est un espace localement annelé, que $\kappa(x) = \mathbb{C}$ et que $\kappa(y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3.3.5.2) Second point. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace localement annelé, si U est un ouvert de X et si $f \in \mathcal{O}_X(U)$, il se peut que $f(x) = 0$ pour tout $x \in U$ sans que f soit nulle.

Par exemple, supposons que f soit nilpotente et non nulle. Dans ce cas, $f(x)$ est pour tout $x \in X$ un élément nilpotent d'un corps, et est donc trivial.

Nous allons donner un exemple très simple où une telle f existe. Fixons un corps k , et considérons un espace topologique singleton $\{x\}$. Se donne une structure d'espace localement annelé sur $\{x\}$ revient à choisir un anneau local. Soit $\mathcal{O}$ le quotient $k[T]/(T^2)$ et soit f la classe de T ; elle est non nulle.

L'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}$ est en bijection avec l'ensemble des idéaux premiers de $k[T]$ contenant (T^2) ; il n'y en a qu'un, à savoir (T) . L'anneau $\mathcal{O}$ est donc local, son unique idéal maximal est (f) , et son corps résiduel est $k[T]/(T) = k$.

On a ainsi bien défini une structure d'espace localement annelé sur x . Comme f est nilpotente, on a $f(x) = 0$. On pouvait d'ailleurs le voir directement ici, puisque l'évaluation en x est la réduction modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, c'est-à-dire justement modulo (f) . D'une manière générale, si g est un élément de $\mathcal{O}$,

il s'écrit $a + bf$, où a et b sont deux éléments uniquement déterminés de k , et on a alors $g(x) = a$.

(3.3.5.3) Commentaires. On peut se demander pourquoi autoriser ce genre d'horreurs, alors qu'on a fait en sorte, pour ce qui concerne la non-annulation, que les propriétés usuelles soient satisfaites. La raison est que la présence de «fonctions» nilpotentes non nulles peut avoir un sens géométrique profond, et c'est notamment le cas dans l'exemple que l'on vient de traiter.

En effet, considérons, dans le plan affine sur k en coordonnées S et T , la parabole P d'équation $T^2 = S$ et la droite D d'équation $S = 0$. Leur intersection naïve est le point x de coordonnées $(0, 0)$. En théorie des schémas, cette intersection est un peu plus riche que $\{x\}$: on garde en mémoire le corps de base et les équations, et l'intersection sera donc l'espace topologique $\{x\}$ muni du faisceau (ou de l'anneau, si l'on préfère) $k[S, T]/(S, T^2 - S) \simeq k[T]/T^2$: on retrouve l'espace localement annelé évoqué plus haut.

La présence de nilpotents non triviaux parmi les fonctions sur $P \cap D$ s'interprète intuitivement comme suit : l'intersection $P \cap D$ est égale au point x *infinitésimalement épaissi* parce que P et D sont tangentes en x ; le point d'intersection x est en quelque sorte double, et c'est cette multiplicité qui est codée algébriquement par l'existence de nilpotents non triviaux.

Cet exemple est significatif : c'est pour prendre en compte les multiplicités dans la théorie que Grothendieck a décidé d'admettre les «fonctions» nilpotentes non nulles. Cela se révèle un outil extraordinairement souple, mais il y a un prix à payer : il faut autoriser une «fonction» à s'annuler en tout point sans être globalement nulle. D'où le choix du formalisme abstrait des espaces localement annelés, qui mime en partie le point de vue fonctionnel classique, mais permet ce genre de fantaisies finalement très utiles.

(3.3.6) Digression algébrique. Soient A et B deux anneaux locaux d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$. Soit f un morphisme de A vers B . Si $a \in A$ et si $f(a) \in \mathfrak{n}$ alors $f(a)$ n'est pas inversible, et a n'est donc pas inversible non plus ; autrement dit, $a \in \mathfrak{m}$. On dit que f est *local* si la réciproque est vraie, c'est-à-dire si $f(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$, ou encore si $f^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$.

(3.3.7) Définition. Soient $(Y, \mathcal{O}_Y)$ et $(X, \mathcal{O}_X)$ deux espaces localement annelés. Un *morphisme d'espaces localement annelés* de $(Y, \mathcal{O}_Y)$ vers $(X, \mathcal{O}_X)$ est un morphisme φ d'espaces annelés tel que $\mathcal{O}_{X, \varphi(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$ soit pour tout $y \in Y$ un morphisme local.

(3.3.7.1) Nous allons récrire cette condition de façon plus suggestive. Soit y un point de Y . Dire que $\mathcal{O}_{X, \varphi(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$ est local signifie que si f est un élément de $\mathcal{O}_{X, \varphi(y)}$, alors f appartient à l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X, \varphi(y)}$ si et seulement si $f^* \varphi$ appartient à l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y, y}$. En termes plus imagés, cela se traduit par l'équivalence

$$f(\varphi(y)) = 0 \iff (\varphi^* f)(y) = 0.$$

(3.3.7.2) On peut reformuler ce qui précède en disant qu'un morphisme φ d'espaces annelés de Y vers X est un morphisme d'espaces localement annelés si et seulement si pour tout ouvert U de X et toute $f \in \mathcal{O}_X(U)$, l'image réciproque de l'ouvert $D(f) \subset U$ est égale à l'ouvert $D(\varphi^* f) \subset \varphi^{-1}(U)$ (rappelons qu'en général on a simplement $\varphi^{-1}(D(f)) \subset D(\varphi^* f)$).

(3.3.7.3) Exemples. Dans chacun des exemples classiques 3.2.5.1, 3.2.5.2 et 3.2.5.3, l'application φ^* est simplement $f \mapsto f \circ \varphi$: on a donc tautologiquement $(\varphi^*f)(y) = 0 \iff f(\varphi(y)) = 0$, et φ est dès lors à chaque fois un morphisme d'espaces localement annelés.

(3.3.7.4) Soit $\varphi : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'espaces localement annelés. On ne peut pas espérer que la formule $\varphi^*f = f \circ \varphi$ soit valable sans hypothèse supplémentaire : celle-ci n'a en effet simplement *aucun sens* en général, puisque $\mathcal{O}_X$ n'est pas nécessairement un faisceau de fonctions à valeurs dans un corps fixé, pour les deux raisons évoquées ci-dessus (3.3.5.1 et 3.3.5.2). Mais on va voir qu'elle est tout de même, d'une certaine manière, aussi valable qu'il est possible.

Soit y un point de Y . Comme φ est un morphisme d'espaces localement annelés, on a $f(\varphi(y)) = 0 \iff (\varphi^*f)(y) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{O}_{X, \varphi(y)}$. En conséquence, $\varphi^* : \mathcal{O}_{X, \varphi(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$ induit par passage au quotient un plongement $\kappa(\varphi(y)) \hookrightarrow \kappa(y)$, de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y, y} & \longrightarrow & \kappa(y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_{X, \varphi(y)} & \longrightarrow & \kappa(\varphi(y)) \end{array}$$

commute. Autrement dit, modulo le plongement de $\kappa(\varphi(y))$ dans $\kappa(y)$, on a pour toute $f \in \mathcal{O}_{X, \varphi(y)}$ l'égalité

$$(\varphi^*f)(y) = f(\varphi(y)).$$

Elle évoque irrésistiblement, comme annoncé, l'égalité $f^*\varphi = f \circ \varphi$; mais répétons qu'il serait illicite de la traduire ainsi puisque f ne peut pas en général s'interpréter comme une vraie fonction naïvement composable avec φ .

(3.3.7.5) Par contre, si k est un corps et si $\mathcal{O}_Y$ et $\mathcal{O}_X$ sont des faisceaux de fonctions à valeurs dans k comme dans 3.3.2.1, alors l'égalité ci-dessus signifie précisément que $\varphi^*f = f \circ \varphi$. Dans ce contexte, un morphisme d'espaces localement annelés est donc simplement une application continue $\varphi : Y \rightarrow X$ telle que la fonction $f \circ \varphi$ appartienne à $\mathcal{O}_Y$ pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{O}_X$, et φ^* est obligatoirement donné par la formule $\varphi^*f = f \circ \varphi$.

(3.3.7.6) Les espaces localement annelés constituent une sous-catégorie EspLocAnn de EspAnn , qui n'est pas pleine.

(3.3.8) Soit X un espace localement annelé et soit U un ouvert de X . L'immersion canonique d'espaces annelés $j : U \hookrightarrow X$ (cf. 3.2.5.4) est alors un morphisme d'espaces localement annelés (les morphismes induits au niveau des fibres sont des isomorphismes, car si $x \in U$ l'anneau local $\mathcal{O}_{U, x}$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_{X, x}$).

Si $\varphi : Y \rightarrow X$ est un morphisme d'espaces localement annelés tel que $\varphi(Y)$ soit contenu dans U , l'unique morphisme d'espaces annelés $\psi : Y \rightarrow U$ tel que $j \circ \psi = \varphi$ est en fait un morphisme d'espaces localement annelés (là encore parce que $\mathcal{O}_{U, x} = \mathcal{O}_{X, x}$ pour tout $x \in U$).

Autrement dit, dans la catégorie des espaces localement annelés, on observe le phénomène déjà constaté dans la catégorie des espaces annelés : toute factorisation *ensembliste* par un ouvert est automatiquement *morphique*.

Le morphisme ψ est le seul morphisme d'espaces localement annelés dont la composée avec j soit égale à φ (puisque c'est déjà le cas dans la catégorie des espaces annelés, cf. 3.2.5.4). Cela signifie que $((U, \mathcal{O}_U), j)$ représente le foncteur qui envoie un espace localement annelé $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sur

$$\{\varphi \in \text{Hom}_{\text{EspLocAnn}}((Y, \mathcal{O}_Y), (X, \mathcal{O}_X)), \quad \varphi(Y) \subset U\}.$$

(3.3.8.1) Un morphisme d'espaces localement annelés $\varphi: Y \rightarrow X$ est appelé une *immersion ouverte* s'il induit un isomorphisme entre Y et un ouvert de X .

(3.3.9) Soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans la catégorie des espaces localement annelés. Soit X sa colimite dans la catégorie des espaces annelés (elle est décrite en 3.2.7 et sq.); pour tout i , soit $\lambda_i: X_i \rightarrow X$ le morphisme structural.

(3.3.9.1) Soit U un ouvert de X et soit $g \in \mathcal{O}_X(U)$. Pour tout indice i , on pose $g_i = \lambda_i^* g \in \mathcal{O}_{X_i}(\lambda_i^{-1}(U))$. Comme les flèches du diagramme $\mathcal{D}$ sont des morphismes d'espaces localement annelés, on a $f^{-1}((D(g_j))) = D(g_i)$ pour tout (i, j) et toute $f \in E_{ij}$. Il existe donc un unique ouvert V de U tel que l'on ait $\lambda_i^{-1}(V) = D(g_i)$ quel que soit i (3.2.7.2). On a par ailleurs $g_i^{-1} = f^* g_j^{-1}$ pour tout (i, j) et toute $f \in E_{ij}$, où chaque g_i^{-1} est vue comme fonction sur $D(g_i)$; il existe donc d'après 3.2.7.2 une unique fonction $h \in \mathcal{O}_X(V)$ telle que $\lambda_i^* h = g_i^{-1}$ pour tout i ; on a alors $hg = 1$ dans $\mathcal{O}_X(V)$. Ainsi, g est inversible sur V , et il est clair là encore d'après 3.2.7.2 que V est le plus grand ouvert de X ayant cette propriété; autrement dit, $V = D(g)$.

(3.3.9.2) Les faits suivants résultent de ce qui précède et de la caractérisation des espaces localement annelés et des morphismes d'espaces localement annelés au moyen des ouverts de la forme $D(g)$ (3.3.3, 3.3.7.2) :

- ◇ l'espace X est localement annelé;
- ◇ les morphismes $\lambda_i: X_i \rightarrow X$ sont des morphismes d'espaces localement annelés;
- ◇ pour tout espace localement annelé Y et tout morphisme de $\mathcal{D}$ vers Y dans la catégorie des espaces localement annelés, le morphisme induit d'espaces annelés $X \rightarrow Y$ est en fait un morphisme d'espaces localement annelés.

Autrement dit, X est la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des espaces localement annelés.

(3.3.10) Nous verrons plus bas (5.1.24.4) que tout diagramme dans la catégorie des espaces localement annelés admet une limite, mais sa construction est plus compliquée.

(3.3.11) Exactement comme dans le cas des espaces annelés, on déduit de 3.3.8 que si X est un espace localement annelé et si U et V sont deux ouverts de X alors $U \cap V$ s'identifie au produit fibré $U \times_X V$.

Une conséquence géométrique du lemme de Nakayama

(3.3.12) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace localement annelé. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module, si $x \in X$ et si f est une section de $\mathcal{F}$ sur un voisinage ouvert U de x , on

se permettra, lorsque le contexte est clair, de noter encore f l'image f_x de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}_x$.

(3.3.13) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module, et soit $x \in X$. On désigne par $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Le $\kappa(x)$ -espace vectoriel $\kappa(x) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x$ sera plus simplement noté $\kappa(x) \otimes_x \mathcal{F}$. Si f est une section de $\mathcal{F}$ définie au voisinage de x , son image dans $\kappa(x) \otimes_x \mathcal{F}$ sera notée $f(x)$ (cette notation est compatible avec celle déjà utilisée lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$). L'application $f \mapsto f(x)$ induit par sa définition même une surjection de $\mathcal{F}_x$ vers $\kappa(x) \otimes_x \mathcal{F}$.

(3.3.14) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de sections de $\mathcal{F}$ sur X , et soit $\varphi : \mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{F}$ le morphisme induit. On dit que $(e_1, \dots, e_n)$ engendrent $\mathcal{F}$ si φ est surjectif. Ce signifie que le morphisme induit $\mathcal{O}_{X,x}^n \rightarrow \mathcal{F}_x$ est surjectif pour tout x , c'est-à-dire encore que les e_i engendrent le $\mathcal{O}_{X,x}$ -module $\mathcal{F}_x$ pour tout x . Si c'est le cas, les $e_i(x)$ engendrent pour tout x l'espace vectoriel $\kappa(x) \otimes_x \mathcal{F} = \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x$, qui est donc de dimension au plus n .

(3.3.15) Définition. Un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ est dit *localement de type fini* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x et une famille finie de sections de $\mathcal{F}$ sur U qui engendrent $\mathcal{F}|_U$.

Si c'est le cas, il résulte de 3.3.14 que $\kappa(x) \otimes_x \mathcal{F}$ est de dimension finie pour tout x .

(3.3.16) Proposition. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module localement de type fini, et soit x un point de X . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de sections de $\mathcal{F}$ sur un voisinage ouvert U de x . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) les $e_i(x)$ engendrent le $\kappa(x)$ -espace vectoriel $\kappa(x) \otimes \mathcal{F}_x$;
- ii) il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que les e_i engendrent $\mathcal{F}|_V$.

Démonstration. L'implication ii) $\Rightarrow$ i) a été vue au 3.3.14. Supposons maintenant que i) soit vraie. Les $e_i(x)$ engendrant $\kappa(x) \otimes_x \mathcal{F} = \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x$, le lemme de Nakayama assure que les e_i engendrent le $\mathcal{O}_{X,x}$ -module $\mathcal{F}_x$.

Par ailleurs, comme $\mathcal{F}$ est localement de type fini, il existe un voisinage ouvert V de x dans U , et une famille $(f_1, \dots, f_m)$ de sections de $\mathcal{F}$ sur V qui engendrent $\mathcal{F}|_V$.

Comme les e_i engendrent $\mathcal{F}_x$, il existe une famille (a_{ij}) d'éléments de $\mathcal{O}_{X,x}$ tels que $f_j = \sum_i a_{ij} e_i$ pour tout j . Quitte à restreindre V , on peut supposer que les a_{ij} sont définies sur V , et que l'égalité $f_j = \sum a_{ij} e_i$ vaut dans $\mathcal{F}(V)$.

Soit $y \in V$. L'égalité $f_j = \sum a_{ij} e_i$ vaut dans $\mathcal{F}_y$; ce dernier étant engendré par les f_j (puisqu'elle engendrent $\mathcal{F}|_V$), il est dès lors également engendré par les e_i . Ceci étant vrai pour tout $y \in V$, les e_i engendrent $\mathcal{F}|_V$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(3.3.16.1) Commentaires. L'étape cruciale de la preuve ci-dessus, celle durant laquelle «il se passe vraiment quelque chose», est l'utilisation du lemme de Nakayama pour garantir que les e_i engendrent $\mathcal{F}_x$; le reste n'est qu'une application directe de la définition des germes en x , couplée à un tout petit peu d'algèbre linéaire.

On peut donc considérer la proposition 3.3.16 comme une traduction géométrique du lemme de Nakayama, traduction qui se présente essentiellement

sous la forme d'un *passage du ponctuel au local* (pour le caractère générateur d'une famille finie de sections).

(3.3.16.2) Mentionnons un cas particulier important de la proposition 3.3.16, qui met particulièrement bien en lumière ce passage du ponctuel au local : l'espace vectoriel $\kappa(x) \otimes_x \mathcal{F}$ est nul si et seulement si il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que $\mathcal{F}|_V$ soit nul (appliquer la proposition à la famille vide de sections).

(3.3.17) Corollaire. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace localement annelé et soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module localement de type fini. La fonction

$$r : x \mapsto \dim_{\kappa(x)} \kappa(x) \otimes_x \mathcal{F}$$

est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que pour tout entier d , l'ensemble des points x de X tels que $r(x) \leq d$ est ouvert.

Démonstration. Soit x un point de X en lequel $r(x) \leq d$. Choisissons une famille $e_1, \dots, e_n$ de sections de $\mathcal{F}$, définies sur un voisinage ouvert U de x , et telles que les $e_i(x)$ forment une base de $\kappa(x) \otimes_x \mathcal{F}$. Comme $r(x) \leq d$, on a $n \leq d$. En vert de la proposition 3.3.16, il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que les e_i engendrent $\mathcal{F}|_V$; en conséquence, on a $r(y) \leq n \leq d$ pour tout $y \in V$ (3.3.14). $\square$

(3.3.17.1) Notons un cas particulier fondamental, dont l'énoncé peut apparaître contre-intuitif au premier abord : le sous-ensemble U de X formé des point x tels que $r(x) = 0$, c'est-à-dire encore tel que $\kappa(x) \otimes_x \mathcal{F} = \{0\}$, est un *ouvert*. Remarquons de surcroît que le faisceau $\mathcal{F}|_U$ a toutes ses fibres nulles d'après le cas particulier de la proposition 3.3.16 signalé au 3.3.16.2, et est donc lui-même nul.

(3.3.17.2) Un exemple. Soit X une variété différentielle munie du faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Soit $x \in X$ et soit U un ouvert de X . On note $\mathcal{I}(U)$ l'idéal de $\mathcal{O}_X(U)$ défini comme suit :

- si $x \in U$ alors $\mathcal{I}(U)$ est l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathcal{O}_X(U)$ et s'annulant en x ;
- si $x \notin U$ alors $\mathcal{I}(U) = \mathcal{O}_X(U)$.

Il est immédiat que $\mathcal{I}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$; soit $\mathcal{F}$ le quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$. Il est (localement) de type fini par construction; nous allons déterminer la fonction $r : y \mapsto \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \otimes_y \mathcal{F}$ (notez que $\kappa(y) = \mathbb{R}$ pour tout $y \in X$).

Soit i l'inclusion de $\{x\}$ dans X . Le faisceau $i_*\mathbb{R}$ envoie un ouvert U de X sur $\mathbb{R}$ si U contient x , et sur $\{0\}$ sinon (c'est un «faisceau gratte-ciel supporté en x »). Il hérite d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$ -module, définie comme suit : sur un ouvert U ne contenant pas x , il n'y a rien à faire; sur un ouvert U contenant x , on fait agir $\mathcal{O}_X(U)$ sur $i_*\mathbb{R}(U) = \mathbb{R}$ par la formule $(f, \lambda) \mapsto f(x)\lambda$.

On dispose d'une surjection $\mathcal{O}_X$ -linéaire naturelle de $\mathcal{O}_X$ sur $i_*\mathbb{R}$: là encore, sur un ouvert U ne contenant pas x , il n'y a rien à faire; et sur un ouvert U contenant x , on envoie une fonction $f \in \mathcal{O}_X(U)$ sur $f(x) \in \mathbb{R} = i_*\mathbb{R}(U)$. Par construction, le noyau de cette surjection est $\mathcal{I}$. En conséquence, $\mathcal{F} \simeq i_*\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\mathbb{R} \otimes_y \mathcal{F} = \{0\}$ si $y \neq x$, et que $\mathbb{R} \otimes_x \mathcal{F} = \mathbb{R}$; il vient

$$r(y) = 0 \text{ si } y \neq x \text{ et } r(x) = 1.$$

3.4 Faisceaux localement libres de rang 1

Définition, exemples, premières propriétés

(3.4.1) Soit X un espace localement annelé et soit n un entier. Un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ est dit *localement libre de rang fini* (resp. *de rang n*) si tout point de X possède un voisinage ouvert U tel que $\mathcal{F}|_U$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_U^m$ pour un certain entier m (resp. à $\mathcal{O}_U^n$).

(3.4.1.1) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang n . Il est dit *trivial* s'il est isomorphe à $\mathcal{O}_X^n$. On dira qu'une famille (U_i) d'ouverts de X *trivialise* $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}|_{U_i}$ est trivial pour tout i .

(3.4.1.2) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini sur X , et soit $x \in X$. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un entier m et un isomorphisme $\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{O}_U^m$. On a alors $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}^m$, et $\kappa(x) \otimes \mathcal{F} \simeq \kappa(x)^m$. L'entier m est ainsi uniquement déterminé : c'est le rang du module libre $\mathcal{F}_x$ sur l'anneau non nul $\mathcal{O}_{X,x}$, ou encore la dimension du $\kappa(x)$ -espace vectoriel $\kappa(x) \otimes \mathcal{F}$; on dit que m est le *rang de $\mathcal{F}$ en x* . Le rang de $\mathcal{F}$ en tout point de U est encore égal à m par définition ; le rang de $\mathcal{F}$ apparaît ainsi comme une *fonction localement constante* de X dans $\mathbb{N}$. Si X est connexe, cette fonction est nécessairement constante, et a donc une valeur bien définie si X est de surcroît non vide, valeur que l'on appelle encore le rang de $\mathcal{F}$.

(3.4.1.3) Soit $\psi: Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces localement annelés. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini (resp. de rang n) alors $\psi^*\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre de rang fini (resp. n) : c'est une conséquence immédiate de 3.2.18.7.

(3.4.2) Nous allons donner un premier exemple de $\mathcal{O}_X$ -module localement libre non trivial, dans le contexte de la géométrie analytique complexe – nous en rencontrerons d'autres plus loin en théorie des schémas.

Soit S la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, munie du faisceau $\mathcal{O}_S$ des fonctions holomorphes. Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_S$ le faisceau d'idéaux défini comme suit : si U est un ouvert de S ne contenant pas 0 (resp. contenant 0) alors $\mathcal{I}(U) = \mathcal{O}_S(U)$ (resp. $\mathcal{I}(U)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{O}_S(U)$ s'annulant en 0).

(3.4.2.1) Le $\mathcal{O}_S$ -module $\mathcal{I}$ est localement libre de rang 1. En effet, on a d'une part par définition $\mathcal{I}|_{S \setminus \{0\}} = \mathcal{O}_S|_{S \setminus \{0\}}$; et d'autre part, $f \mapsto zf$ définit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{I}|_{\mathbb{C}}$ (une fonction holomorphe au voisinage de l'origine s'y annule si et seulement si elle est multiple de z).

(3.4.2.2) Le $\mathcal{O}_S$ -module localement libre $\mathcal{I}$ n'est pas trivial. En effet, rappelons que les seules fonctions holomorphes définies sur S toute entière sont les constantes (c'est le «principe du maximum»). Autrement dit, on a $\mathcal{O}_S(S) = \mathbb{C}$, et $\mathcal{I}(S) = \{0\}$ (une fonction constante s'annule à l'origine si et seulement si elle est nulle !). Par conséquent, $\mathcal{I}$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{O}_S$.

(3.4.3) Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang fini.

(3.4.3.1) On déduit de 3.2.19.2 que le $\mathcal{O}_X$ -module $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est localement libre de rang fini et que son rang (comme fonction sur X , cf. *supra*) est égal au produit des rangs de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

En particulier, le dual $\mathcal{F}^\vee$ est localement libre de même rang que $\mathcal{F}$.

(3.4.3.2) Il est immédiat que le produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ est localement libre de rang égal au produit des rangs de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$: c'est une simple conséquence du fait que $(\mathcal{O}_X)^n \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X)^m \simeq \mathcal{O}_X^{nm}$.

On déduit par ailleurs de 3.2.20.3 que $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un isomorphisme, puisque cette propriété se teste localement.

(3.4.3.3) On déduit de même de 3.2.20.1 que $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme.

(3.4.4) Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1. Il résulte de 3.2.19.3 (toujours *via* un raisonnement local) que la flèche naturelle $\mathcal{O}_X \rightarrow \underline{\text{End}} \mathcal{L}$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -algèbres. En composant sa réciproque avec l'isomorphisme entre $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee$ et $\underline{\text{End}} \mathcal{L}$ fourni par 3.4.3.2, on obtient un isomorphisme

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee \simeq \mathcal{O}_X.$$

Il découle immédiatement des définitions des différentes flèches en jeu que cet isomorphisme est simplement donné par la formule

$$s \otimes \varphi \mapsto \varphi(s).$$

On peut bien entendu vérifier directement que celle-ci définit bien un isomorphisme : en raisonnant localement on se ramène au cas où $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, pour lequel c'est évident.

(3.4.5) Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang 1, le $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'$ est lui aussi localement libre de rang 1 d'après 3.4.3.2.

Le produit tensoriel induit de ce fait une loi de composition sur l'ensemble $\text{Pic } X$ des classes d'isomorphie de $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang 1. Elle est associative, commutative, et possède un élément neutre : la classe de $\mathcal{O}_X$. Il résulte de 3.4.4 que la classe $[\mathcal{L}]$ d'un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre $\mathcal{L}$ admet un symétrique, à savoir $[\mathcal{L}^\vee]$. En conséquence, $\text{Pic } X$ est un groupe abélien, appelé le *groupe de Picard* de l'espace localement annelé X .

Sections inversibles et trivialisations

(3.4.6) Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1. Si s est une section globale de $\mathcal{L}$, on note $D(s)$ l'ensemble des points x tels que $s(x) \neq 0$; cette notation est compatible avec celle déjà utilisée lorsque $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$. Notons que $D(s)$ est un ouvert de X : il suffit en effet de le vérifier localement, ce qui permet de supposer que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ auquel cas l'assertion est évidente.

(3.4.6.1) Soit $\mathcal{L}'$ un second $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1, et soient s et s' des sections globales respectives de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$. Le produit tensoriel $s \otimes s'$ est une section de $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'$, et l'on a $D(s \otimes s') = D(s) \cap D(s')$. En effet, comme la propriété est locale sur X , on peut supposer $\mathcal{L} = \mathcal{L}' = \mathcal{O}_X$. Comme le morphisme canonique

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X, f \otimes g \mapsto fg$$

est un isomorphisme, il en résulte que $D(s \otimes s') = D(ss') = D(s) \cap D(s')$, comme annoncé.

(3.4.6.2) Soit s une section globale de $\mathcal{L}$. Il existe un unique morphisme ℓ de $\mathcal{O}_X$ vers $\mathcal{L}$ qui envoie 1 sur s : celui donné par la formule $f \mapsto fs$. Nous allons montrer que ℓ est un isomorphisme si et seulement si $D(s) = X$; si c'est le cas, nous dirons que s est *inversible*.

Si ℓ est un isomorphisme, on a $D(s) = D(1) = X$. Réciproquement, supposons que $D(s) = X$. Pour montrer que ℓ est un isomorphisme, on peut raisonner localement et donc supposer que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$. Dans ce cas, s est une *fonction* inversible, et ℓ est donc bien un isomorphisme de réciproque $f \mapsto f/s$.

(3.4.6.3) La flèche $\ell \mapsto \ell(1)$ établit donc une bijection entre l'ensemble des isomorphismes de $\mathcal{O}_X$ vers $\mathcal{L}$ et l'ensemble des sections inversibles de $\mathcal{L}$. Si s est une telle section, l'isomorphisme qui lui correspond est $f \mapsto fs$, et sa réciproque sera notée $t \mapsto t/s$.

Soit s une section inversible de $\mathcal{L}$ et soit s' une section inversible de $\mathcal{L}'$. La section $s \otimes s'$ de $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'$ est inversible d'après 3.4.6.1. Si f et g sont deux sections de $\mathcal{O}_X$ (sur un ouvert de X) on a $fs \otimes gs' = fg(s \otimes s')$; il en résulte que si t et t' sont des sections respectives de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ alors

$$(t \otimes t') / (s \otimes s') = (t/s) \cdot (t'/s').$$

(3.4.6.4) Soit s une section inversible de $\mathcal{L}$ et soit s' une section de $\mathcal{L}'$. Il est immédiat qu'il existe un et un seul morphisme de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}'$ envoyant s sur s' , donné par la formule $t \mapsto (t/s)s'$. Ce morphisme est un isomorphisme si et seulement si s' est inversible. Cette condition est en effet clairement nécessaire, et si elle est satisfaite on vérifie aussitôt que $\tau \mapsto (\tau/s')s$ est un inverse à gauche et à droite du morphisme considéré.

(3.4.7) On peut penser à un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{L}$ localement libre de rang 1 comme à une famille d'espaces vectoriels de dimension 1 (celle des $\kappa(x) \otimes \mathcal{L}$ lorsque x parcourt X), les sections inversibles correspondant aux familles d'éléments non nuls, c'est-à-dire de bases.

(3.4.7.1) Un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1 n'admet pas nécessairement de section inversible (puisque'il n'est pas forcément trivial, cf. 3.4.2). Modulo l'interprétation donnée au 3.4.7, cela correspond au fait que si un espace vectoriel abstrait de dimension 1 sur un corps admet toujours une base, il n'en admet aucune qui soit canonique – et il n'y a donc en général aucune raison de pouvoir faire un choix «cohérent» de bases dans une famille de tels espaces vectoriels.

(3.4.7.2) Plusieurs faits mentionnés ci-dessus (3.4.6.1, 3.4.6.3) font apparaître une certaine parenté entre le produit tensoriel des sections de $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang 1 et le produit classique des fonctions. C'est, là encore, la déclinaison en famille d'un phénomène qui existe déjà au niveau des espaces vectoriels de dimension 1, que nous allons maintenant expliquer.

Soient L et L' deux espaces vectoriels de dimension 1 sur un corps k . Si l'on choisit une base de L et une base de L' , on obtient deux isomorphismes $L \simeq k$ et $L' \simeq k$, modulo lesquels il devient possible de multiplier un élément de L par un élément de L' (on obtient un scalaire). Cette opération est évidemment hautement non canonique : elle dépend de façon cruciale du choix des bases.

Pour «multiplier» les éléments de L par ceux de L' de manière intrinsèque, on utilise le produit tensoriel

$$\otimes: L \times L' \rightarrow L \otimes_k L'.$$

Il y a bien entendu un lien entre nos deux constructions d'un produit : si v est une base de L et v' une base de L' alors $v \otimes v'$ est une base de $L \otimes_k L'$; chacune de ces bases identifie l'espace vectoriel correspondant à k , et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L \times L' & \xrightarrow{(\lambda, \mu) \mapsto \lambda \otimes \mu} & L \otimes_k L' \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ (a, b) \mapsto (av, bv') & & a \mapsto av \otimes v' \\ k \times k & \xrightarrow{(a, b) \mapsto ab} & k \end{array}$$

commute.

Vous avez déjà maintes fois rencontré, probablement de façon implicite, ce genre de considérations en... physique. La mesure d'une grandeur y est en effet le plus souvent non un scalaire bien déterminé, mais un élément d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel réel de dimension 1 (celui des temps, celui des longueurs...), dont le choix d'une base revient à celui d'une unité de référence. Une phrase courante comme «lorsqu'on multiplie deux longueurs, on obtient une aire» évoque une opération qui, *conceptuellement*, ne consiste pas à multiplier deux nombres réels (même si *en pratique*, c'est évidemment ce que l'on fait, *une fois choisi un système d'unités*), mais à appliquer le produit tensoriel $L \times L \rightarrow L^{\otimes 2}$, où L est l'espace vectoriel des longueurs (et $L^{\otimes 2}$ celui des aires). Si l'on note m la base de L correspondant au choix du mètre comme unité de longueur, la base $m \otimes m$ de $L^{\otimes 2}$ est celle qui correspond au mètre carré comme unité d'aire.

La division d'une longueur par un temps (non nul) pour obtenir une vitesse est un tout petit peu plus délicate à décrire en termes intrinsèques : si T désigne l'espace des temps, elle consiste à associer à un couple (ℓ, t) de $L \times (T \setminus \{0\})$ l'élément $\ell \otimes t^{-1}$ de l'espace des vitesses $L \otimes_{\mathbb{R}} T^{\vee}$, où t^{-1} est la forme linéaire $\tau \mapsto \tau/t$ sur l'espace vectoriel T (si l'on préfère, on peut décrire t^{-1} comme la base duale de t). Si s désigne la base de T correspondant au choix de la seconde comme unité de temps, la base $m \otimes s^{-1}$ de $L \otimes_{\mathbb{R}} T^{\vee}$ est celle qui correspond au mètre par seconde comme unité de vitesse.

Cocycles

(3.4.8) Nous allons maintenant définir des objets (qui sont des cas particuliers de constructions cohomologiques très générales) dont nous nous servirons pour fabriquer des $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang 1 par recollement.

(3.4.8.1) Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Un *cocycle subordonné au recouvrement* (U_i) est la donnée, pour tout couple (i, j) d'indices, d'un élément $f_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^{\times}$, satisfaisant les conditions suivantes (on pourrait déduire ii) de i) et iii), mais nous avons préféré la faire figurer explicitement) :

- i) $f_{ii} = 1$ pour tout i ;
- ii) $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ pour tout (i, j) ;

iii) $f_{ij} \cdot f_{jk} = f_{ik}$ pour tout (i, j, k) là où cette égalité a un sens, c'est-à-dire sur $U_i \cap U_j \cap U_k$.

L'ensemble $Z_{(U_i)}$ des cocycles subordonnés à (U_i) hérite d'une structure naturelle de groupe, induite par la multiplication des fonctions.

(3.4.8.2) Un premier exemple : les cobords. Donnons-nous pour tout i un élément $a_i \in \mathcal{O}_X(U_i)^\times$. Pour tout (i, j) , on note f_{ij} l'élément inversible (a_i/a_j) de $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$. La famille (f_{ij}) est alors un cocycle subordonné à (U_i) . Les cocycles de cette forme sont appelés *cobords*; l'ensemble $B_{(U_i)}$ des cobords subordonnés à (U_i) est un sous-groupe de $Z_{(U_i)}$.

(3.4.9) Cocycles et $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang 1. On fixe un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{L}_0$, localement libre de rang 1. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de X . Le but de ce qui suit est de construire une bijection entre le groupe $Z_{(U_i)}/B_{(U_i)}$ et l'ensemble $G_{(U_i), \mathcal{L}_0} \subset \text{Pic } X$ des classes d'isomorphie de $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{L}$ localement libres de rang 1 et tels que $\mathcal{L}|_{U_i} \simeq \mathcal{L}_0|_{U_i}$ pour tout i ; nous dirons plus simplement qu'un tel $\mathcal{L}$ est *$\mathcal{L}_0$ -trivialisé par (U_i)* . Notons qu'un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1 est $\mathcal{O}_X$ -trivialisé par (U_i) si et seulement si il est trivialisé par (U_i) au sens de 3.4.1.1.

(3.4.9.1) Soit donc $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1 qui est $\mathcal{L}_0$ -trivialisé par (U_i) ; nous allons expliquer comment lui associer un élément de $Z_{(U_i)}/B_{(U_i)}$.

Choisissons pour tout i un isomorphisme $\ell_i: \mathcal{L}_0|_{U_i} \rightarrow \mathcal{L}|_{U_i}$. Pour tout couple (i, j) , la composée $\ell_i \circ \ell_j^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{L}|_{U_i \cap U_j}$, c'est-à-dire, en vertu de 3.4.4, une homothétie de rapport f_{ij} pour une certaine fonction $f_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$, uniquement déterminée. On vérifie immédiatement que (f_{ij}) est un cocycle subordonné à (U_i) .

Donnons-nous une seconde collection d'isomorphismes $\lambda_i: \mathcal{L}_0|_{U_i} \rightarrow \mathcal{L}|_{U_i}$, et soit (g_{ij}) le cocycle qui lui est associé par le procédé ci-dessus. Pour tout i , la composée $\ell_i \circ \lambda_i^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{L}|_{U_i}$, c'est-à-dire, en vertu de 3.4.4, une homothétie de rapport a_i pour une certaine fonction $a_i \in \mathcal{O}_X(U_i)^\times$, uniquement déterminée. On vérifie alors aussitôt que $f_{ij} = g_{ij} \cdot (a_i/a_j)$ pour tout (i, j) .

Ainsi, la classe du cocycle (f_{ij}) modulo $B_{(U_i)}$ ne dépend pas du choix du système (ℓ_i) , mais seulement de $\mathcal{L}$; on la note $\mathfrak{h}(\mathcal{L})$.

(3.4.9.2) Remarque. Si $\mathcal{L}'$ est second $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1 et si $\theta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ est un isomorphisme, il résulte aussitôt des définitions que le cocycle associé par la collection d'isomorphismes $(\theta \circ \ell_i: \mathcal{L}_0|_{U_i} \simeq \mathcal{L}'|_{U_i})$ est égal à (f_{ij}) . Ainsi, $\mathfrak{h}(\mathcal{L})$ ne dépend que de la classe d'isomorphie de $\mathcal{L}$. On peut donc voir $\mathfrak{h}$ comme une application de $G_{(U_i), \mathcal{L}_0}$ vers $Z_{(U_i)}/B_{(U_i)}$.

(3.4.9.3) Nous allons maintenant construire une application $\mathfrak{l}$ de $Z_{(U_i)}/B_{(U_i)}$ vers $G_{(U_i), \mathcal{L}_0}$, puis montrer que $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{h}$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

Soit (f_{ij}) un cocycle subordonné à (U_i) . Soit U un ouvert de X . On définit $\mathcal{L}(U)$ comme l'ensemble des familles (s_i) appartenant à $\prod_i \mathcal{L}_0(U \cap U_i)$ telles que $s_i = f_{ji}s_j$ pour tout (i, j) là où cette égalité a un sens, c'est-à-dire sur $U \cap U_i \cap U_j$ (en termes informels, on «tord» la condition de coïncidence usuelle par le cocycle (f_{ij})).

On voit aussitôt que $\mathcal{L}$ est un faisceau, qui possède une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$ -module (la multiplication externe se fait composante par composante). Fixons un indice k . Pour tout ouvert $U \subset U_k$ et toute section s appartenant à $\mathcal{L}_0(U)$, la famille $(s_i) \in \prod \mathcal{L}_0(U \cap U_i)$ définie par la formule $s_i = f_{ki}s$ est une section de $\mathcal{L}$ sur U (nous laissons le lecteur le vérifier – cela repose de manière essentielle sur le fait que (f_{ij}) est un cocycle).

On définit par ce biais un morphisme $\ell_k: \mathcal{L}_0|_{U_k} \simeq \mathcal{L}|_{U_k}$. Il est immédiat que ℓ_k est un isomorphisme de réciproque $(s_i) \mapsto s_k$. Autrement dit, sur l'ouvert U_k on peut identifier $\mathcal{L}$ à $\mathcal{L}_0$ en ne regardant que la composante d'indice k . Ainsi, $\mathcal{L}$ est $\mathcal{L}_0$ -trivialisé par (U_i) . On dit que $\mathcal{L}$ est obtenu en tordant $\mathcal{L}_0$ par le cocycle (f_{ij}) .

(3.4.9.4) Remarque. Il résulte des définitions que le cocycle associé au système d'isomorphismes (ℓ_i) par le procédé décrit au 3.4.9.1 est précisément (f_{ij}) .

(3.4.9.5) Donnons-nous pour tout i une fonction inversible a_i sur U_i . Soit (g_{ij}) le cocycle défini par la formule $g_{ij} = (a_i/a_j)f_{ij}$, et soit $\mathcal{M}$ le $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1 associé à (g_{ij}) par le procédé décrit ci-dessus. On montre sans difficulté que la formule $(s_i) \mapsto (a_i^{-1}s_i)$ définit un isomorphisme de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{M}$, de réciproque $(t_i) \mapsto (a_it_i)$.

La construction du 3.4.9.3 permet ainsi d'associer à toute classe h appartenant à $Z_{(U_i)}/B_{(U_i)}$ une classe $\mathfrak{l}(h) \in G_{(U_i), \mathcal{L}_0}$. La remarque 3.4.9.4 ci-dessus assure que $\mathfrak{h} \circ \mathfrak{l} = \text{Id}_{Z_{(U_i)}/B_{(U_i)}}$.

(3.4.9.6) Il reste à montrer que $\mathfrak{l} \circ \mathfrak{h} = \text{Id}_{G_{(U_i), \mathcal{L}_0}}$.

Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1 qui est $\mathcal{L}_0$ -trivialisé par (U_i) . On se donne un système d'isomorphismes

$$(\ell_i: \mathcal{L}_0|_{U_i} \simeq \mathcal{L}|_{U_i}) ;$$

on lui associe un cocycle (f_{ij}) comme au 3.4.9.1, puis on associe à (f_{ij}) un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{L}'$ par le procédé décrit au 3.4.9.3. Il suffit pour conclure de démontrer que $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{L}$.

Soit U un ouvert de X et soit (s_i) une section de $\mathcal{L}'$ sur U . Par construction, on a pour tout (i, j) l'égalité $\ell_i(s_i) = \ell_j(s_j)$ là où elle a un sens, c'est-à-dire sur $U \cap U_i \cap U_j$. Les $\ell_i(s_i)$ se recollent donc en une section de $\mathcal{L}$ sur U . En faisant varier U , on obtient un morphisme $\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$; nous laissons le lecteur vérifier qu'il s'agit d'un isomorphisme, de réciproque $s \mapsto (\ell_i^{-1}(s))_i$.

(3.4.9.7) Les applications $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{h}$ mettent donc comme annoncé $Z_{(U_i)}/B_{(U_i)}$ et $G_{(U_i), \mathcal{L}_0}$ en bijection.

Supposons que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_X$. Il est immédiat que $G_{(U_i), \mathcal{O}_X}$ est un sous-groupe de $\text{Pic } X$. Nous laissons au lecteur le soin de prouver que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{l}$ sont alors des isomorphismes *de groupes*; cela repose essentiellement sur le bon comportement du produit tensoriel vis-à-vis de la multiplication des fonctions (3.4.6.1-3.4.6.3).

Deuxième partie

La théorie des schémas

Chapitre 4

Le spectre comme espace topologique

4.1 Spectre d'un anneau

Motivation et définition

(4.1.1) Soit A un anneau. La géométrie algébrique à la Grothendieck se propose de lui associer un objet de nature géométrique, en partant du postulat suivant, conforme à l'intuition provenant de théories classiques (géométrie différentielle, géométrie analytique complexe, géométrie algébrique au sens des articles FAC et GAGA de Serre...) : *en géométrie, un «point» est quelque chose en lequel on peut évaluer des fonctions, le résultat étant à valeurs dans un corps.*

(4.1.2) On décide donc d'associer à tout morphisme $A \rightarrow K$, où K est un corps, un point de notre objet géométrique à construire –l'idée étant qu'on doit penser au morphisme en question comme à l'évaluation en le point correspondant.

(4.1.2.1) Mais il y a beaucoup trop de tels morphismes $A \rightarrow K$, lorsque K varie (au point que ceux-ci ne constituent même pas un ensemble). Il faut donc en identifier certains pour obtenir un objet raisonnable. On décide ainsi que pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & K' \\ & \nearrow & \\ A & \longrightarrow & K \end{array}$$

les morphismes $A \rightarrow K$ et $A \rightarrow K'$ définissent le même point. C'est naturel : il s'agit simplement de dire qu'on ne change pas un point en agrandissant artificiellement le corps sur lequel il est défini.

Par exemple, l'évaluation $P \mapsto P(0)$ est un morphisme de $\mathbb{R}[T]$ dans $\mathbb{R}$; on peut toujours s'amuser à le voir comme un morphisme de $\mathbb{R}[T]$ dans $\mathbb{C}$, mais il s'agira encore de l'évaluation en l'origine : qu'on considère celle-ci comme un point réel ou un point complexe importe peu, c'est le «même» point.

(4.1.2.2) L'objet que l'on souhaite associer à A peut donc être défini comme le quotient de $\{A \rightarrow K\}_{K \text{ corps}}$ par la relation qu'engendrent les identifications mentionnées ci-dessus.

Ce n'est certes pas une définition très tangible. Mais il résulte de 2.2 que ce quotient est en bijection naturelle avec l'ensemble $\text{Spec } A$ des idéaux premiers de A , de la façon suivante :

- à la classe d'un morphisme $A \rightarrow K$ on associe le noyau de $A \rightarrow K$;
- à un idéal premier $\mathfrak{p}$ on fait correspondre la classe de la flèche composée $A \rightarrow A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \text{Frac } A/\mathfrak{p}$.

De plus, d'après *loc. cit.*, $A \rightarrow \text{Frac } A/\mathfrak{p}$ est le plus petit morphisme de sa classe : tout morphisme $A \rightarrow K$ appartenant à celle-ci admet une unique factorisation $A \rightarrow \text{Frac } A/\mathfrak{p} \hookrightarrow K$.

(4.1.3) L'objet de base associé à un anneau A par la théorie des schémas est donc l'ensemble $\text{Spec } A$ de ses idéaux premiers. Toutefois, pour favoriser l'intuition géométrique, il est préférable de penser aux éléments de $\text{Spec } A$ comme à des *points*, et de se rappeler qu'à tout point x de $\text{Spec } A$ *correspond*, selon les besoins :

- un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A ;
- une classe de morphismes $A \rightarrow K$, où K est un corps, qui admet un plus petit élément $A \rightarrow \kappa(x)$ que l'on note suggestivement $f \mapsto f(x)$.

Le lien entre les deux se déduit de 4.1.2.2 : on a

$$\mathfrak{p} = \{f \in A, f(x) = 0\},$$

le corps $\kappa(x)$ est égal à $\text{Frac } A/\mathfrak{p}$ et $A \rightarrow \kappa(x)$ est la flèche canonique de A vers $\text{Frac } A/\mathfrak{p}$, composée de la flèche quotient $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ et de l'injection de $A/\mathfrak{p}$ dans son corps des fractions. On dit que $\kappa(x)$ est le *corps résiduel* du point x .

(4.1.4) Ainsi, A apparaît comme une sorte d'anneaux de fonctions sur $\text{Spec } A$, au moins dans le sens où l'on dispose pour tout $x \in \text{Spec } A$ d'un morphisme d'évaluation $f \mapsto f(x)$, à valeurs dans le corps $\kappa(x)$ *qui dépend a priori de x* .

(4.1.4.1) *Inversibilité : tout se passe bien.* Soit $f \in A$. L'élément f appartient à $A^\times$ si et seulement si il n'appartient à aucun idéal premier de A ; autrement dit, f est inversible si et seulement si $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \text{Spec } A$: en ce qui concerne l'inversibilité, A se comporte effectivement comme un anneau de fonctions classiques sur $\text{Spec } A$.

(4.1.4.2) *Annulation en tout point : les limites du point de vue fonctionnel.* Soit $f \in A$. On a $f(x) = 0$ pour tout $x \in \text{Spec } A$ si et seulement si f appartient à tous les idéaux premiers d A , c'est-à-dire si et seulement si f est nilpotent (lemme 2.2.16).

Ainsi, lorsque A n'est pas réduit, f peut s'annuler en tout point sans être elle-même nulle, et il est donc abusif de qualifier les éléments de A de fonctions ; on le fait tout de même parfois en pratique, soit parce qu'on travaille avec des anneaux réduits, soit pour le confort de l'analogie – mais il faut garder en tête le problème des nilpotents !

La topologie de Zariski

Nous allons maintenant définir une topologie sur $\text{Spec } A$, et établir ses propriétés de base, avant d'en venir aux premiers exemples de spectres.

(4.1.5) Soit E une partie de A . On note $V(E)$ l'ensemble des points x de $\text{Spec } A$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $f \in E$.

(4.1.6) Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles de A , on voit immédiatement que $\bigcap V(E_i) = V(\bigcup E_i)$. Supposons maintenant que I est fini, et soit F l'ensemble des éléments de A de la forme $\prod_{i \in I} f_i$ où $f_i \in E_i$ pour tout i ; on vérifie là encore sans problèmes que $V(F) = \bigcup V(E_i)$.

(4.1.7) Soit $E \subset A$. Les faits suivants découlent sans difficulté des définitions.

(4.1.7.1) Si I désigne l'idéal engendré par E alors $V(E) = V(I)$.

(4.1.7.2) Soit $x \in \text{Spec } A$ et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier correspondant. Le point x appartient à $V(E)$ si et seulement si $E \subset \mathfrak{p}$.

(4.1.8) Il résulte de 4.1.6 que les parties de la forme $V(E)$ pour $E \subset A$ sont les fermés d'une topologie sur $\text{Spec } A$, dite *de Zariski*. Par construction, les ouverts de $\text{Spec } A$ sont les parties qui sont réunion de sous-ensembles de la forme

$$D(f) := \{x \in A, f(x) \neq 0\}$$

où $f \in A$. Notons que $D(fg) = D(f) \cap D(g)$ pour tout $(f, g) \in A^2$, et que si x est un point de $\text{Spec } A$ correspondant à un idéal premier $\mathfrak{p}$ alors $x \in D(f)$ si et seulement si $f \notin \mathfrak{p}$.

(4.1.9) La topologie de Zariski ne ressemble guère aux topologies usuelles. Par exemple, en général les points de $\text{Spec } A$ ne sont pas tous fermés (et $\text{Spec } A$ n'est *a fortiori* pas séparé).

Plus précisément, soit $x \in \text{Spec } A$ et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier correspondant. Il découle tautologiquement de la définition de la topologie de Zariski que $\{x\}$ est l'ensemble des points y tels que $f(y) = 0$ pour toute $f \in A$ s'annulant en x . Autrement dit, $\{x\} = V(\mathfrak{p})$. Cela signifie que si y est un point de $\text{Spec } A$ correspondant à un idéal premier $\mathfrak{q}$, le point y appartient à $\{x\}$ si et seulement si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. En particulier, le point x est fermé si et seulement si $\mathfrak{p}$ est maximal (et on a alors $\{x\} = V(\mathfrak{p})$).

(4.1.10) Définition. On dit qu'un espace topologique X est *quasi-compact* si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Attention : la différence entre «quasi-compact» et «compact» est que l'on ne requiert pas qu'un espace quasi-compact soit séparé.

(4.1.11) Lemme. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A . Les ouverts $D(f_i)$ recouvrent $\text{Spec } A$ si et seulement si l'idéal engendré par les f_i est égal à A .

Démonstration. On a $\text{Spec } A = \bigcup D(f_i)$ si et seulement si pour tout x appartenant à $\text{Spec } A$, il existe i tel que $f_i(x) \neq 0$. En termes d'idéaux premiers, cela se traduit comme suit : pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , il existe i tel que $f_i \notin \mathfrak{p}$. Cela revient à demander que l'idéal (f_i) ne soit contenu dans aucun idéal premier de A , c'est-à-dire encore que l'idéal (f_i) soit égal à A . $\square$

(4.1.12) Corollaire. L'espace topologique $\text{Spec } A$ est quasi-compact.

Démonstration. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de $\text{Spec } A$. Pour montrer qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini, on peut le raffiner, ce qui autorise à supposer que U_i est pour tout i égal à $D(f_i)$ pour un certain $f_i \in A$.

Puisque les $D(f_i)$ recouvrent $\text{Spec } A$, le lemme 4.1.11 assure que l'idéal (f_i) est égal à A . Cela signifie que $1 \in (f_i)$. Autrement dit, 1 s'écrit comme une combinaison finie $\sum a_i f_i$. Si J désigne l'ensemble des indices apparaissant effectivement dans cette écriture, on a $1 \in (f_i)_{i \in J}$, ce qui veut dire que l'idéal engendré par les f_i pour $i \in J$ est déjà égal à A . Il résulte alors de *loc. cit.* que $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in J} D(f_i)$. $\square$

(4.1.13) Commentaires. La quasi-compacité est une propriété de finitude qui n'est pas un avatar schématique raisonnable de la compacité. Un tel avatar existe, c'est la *propreté* que nous rencontrerons plus bas, et qui ne peut pas être définie en termes purement topologiques.

Premiers exemples

(4.1.14) Si A est un anneau $\text{Spec } A = \emptyset$ si et seulement si A n'a pas d'idéal premier, c'est-à-dire si et seulement si $A = \{0\}$. Dans le cas contraire, A admet un idéal maximal, et $\text{Spec } A$ possède donc au moins un point fermé (4.1.9).

(4.1.15) Soit k un corps. Il possède un unique idéal premier, à savoir $\{0\}$. Son spectre est donc un singleton $\{x\}$, et $\kappa(x) = \text{Frac}(k/\{0\}) = k$; l'évaluation en x est bien entendu l'identité de k .

(4.1.16) Description de $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Donnons la liste des idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.

(4.1.16.1) Les idéaux maximaux. Ils sont de la forme (p) avec p premier. À tout nombre premier p est donc associé un point fermé x_p de $\text{Spec } \mathbb{Z}$, qui vérifie l'égalité $V(p) = \{x_p\}$: c'est donc l'unique point d'annulation de p vu comme fonction sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

On a $\kappa(x_p) = \mathbb{F}_p$, et $f \mapsto f(x_p)$ est simplement la réduction modulo p .

(4.1.16.2) L'idéal (0) . Soit η le point correspondant de $\text{Spec } \mathbb{Z}$. On a

$$\overline{\{\eta\}} = V(0) = \text{Spec } \mathbb{Z}.$$

Le point η est donc *dense* dans $\text{Spec } \mathbb{Z}$; on dit aussi qu'il est *générique*.

On a $\kappa(\eta) = \mathbb{Q}$, et $f \mapsto f(\eta)$ est simplement l'injection canonique $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

(4.1.17) Les fermés de $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Soit F un fermé de $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Il est de la forme $V(I)$ pour un certain idéal I , que l'on peut écrire (a) avec $a \in \mathbb{N}$ (puisque $\mathbb{Z}$ est principal); on a $F = V(a)$.

(4.1.17.1) Si $a = 0$ alors $F = \text{Spec } \mathbb{Z}$.

(4.1.17.2) Si $a \geq 1$, on peut écrire $a = \prod p_i^{n_i}$ où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts et les n_i des entiers strictement positifs. On a alors $F = \{x_{p_1}, \dots, x_{p_n}\}$.

(4.1.17.3) En conclusion les fermés de $\text{Spec } \mathbb{Z}$ sont d'une part $\text{Spec } \mathbb{Z}$ lui-même, d'autre part les ensembles finis de points fermés.

(4.1.18) Description de $\text{Spec } k[T]$. Soit k un corps. Nous allons maintenant décrire le spectre de $k[T]$, qui est l'avatar schématique d'une variété algébrique

sur k (au sens naïf) particulièrement simple : la droite affine k . Commençons par donner la liste des idéaux premiers de $k[T]$.

(4.1.18.1) Les idéaux maximaux. Ils sont de la forme (P) avec P irréductible unitaire. À tout polynôme irréductible unitaire $P \in k[T]$ est donc associé un point fermé x_P de $\text{Spec } k[T]$, qui vérifie l'égalité $V(P) = \{x_P\}$: c'est donc l'unique point d'annulation de P vu comme fonction sur $\text{Spec } k[T]$.

On a $\kappa(x_P) = k[T]/(P)$, et $f \mapsto f(x_P)$ est simplement la réduction modulo P .

(4.1.18.2) L'idéal (0). Soit η le point correspondant de $\text{Spec } k[T]$. On a

$$\overline{\{\eta\}} = V(0) = \text{Spec } k[T].$$

Le point η est donc *dense* dans $\text{Spec } k[T]$; on dit aussi qu'il est *générique*.

On a $\kappa(\eta) = k(T)$, et $f \mapsto f(\eta)$ est l'injection canonique $k[T] \hookrightarrow k(T)$.

(4.1.18.3) Les points classiques. Soit λ un élément de k . L'unique point d'annulation de $T - \lambda$ sur $\text{Spec } k[T]$ est $x_{T-\lambda}$, et l'on dispose d'un isomorphisme

$$\kappa(x_{T-\lambda}) = k[T]/(T - \lambda) \simeq k$$

modulo lequel l'évaluation $f \mapsto f(x_{T-\lambda})$ est simplement l'évaluation usuelle en λ . On peut donc penser à $x_{T-\lambda}$ comme au point classique λ de la droite affine k ; pour cette raison, nous écrirons le plus souvent λ au lieu de $x_{T-\lambda}$.

Lorsque k est algébriquement clos, tout polynôme irréductible de $k[T]$ est de la forme $T - \lambda$, et tous les points fermés de $\text{Spec } k[T]$ sont donc des points classiques : hormis le point générique, tous les points de $\text{Spec } k[T]$ sont des «vrais» points.

(4.1.19) Les fermés de $\text{Spec } k[T]$. Soit F un fermé de $\text{Spec } k[T]$. Il est de la forme $V(I)$ pour un certain idéal I , que l'on peut écrire (Q) où Q est un élément de $k[T]$ nul ou unitaire (puisque $k[T]$ est principal) ; on a $F = V(Q)$.

(4.1.19.1) Si $Q = 0$ alors $F = \text{Spec } k[T]$.

(4.1.19.2) Si $Q \neq 0$, on peut écrire $Q = \prod_{i=1}^n P_i^{n_i}$ où les P_i sont des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts et où les n_i sont des entiers strictement positifs. On a alors $F = \{x_{P_1}, \dots, x_{P_n}\}$.

(4.1.19.3) En conclusion les fermés de $\text{Spec } k[T]$ sont d'une part $\text{Spec } k[T]$ lui-même, d'autre part les ensembles finis de points fermés.

(4.1.20) Un exemple de point fermé non naïf. Le polynôme $T^2 + 1$ de $\mathbb{R}[T]$ étant irréductible, il définit un point fermé x_{T^2+1} de $\text{Spec } \mathbb{R}[T]$, qui est l'unique point en lequel $T^2 + 1$ s'annule. Son corps résiduel $\mathbb{R}[T]/(T^2 + 1)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ (comme extension de $\mathbb{R}$) de deux manières différentes : on peut envoyer T sur i ou $(-i)$; le morphisme d'évaluation $f \mapsto f(x_{T^2+1})$ s'identifie à l'évaluation classique $f \mapsto f(i)$ dans le premier cas, et à $f \mapsto f(-i)$ dans le second cas.

On voit que les points classiques i et $(-i)$ de la droite affine complexe induisent le même point fermé de $\text{Spec } \mathbb{R}[T]$: cela traduit le fait que i et $(-i)$ sont en quelque sorte $\mathbb{R}$ -indiscernables.

(4.1.21) Spectre d'une k -algèbre de type fini. Soit k un corps. Nous allons maintenant généraliser ce que nous venons de voir pour $k[T]$ à toutes les k -algèbres de type fini. Soit donc A une telle algèbre.

On fixe une présentation $A \simeq k[T_1, \dots, T_n]/(P_1, \dots, P_r)$ de A . On note X le spectre de A ; c'est l'avatar schématique de la «variété algébrique sur k définie par le système d'équations $\mathcal{S} := \{P_1 = 0, \dots, P_r = 0\}$ ».

(4.1.21.1) Remarque. Tout morphisme de A vers un corps L fait naturellement de ce dernier une extension de k , via la flèche composée $A \rightarrow L \rightarrow k$; notons que $A \rightarrow L$ est alors tautologiquement un k -morphisme.

En particulier, pour tout point x de A , le morphisme d'évaluation $A \rightarrow \kappa(x)$ fait de $\kappa(x)$ une extension de k .

(4.1.21.2) Soit X_0 l'ensemble des points fermés de X ; il est non vide dès que A est non nulle (4.1.14). On déduit du *Nullstellensatz*, et plus précisément de sa variante donnée par l'énoncé 2.10.7, que X_0 est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\kappa(x)$ soit une extension finie de k .

(4.1.21.3) Pour toute extension L de k on note $X(L)$ l'ensemble $\text{Hom}_k(A, L)$. Cela peut paraître abusif, puisque X semble dès lors désigner à la fois l'espace topologique $\text{Spec } A$ et un foncteur $L \mapsto X(L)$, mais nous verrons plus loin qu'une telle notation est tout à fait justifiée; nous nous permettons donc de l'utiliser dès maintenant, car elle va être commode et n'entraînera aucune confusion.

Pour toute extension L de k les formules

$$\varphi \mapsto (\varphi(\overline{T_1}), \dots, \varphi(\overline{T_n}))$$

et

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto [f \mapsto f(x_1, \dots, x_n)]$$

établissent une bijection entre $X(L)$ et le sous-ensemble de L^n formé des solutions du système $\mathcal{S}$. Selon les circonstances, nous verrons donc les éléments de $X(L)$ comme des morphisme aussi bien que comme des n -uplets d'éléments de L .

(4.1.21.4) Soit L une extension de k et soit $A \rightarrow L$ un élément de $X(L)$. Le morphisme d'anneaux $A \rightarrow L$ induit un point x de X et $A \rightarrow L$ admet une factorisation canonique sous la forme $A \rightarrow \kappa(x) \hookrightarrow L$ (cf. 4.1.2.2 et 4.1.3); il est immédiat que $\kappa(x) \hookrightarrow L$ est un k -morphisme.

Si $x \in X$, il est induit d'après 4.1.2.2 et 4.1.3 par un morphisme $A \rightarrow L$ pour un certain corps L ; ce morphisme fait de L une k -extension et appartient dès lors à $\text{Hom}_k(A, L) = X(L)$ (4.1.21.1).

On a ainsi défini pour tout extension L de k une application $X(L)$ vers X , et montré que tout point de X appartient à l'image de $X(L) \rightarrow X$ pour une certaine L .

En un sens, X est donc constitué des solutions de $\mathcal{S}$ à valeurs dans toutes les extensions de k . Mais attention : $X(L) \rightarrow X$ n'est pas injective en général; la définition de X met en effet en jeu certaines relations d'identifications, décrites en toute généralité en 4.1.2.1. Nous allons voir plus précisément ce qu'il en est lorsque $L = k$ et lorsque L est une clôture algébrique de k .

(4.1.21.5) Nous allons démontrer que la flèche $X(k) \rightarrow X$ est injective, et que son image est exactement l'ensemble des points x tels que $\kappa(x) = k$.

Preuve de l'injectivité. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in X(k)$ et soit x son image sur X . Pour tout i , le scalaire x_i est le seul élément $\lambda \in k$ tel que $(T_i - \lambda)(x) = 0$; ceci montre que $(x_1, \dots, x_n)$ peut se reconstituer à partir de x , et $X(k) \rightarrow X$ est donc injective.

Description de l'image de $X(k)$. Soit $\varphi: A \rightarrow k$ un élément de $X(k)$ et soit x son image sur X . Le corps $\kappa(x)$ est alors une extension de k qui se plonge dans k , d'où l'égalité $\kappa(x) = k$.

Réciproquement, si $x \in X$ est tel que $\kappa(x) = k$, l'évaluation $f \mapsto f(x)$ est un k -morphisme de A dans k qui induit x ; ainsi, l'image de $X(k)$ dans X est exactement l'ensemble des points de X de corps résiduel k .

(4.1.21.6) L'ensemble $X(k)$, qui n'est autre que la variété algébrique sur k (au sens naïf) définie par le système $\mathcal{S}$, s'identifie donc canoniquement au sous-ensemble de X_0 constitué des points de corps résiduel k ; ce sont les points de X que l'on peut considérer comme «classiques». Notons qu'ils sont fermés : on peut pour le voir ou bien invoquer 4.1.21.2, ou bien remarquer directement que si x est un point de X tel que $\kappa(x) = k$ l'évaluation $f \mapsto f(x)$ est surjective (grâce aux constantes).

Dans la suite de ce livre nous ne distinguerons plus sauf exception un élément $(x_1, \dots, x_n) \in X(k)$ du point fermé x correspondant sur X , cet abus n'induisant le plus souvent aucune confusion : l'évaluation en x n'est en effet autre que la surjection $f \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$; et l'on vérifie aisément que son noyau est l'idéal maximal $(\overline{T}_i - x_i)_i$ (se ramener par une translation au cas où les x_i sont tous nuls, dans lequel l'assertion est évidente), ce qui montre que $\{x\} = V(\overline{T}_1 - x_1, \dots, \overline{T}_n - x_n)$.

(4.1.21.7) Fixons une clôture algébrique $\bar{k}$ de k ; soit G le groupe de Galois de $\bar{k}/k$, c'est-à-dire le groupe des k -automorphismes de $\bar{k}$. Soit $x \in X_0$. Comme $\kappa(x)$ est une extension finie de k , il admet un k -plongement dans $\bar{k}$ (lemme 2.9.13). La composée $A \rightarrow \kappa(x) \hookrightarrow \bar{k}$ est un élément de $X(\bar{k})$ dont l'image sur X est par construction égale à x .

Réciproquement, donnons-nous un k -morphisme $A \rightarrow \bar{k}$. Comme A est de type fini, son image est engendrée par un nombre fini d'éléments, et est donc une extension finie L de k . Le morphisme $A \rightarrow \bar{k}$ se factorisant par la flèche surjective $A \rightarrow L$, son image x sur X appartient à X_0 et vérifie $\kappa(x) = L$.

Ainsi, la flèche canonique $X(\bar{k}) \rightarrow X$ a pour image X_0 .

(4.1.21.8) Le but est maintenant de décrire le «noyau» de cette flèche, ou plus précisément son défaut d'injectivité.

Pour commencer, remarquons qu'il y a une action naturelle de G sur $X(\bar{k})$, donnée par la formule $g \cdot \varphi = g \circ \varphi$ lorsqu'on voit $X(\bar{k})$ comme égal à $\text{Hom}_k(A, \bar{k})$, et par $g \cdot (x_1, \dots, x_n) = (g(x_1), \dots, g(x_n))$ lorsqu'on le voit comme l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ dans $\bar{k}^n$ (si $(x_1, \dots, x_n)$ est solution de $\mathcal{S}$ le n -uplet $(g(x_1), \dots, g(x_n))$ l'est encore car $\mathcal{S}$ est constitué de polynômes à coefficients dans k).

Nous allons maintenant démontrer que $X(\bar{k}) \rightarrow X_0$ identifie X_0 au quotient $X(\bar{k})/G$. On retrouve le phénomène entrevu au 4.1.20 : deux points

de $X(\bar{k})$ induisent le même point de X si et seulement si ils sont conjugués sous G , c'est-à-dire en un sens k -indiscernables.

Deux éléments de $X(\bar{k})$ conjugués sous l'action de G ont même image sur X_0 . En effet, donnons-nous $\varphi : A \rightarrow \bar{k}$ et $g \in G$. L'existence du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{k} \\ & \nearrow^{g \circ \varphi} & \uparrow g \\ A & \xrightarrow{\varphi} & \bar{k} \end{array} \quad \simeq$$

assure que les images de φ et $g \circ \varphi$ sur X coïncident, ce qu'on souhaitait établir.

Deux éléments de $X(\bar{k})$ qui ont même image sur X_0 sont conjugués sous l'action de G . En effet, donnons-nous deux k -morphisms φ et ψ de A vers $\bar{k}$ qui ont même image x sur X . Cela signifie que φ et ψ se factorisent tous deux par la surjection canonique $A \rightarrow \kappa(x)$; autrement dit, φ est induit par un k -plongement $\varphi' : \kappa(x) \hookrightarrow \bar{k}$, et ψ par un k -plongement $\psi' : \kappa(x) \hookrightarrow \bar{k}$. Chacun de ces deux plongements fait de $\bar{k}$ une clôture algébrique de $\kappa(x)$. Comme deux telles clôtures algébriques sont isomorphes (corollaire 2.9.13), il existe un automorphisme g de $\bar{k}$ tel que $g \circ \varphi' = \psi'$; un tel g est automatiquement un k -morphisme (car φ' et ψ' sont des k -morphisms), ce qui veut dire qu'il appartient à G . On a par construction $\psi = g \circ \varphi$, ce qui achève la démonstration.

(4.1.21.9) Comme G fixe k , il agit trivialement sur le sous-ensemble $X(k)$ de $X(\bar{k})$; on retrouve ainsi le fait que $X(k)$ s'injecte dans X (4.1.21.5).

Mentionnons incidemment que l'ensemble des éléments de $X(\bar{k})$ fixes sous l'action de G est égal à $X(L)$, où L est le sous-corps de $\bar{k}$ formé des éléments fixés par G . Si k est parfait (e.g si k est de caractéristique nulle ou fini) alors $L = k$ par (la partie facile de) la théorie de Galois. Mais en général, ce n'est pas le cas. Plus précisément, supposons k de caractéristique $p > 0$. Le corps L est alors la plus grande extension purement inséparable de k dans $\bar{k}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\lambda \in \bar{k}$ tels que $\lambda^{p^n} \in k$ pour un certain n ; si k n'est pas parfait, L est donc une extension stricte de k .

Fonctorialité du spectre

(4.1.22) Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. On a mentionné en 2.2.8 fait que φ induit une application ψ de $\text{Spec } B$ vers $\text{Spec } A$, que l'on peut décrire de deux façons :

- au niveau des idéaux premiers, elle envoie $\mathfrak{q}$ sur $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$;
- au niveau des morphismes dont le but est un corps, elle envoie la classe de $B \rightarrow K$ vers celle de la flèche composée $A \rightarrow B \rightarrow K$.

Il résulte immédiatement de l'une ou l'autre de ces définitions que si y est un point de $\text{Spec } B$ d'image x sur $\text{Spec } A$, le morphisme φ induit un plongement $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(y)$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
B & \xrightarrow{g \mapsto g(y)} & \kappa(y) \\
\uparrow \varphi & & \uparrow \\
A & \xrightarrow{f \mapsto f(x)} & \kappa(x)
\end{array}$$

commute, c'est-à-dire encore modulo lequel $\varphi(f)(y) = f(x)$ pour tout $f \in A$. En particulier, on a pour tout $f \in A$ l'équivalence

$$f(x) = 0 \iff \varphi(f)(y) = 0.$$

En conséquence, on a $\psi^{-1}(V(E)) = V(\varphi(E))$ pour toute partie $E \subset A$, et $\psi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ pour tout $f \in A$. Il s'ensuit que l'application ψ est *continue*.

Ainsi, $A \mapsto \text{Spec } A$ apparaît comme un foncteur contravariant de la catégorie des anneaux vers celle des espaces topologiques.

(4.1.23) Un premier exemple. Soit $A \rightarrow K$ un morphisme d'un anneau A vers un corps K , soit x le point correspondant de $\text{Spec } A$ et soit ξ l'unique point de $\text{Spec } K$. La flèche $A \rightarrow K$ induit une application $\text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } A$. L'image de ξ est simplement par définition la classe du morphisme $A \rightarrow K$, c'est-à-dire x ; et la flèche $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(\xi) = K$ est l'injection canonique de $\kappa(x)$ dans K .

(4.1.24) Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe une partie multiplicative S de A et un idéal I de A tels que la A -algèbre B s'identifie à $S^{-1}A/(I \cdot S^{-1}A)$.
- ii) tout élément de B est de la forme $\varphi(a)/\varphi(s)$ où a et s appartiennent à A et où $\varphi(s)$ est inversible dans B .

En effet, i) $\Rightarrow$ ii) est évidente; pour ii) $\Rightarrow$ i), nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'on peut prendre $S = \varphi^{-1}(B^\times)$ et $I = \text{Ker } \varphi$.

(4.1.25) Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux vérifiant les conditions équivalentes i) et ii) du 4.1.24 ci-dessus, et soient S et I comme dans i); notons que $I \subset \text{Ker } \varphi$ et que $S \subset \varphi^{-1}(B^\times)$. Soit $\psi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ la flèche induite par φ . Nous allons démontrer que ψ induit un homéomorphisme

$$\text{Spec } B \simeq \{x \in \text{Spec } A, x \in V(I) \text{ et } x \in D(s); \forall s \in S\},$$

et que $\kappa(\psi(y)) = \kappa(y)$ pour tout $y \in \text{Spec } B$.

(4.1.25.1) On vérifie immédiatement que B représente le foncteur covariant de Ann dans Ens qui envoie C sur le sous-ensemble de $\text{Hom}_{\text{Ann}}(A, C)$ constitué des morphisme f tels que $f(a) = 0$ pour tout $a \in I$ et tels que $f(s)$ soit inversible pour tout $s \in S$.

(4.1.25.2) La flèche $\psi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ induit un homéomorphisme de $\text{Spec } B$ sur $\psi(\text{Spec } B)$. En effet, soit $b \in B$; écrivons $b = \varphi(a)/\varphi(s)$ avec $a \in A, s \in A$ et $\varphi(s) \in B^\times$. Soit $y \in \text{Spec } B$ et soit x son image sur $\text{Spec } A$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
b(y) &= 0 \\
\iff (\varphi(a)/\varphi(s))(y) &= 0 \\
\iff \varphi(a)(y) &= 0 \\
\iff a(x) &= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que le noyau de $b \mapsto b(y)$, qui caractérise entièrement le point y , ne dépend que de x ; autrement dit, y est le seul antécédent de x sur $\text{Spec } B$, et ψ est injective.

Par ailleurs, la chaîne d'équivalence ci-dessus entraîne que $y \in D(b)$ si et seulement si $x \in D(a)$. En conséquence, $\psi(D(b)) = D(a) \cap \psi(\text{Spec } B)$, et l'injection continue $\text{Spec } B \rightarrow \psi(\text{Spec } B)$ induite par ψ est dès lors ouverte; c'est donc un homéomorphisme, ce qu'il fallait démontrer.

(4.1.25.3) Soit $y \in \text{Spec } B$ et soit x son image sur $\text{Spec } A$. Si a est un élément de I on a $a(x) = \varphi(a)(y) = 0$ puisque $I \subset \text{Ker } \varphi$; et si s est un élément de S on a $s(x) = \varphi(s)(y) \neq 0$; ainsi, $x \in V(I)$, et $x \in D(s)$ pour tout $s \in S$.

Réciproquement, soit x un point de $\text{Spec } A$ situé sur $V(I)$ et sur $D(s)$ pour tout $s \in S$. Le morphisme d'évaluation $A \rightarrow \kappa(x)$ envoie alors tout élément de I sur 0, et tout élément de S sur un élément non nul et donc inversible de $\kappa(x)$. Il en résulte d'après la propriété universelle énoncée au 4.1.25.1 que $A \rightarrow \kappa(x)$ admet une factorisation $A \rightarrow B \rightarrow \kappa(x)$. Le morphisme $B \rightarrow \kappa(x)$ induit un point y sur $\text{Spec } B$ et une factorisation $B \rightarrow \kappa(y) \hookrightarrow \kappa(x)$.

On a par construction $\psi(y) = x$; de plus, la flèche $A \rightarrow \kappa(x)$ étant égale à la composée $A \rightarrow B \rightarrow \kappa(x)$, elle se factorise par la composée $A \rightarrow B \rightarrow \kappa(y)$. Comme $A \rightarrow \kappa(x)$ est le plus petit élément de la classe de morphismes de source A et de but un corps qui correspond à x , il vient $\kappa(y) = \kappa(x)$.

(4.1.26) Exemples. Nous allons décliner 4.1.25 dans un certain nombre de cas particuliers importants. Soit A un anneau.

(4.1.26.1) Soit I un idéal de A . En appliquant 4.1.25 avec $S = \{1\}$, on voit que le morphisme quotient $A \rightarrow A/I$ induit un homéomorphisme préservant les corps résiduels de $\text{Spec } A/I$ sur le fermé $V(I)$ de $\text{Spec } A$.

Notons qu'on peut avoir $V(I) = \text{Spec } A$ sans que l'idéal I soit nul : comme $V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$, le fermé $V(I)$ est plus précisément égal à $\text{Spec } A$ si et seulement si $V(f) = \text{Spec } A$ pour tout $f \in I$, c'est-à-dire si et seulement si I est constitué d'éléments nilpotents (4.1.4.2).

Dans ce cas, la flèche $A \rightarrow A/I$ induit en vertu de ce qui précède un homéomorphisme $\text{Spec } A/I \simeq \text{Spec } A$.

(4.1.26.2) Soit f un élément de A . Si $x \in \text{Spec } A$, on a $f(x) \neq 0$ si et seulement si $f^n(x) \neq 0$ pour tout n . En appliquant 4.1.25 avec $S = \{f^n\}_n$ et $I = \{0\}$, on voit que le morphisme de localisation $A \rightarrow A_f$ induit un homéomorphisme préservant les corps résiduels de $\text{Spec } A_f$ sur l'ouvert $D(f)$ de $\text{Spec } A$.

(4.1.26.3) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit x le point correspondant de $\text{Spec } A$. En appliquant 4.1.25 avec $S = A \setminus \mathfrak{p}$ et $I = \{0\}$, on voit que le

morphisme de localisation $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ induit un homéomorphisme préservant les corps résiduels de $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ sur

$$\{y \in \text{Spec } A, f(y) \neq 0 \ \forall f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Ce dernier ensemble peut se décrire d'une manière un peu plus géométrique, en remarquant que l'implication $(f \notin \mathfrak{p}) \Rightarrow (f(y) \neq 0)$ équivaut à sa contraposée $(f(y) = 0) \Rightarrow f \in \mathfrak{p}$. En se rappelant que $f \in \mathfrak{p} \iff f(x) = 0$, et en utilisant la description de $\overline{\{y\}}$ donnée au 4.1.9, on en déduit que l'image de $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ est précisément l'ensemble des *générizations* de x , c'est-à-dire des éléments y tels que $x \in \overline{\{y\}}$.

(4.1.26.4) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit x le point correspondant de $\text{Spec } A$. En appliquant 4.1.25 avec $S = A \setminus \mathfrak{p}$ et $I = \mathfrak{p}$, on voit que le morphisme canonique $A \rightarrow \text{Frac } A/\mathfrak{p}$ induit un homéomorphisme préservant les corps résiduels de $\text{Spec } \text{Frac } A/\mathfrak{p}$ sur

$$\{y \in \text{Spec } A, f(y) \neq 0 \ \forall f \notin \mathfrak{p} \text{ et } f(y) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{p}\},$$

qui n'est autre que l'ensemble des points y tels que le noyau de l'évaluation en y soit exactement $\mathfrak{p}$; c'est donc le singleton $\{x\}$.

On retrouve ainsi l'exemple 4.1.23 dans le cas particulier du morphisme canonique $A \rightarrow \kappa(x)$.

(4.1.27) Fibres d'une application entre spectres. Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux et soit $\psi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ l'application continue induite. Soit $x \in \text{Spec } A$, et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier correspondant. On se propose de donner une description de la fibre $\psi^{-1}(x)$.

Posons $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Le point x peut se décrire comme

$$\{y \in \text{Spec } A, f(y) \neq 0 \ \forall f \notin \mathfrak{p} \text{ et } f(y) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{p}\},$$

(cf. 4.1.26.4 ci-dessus). En conséquence,

$$\psi^{-1}(x) = \{z \in \text{Spec } B, \varphi(f)(z) \neq 0 \ \forall f \notin \mathfrak{p} \text{ et } \varphi(f)(z) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{p}\},$$

que l'on peut récrire

$$\{z \in \text{Spec } B, g(z) \neq 0 \ \forall g \in \varphi(S) \text{ et } g(z) = 0 \ \forall g \in \varphi(\mathfrak{p})\}.$$

Il résulte alors de 4.1.25 que $B \rightarrow \varphi(S)^{-1}B/(\varphi(\mathfrak{p}) \cdot \varphi(S)^{-1}B)$ induit un homéomorphisme préservant les corps résiduels entre $\text{Spec } B/(\varphi(\mathfrak{p}) \cdot \varphi(S)^{-1}B)$ et $\psi^{-1}(x)$. Par ailleurs, la commutation du produit tensoriel à la localisation et au quotient garantit que

$$\begin{aligned} \varphi(S)^{-1}B/(\varphi(\mathfrak{p}) \cdot \varphi(S)^{-1}B) &\simeq B \otimes_A S^{-1}A/(\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A) \\ &= B \otimes_A \text{Frac } A/\mathfrak{p} = B \otimes_A \kappa(x). \end{aligned}$$

Récapitulons : on a finalement montré que $B \rightarrow B \otimes_A \kappa(x)$ induit un homéomorphisme

$$\text{Spec } B \otimes_A \kappa(x) \simeq \psi^{-1}(x)$$

qui préserve les corps résiduels.

(4.1.28) Spectre d'un produit. Soient A et B deux anneaux. On note respectivement e et f les idempotents $(1, 0)$ et $(0, 1)$ de $A \times B$.

(4.1.28.1) On a $ef = 0$ et $e + f = 1$; on en déduit aussitôt que $\text{Spec}(A \times B)$ est la réunion disjointe des ouverts fermés $D(e) = V(f)$ et $D(f) = V(e)$.

(4.1.28.2) Le noyau de la projection $A \times B \rightarrow A$ est égal à (f) ; en conséquence, cette projection induit un homéomorphisme préservant les corps résiduels $\text{Spec } A \simeq V(f)$; de même, la seconde projection induit un homéomorphisme préservant les corps résiduels $\text{Spec } B \simeq V(e)$.

(4.1.28.3) On peut décrire ces homéomorphismes d'une manière en quelque sorte duale de la précédente. Pour cela, on remarque que la projection $A \times B \rightarrow A$ envoie e sur un élément inversible de A (en l'occurrence, elle l'envoie sur 1) et qu'un morphisme de $A \times B$ dans un anneau C qui envoie e sur un élément inversible de C envoie nécessairement f sur 0 (puisque $ef = 0$), et se factorise donc d'une unique manière par $A \times B \rightarrow A$. Il en résulte que $A \times B \rightarrow A$ identifie A au localisé $(A \times B)_e$; en conséquence, cette projection induit un homéomorphisme préservant les corps résiduels $\text{Spec } A \simeq D(e)$. De même la seconde projection induit un homéomorphisme préservant les corps résiduels $\text{Spec } B \simeq D(f)$.

Bien entendu, tout ceci est compatible avec 4.1.28.2 puisque $D(e) = V(f)$ et $V(f) = D(e)$.

(4.1.28.4) En résumé, on a donc un homéomorphisme canonique

$$\text{Spec}(A \times B) \simeq \text{Spec } A \coprod \text{Spec } B$$

modulo lequel $\text{Spec } A = D(e) = V(f)$ et $\text{Spec } B = V(e) = D(f)$.

(4.1.29) Un exemple. Soit $\psi : \text{Spec } \mathbb{C}[T] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{R}[T]$ le morphisme induit par le plongement naturel $\mathbb{R}[T] \hookrightarrow \mathbb{C}[T]$. Nous allons étudier ses fibres. D'après 4.1.27, la fibre de ψ en x s'identifie pour tout $x \in \text{Spec } \mathbb{R}[T]$ au spectre de l'anneau $\mathbb{C}[T] \otimes_{\mathbb{R}[T]} \kappa(x)$.

(4.1.29.1) La fibre générique. Soit η le point générique de $\text{Spec } \mathbb{R}[T]$. Par ce qui précède, la fibre $\psi^{-1}(\eta)$ s'identifie au spectre de

$$\mathbb{C}[T] \otimes_{\mathbb{R}[T]} \mathbb{R}(T) = \mathbb{R}[T][U]/(U^2 + 1) \otimes_{\mathbb{R}[T]} \mathbb{R}(T) = \mathbb{R}(T)[U]/(U^2 + 1) = \mathbb{C}(T).$$

La fibre $\psi^{-1}(\eta)$ contient donc un unique point ξ dont le corps résiduel est $\mathbb{C}(T)$, et le morphisme d'évaluation $f \mapsto f(\xi)$ n'est autre que l'inclusion $\mathbb{C}[T] \hookrightarrow \mathbb{C}(T)$; en conséquence, ξ est le point générique de $\text{Spec } \mathbb{C}[T]$.

(4.1.29.2) La fibre en un point classique. Soit $a \in \mathbb{R}$. On peut le voir comme un point de $\text{Spec } \mathbb{R}[T]$ de corps résiduel $\mathbb{R}$ qui vérifie l'égalité $V(T - a) = \{a\}$ (4.1.18.3, 4.1.21.6).

La fibre $\psi^{-1}(a)$ est alors le lieu d'annulation de $T - a$ sur $\text{Spec } \mathbb{C}[T]$, qui contient un unique élément, à savoir le point $a_{\mathbb{C}}$ de corps résiduel $\mathbb{C}$ qui correspond à a vu comme élément de $\mathbb{C}$.

Vérifions la compatibilité de ce qui précède avec la description «tensorielle» de $\psi^{-1}(a)$. Le corps résiduel du point a s'identifie *en tant que* $\mathbb{R}[T]$ -algèbre à $\mathbb{R}[T]/(T - a)$. Il s'ensuit que la fibre $\psi^{-1}(a)$ s'identifie naturellement à

$$\text{Spec } \mathbb{C}[T] \otimes_{\mathbb{R}[T]} \mathbb{R}[T]/(T - a),$$

soit encore à $\text{Spec } \mathbb{C}[T]/(T - a)$. Comme $\mathbb{C}[T]/(T - a)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ *via* l'évaluation en a , on retrouve bien l'égalité

$$\psi^{-1}(a) = \{a_{\mathbb{C}}\}.$$

(4.1.29.3) *La fibre en un point fermé non classique.* Soit P un polynôme irréductible de degré 2 sur $\mathbb{R}$. Il lui correspond un point fermé x qui est tel que $V(P) = \{x\}$, et dont le corps résiduel $\mathbb{R}[T]/P$ s'identifie à $\mathbb{C}$ une fois choisie (arbitrairement) une racine α de P ; l'évaluation $f \mapsto f(x)$ s'identifie alors à l'évaluation classique $f \mapsto f(\alpha)$.

La fibre $\psi^{-1}(x)$ est donc le lieu d'annulation de $P = (T - \alpha)(T - \bar{\alpha})$ sur $\text{Spec } \mathbb{C}[T]$, et est dès lors égale à $V(T - \alpha) \cup V(T - \bar{\alpha})$. Elle comprend en conséquence deux points, à savoir α et $\bar{\alpha}$; le corps résiduel de chacun d'eux est $\mathbb{C}$.

Intuitivement, α et $\bar{\alpha}$ sont indiscernables sur $\mathbb{R}$ et ne définissent donc qu'un seul point fermé sur $\text{Spec } \mathbb{R}[T]$ (un peu «gros» : son corps résiduel est de degré 2 sur le corps de base $\mathbb{R}$); une fois les scalaires étendus à $\mathbb{C}$ elles deviennent discernables et définissent deux points distincts de corps résiduel $\mathbb{C}$.

Vérifions la compatibilité de ce qui précède avec la description «tensorielle» de $\psi^{-1}(x)$. Celle-ci assure que $\psi^{-1}(x)$ s'identifie naturellement au spectre de $\mathbb{C}[T] \otimes_{\mathbb{R}[T]} \kappa(x)$, soit encore à celui de $\mathbb{C}[T] \otimes_{\mathbb{R}[T]} \mathbb{R}[T]/P$, et finalement à $\text{Spec } \mathbb{C}[T]/P$. Comme $\mathbb{C}[T]/P = \mathbb{C}[T]/(T - \alpha)(T - \bar{\alpha})$ est isomorphe par le lemme chinois à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *via* les évaluations en α et $\bar{\alpha}$, on retrouve bien en vertu de 4.1.28.4 l'égalité

$$\psi^{-1}(x) = \{\alpha, \bar{\alpha}\}.$$

4.2 Description de Spec $\mathbb{Z}[T]$ et Spec $k[S, T]$ lorsque k est algébriquement clos

Le spectre de $\mathbb{Z}[T]$

(4.2.1) Le but de ce qui suit est de décrire le spectre de $\mathbb{Z}[T]$; c'est un exemple qu'il est fondamental de bien comprendre et méditer, car il offre un excellent échantillon des bizarreries et curiosités schématiques.

Pour le décrire, nous allons recourir à une stratégie très fréquente en géométrie : nous allons utiliser une application de source $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$ dont nous comprenons bien le but et les fibres.

Cette application sera simplement la flèche $\psi: \text{Spec } \mathbb{Z}[T] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ induite par l'unique morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}[T]$. Son but est $\text{Spec } \mathbb{Z}$, que nous avons déjà décrit; et pour tout $x \in \text{Spec } \mathbb{Z}$, la fibre $\psi^{-1}(x)$ s'identifie au spectre de $\mathbb{Z}[T] \otimes_{\mathbb{Z}} \kappa(x)$, c'est-à-dire à $\text{Spec } \kappa(x)[T]$, que nous avons décrit également.

(4.2.2) La fibre générique. Soit η le point générique de $\text{Spec } \mathbb{Z}$. La fibre générique $\psi^{-1}(\eta)$ s'identifie à $\text{Spec } \mathbb{Q}[T]$ et possède donc deux types de points.

(4.2.2.1) *Le point générique.* Désignons par ξ_η le point générique de $\text{Spec } \mathbb{Q}[T] \simeq \psi^{-1}(\eta)$.

Lorsqu'on voit ξ_η comme un point de $\text{Spec } \mathbb{Q}[T]$, son corps résiduel est $\mathbb{Q}(T)$, et l'évaluation $f \mapsto f(\xi_\eta)$ est simplement le plongement $\mathbb{Q}[T] \hookrightarrow \mathbb{Q}(T)$.

En conséquence, lorsqu'on voit ξ_η comme appartenant à $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$, son corps résiduel est $\mathbb{Q}(T)$, et l'évaluation $f \mapsto f(\xi_\eta)$ est la flèche composée

$$\mathbb{Z}[T] \hookrightarrow \mathbb{Q}[T] \hookrightarrow \mathbb{Q}(T).$$

L'idéal premier correspondant à ξ_η est le noyau de cette dernière, c'est-à-dire l'idéal nul. L'adhérence $\overline{\{\xi_\eta\}}$ est alors égale à $V(0)$, qui n'est autre que $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$ tout entier.

(4.2.2.2) *Les points fermés.* Soit P un polynôme irréductible unitaire à coefficients dans $\mathbb{Q}[T]$. Il définit un point fermé $y_{\eta,P}$ sur $\text{Spec } \mathbb{Q}[T] \simeq \psi^{-1}(\eta)$.

Lorsqu'on voit $y_{\eta,P}$ comme appartenant à $\text{Spec } \mathbb{Q}[T]$, c'est l'unique point d'annulation de P , son corps résiduel est $\mathbb{Q}[T]/P$, et l'évaluation $f \mapsto f(y_{\eta,P})$ est la flèche quotient $\mathbb{Q}[T] \rightarrow \mathbb{Q}[T]/P$.

En conséquence, lorsqu'on voit $y_{P,\eta}$ comme appartenant à $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$, son corps résiduel est $\mathbb{Q}[T]/P$, et l'évaluation $f \mapsto f(y_{P,\eta})$ est la flèche composée

$$\mathbb{Z}[T] \hookrightarrow \mathbb{Q}[T] \rightarrow \mathbb{Q}[T]/P.$$

L'idéal premier correspondant à $y_{P,\eta}$ est le noyau de cette dernière flèche. Un raisonnement fondé sur la factorialité de $\mathbb{Z}$ (et que nous laissons au lecteur) assure que ce noyau est l'idéal (P_0) , où P_0 est le produit de P par le plus petit multiple commun des dénominateurs de ses coefficients (écrits sous forme irréductible); c'est un polynôme appartenant à $\mathbb{Z}[T]$ dont le contenu vaut 1.

L'adhérence $\overline{\{y_{P,\eta}\}}$ est donc égale à $V(P_0)$; nous en dirons quelques mots un peu plus loin.

(4.2.3) *Les fibres fermées.* Soit p un nombre premier et soit x_p le point fermé correspondant de $\text{Spec } \mathbb{Z}$. La fibre fermée $\psi^{-1}(x_p)$ s'identifie à $\text{Spec } \mathbb{F}_p[T]$ et possède donc deux types de points.

(4.2.3.1) *Le point générique.* Désignons par ξ_p le point générique de $\text{Spec } \mathbb{F}_p[T] \simeq \psi^{-1}(x_p)$.

Lorsqu'on voit ξ_p comme un point de $\text{Spec } \mathbb{F}_p[T]$, son corps résiduel est $\mathbb{F}_p(T)$, et le morphisme d'évaluation $f \mapsto f(\xi_p)$ est simplement le plongement $\mathbb{F}_p[T] \hookrightarrow \mathbb{F}_p(T)$.

En conséquence, lorsqu'on voit ξ_p comme appartenant à $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$, son corps résiduel est $\mathbb{F}_p(T)$, et l'évaluation $f \mapsto f(\xi_p)$ est la flèche composée

$$\mathbb{Z}[T] \rightarrow \mathbb{F}_p[T] \hookrightarrow \mathbb{F}_p(T).$$

L'idéal premier correspondant à ξ_p est le noyau de cette dernière, c'est-à-dire (p) . L'adhérence $\overline{\{\xi_p\}}$ est alors égale à $V(p)$, qui n'est autre que $\psi^{-1}(x_p)$ (puisque x_p s'identifie lui-même à $V(p) \subset \text{Spec } \mathbb{Z}$).

Remarque. On aurait pu voir directement sans calculer le noyau de l'évaluation que $\{\xi_p\} = \psi^{-1}(x_p)$, puisque ξ_p est dense dans $\psi^{-1}(x_p)$ et puisque cette dernière est fermée dans Spec $\mathbb{Z}[T]$.

(4.2.3.2) Les points fermés. Soit P un polynôme irréductible unitaire à coefficients dans $\mathbb{F}_p[T]$. Il définit un point fermé $y_{p,P}$ sur Spec $\mathbb{F}_p[T] \simeq \psi^{-1}(x_p)$.

Lorsqu'on voit $y_{p,P}$ comme appartenant à Spec $\mathbb{F}_p[T]$, c'est le lieu des zéros de P , son corps résiduel est le corps fini $\mathbb{F}_p[T]/P$ (de cardinal $p^{\deg P}$) et l'évaluation en $y_{p,P}$ est la flèche quotient $\mathbb{F}_p[T] \rightarrow \mathbb{F}_p[T]/P$.

En conséquence, lorsqu'on voit $y_{p,P}$ comme appartenant à Spec $\mathbb{Z}[T]$, son corps résiduel est $\mathbb{F}_p[T]/P$. L'évaluation $f \mapsto f(y_{p,P})$ est la flèche composée

$$\mathbb{Z}[T] \rightarrow \mathbb{F}_p[T] \rightarrow \mathbb{F}_p[T]/P,$$

qui est surjective puisque composée de deux surjections, et le point $y_{p,P}$ est fermé (ce qui était d'ailleurs évident *a priori*, puisqu'il est fermé dans une fibre fermée).

L'idéal maximal correspondant à $y_{p,P}$ est le noyau de $f \mapsto f(y_{p,P})$. On vérifie aussitôt que si $P^\sharp$ désigne un relevé quelconque de P dans $\mathbb{Z}[T]$, ledit noyau est engendré par p et $P^\sharp$; on a en conséquence $V(p, P^\sharp) = \{y_{p,P}\}$.

Par exemple, considérons le cas où $p = 7$, où $P = T - 3$ (et où l'on peut prendre $P^\sharp = T - 3$). Lorsqu'on considère $y_{7,T-3}$ comme appartenant à $\psi^{-1}(x_7) \simeq \text{Spec } \mathbb{F}_7[T]$, c'est l'unique point d'annulation de $T - 3$; c'est donc simplement l'élément 3 de $\mathbb{F}_7$, vu comme point de Spec $\mathbb{F}_7[T]$ de corps résiduel $\mathbb{F}_7$.

Lorsqu'on voit $y_{7,T-3}$ comme appartenant à Spec $\mathbb{Z}[T]$ son corps résiduel est $\mathbb{F}_7$, l'évaluation en $y_{7,T-3}$ envoie un polynôme $P \in \mathbb{Z}[T]$ sur la classe modulo 7 de $P(3)$, et l'on a $\{y_{7,T-3}\} = V(7, T - 3)$.

(4.2.4) Retour à l'étude de $\overline{\{y_{\eta,P}\}}$, où P est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[T]$. Nous reprenons les notations P et P_0 du 4.2.2.2, et allons décrire un peu plus précisément l'adhérence $V(P_0)$ de $y_{\eta,P}$, en regardant sa trace sur chacune des fibres. Comme $y_{\eta,P}$ est fermé dans $\psi^{-1}(\eta)$, on a $V(P_0) \cap \psi^{-1}(\eta) = \{y_{\eta,P}\}$.

Écrivons $P_0 = \sum a_i T^i$. Soit p un nombre premier; nous noterons $a \mapsto \bar{a}$ la réduction modulo p . L'intersection de $V(P_0)$ avec $\psi^{-1}(x_p) \simeq \text{Spec } \mathbb{F}_p[T]$ s'identifie au fermé $V(\sum \bar{a}_i T^i)$ de Spec $\mathbb{F}_p[T]$.

(4.2.4.1) Par définition de P_0 , les a_i sont globalement premiers entre eux; en particulier ils ne peuvent être tous nuls modulo p , et $\sum \bar{a}_i T^i$ est donc un élément *non nul* de $\mathbb{F}_p[T]$; en conséquence, $V(P_0) \cap \psi^{-1}(x_p)$ est un ensemble fini de points fermés.

Cet ensemble peut être vide : c'est le cas si et seulement si $\sum \bar{a}_i T^i$ est inversible, c'est-à-dire (compte-tenu du fait qu'il est non nul) si et seulement si $\bar{a}_i = 0$ pour tout $i \geq 1$, ou encore si et seulement si p divise a_i pour tout $i \geq 1$.

(4.2.4.2) Il résulte de ce qui précède que l'ensemble des nombres premiers p tels que $\overline{\{y_{\eta,P}\}} \cap \psi^{-1}(x_p) = \emptyset$ est *fini*; autrement dit, $\overline{\{y_{\eta,P}\}}$ rencontre presque toutes les fibres fermées de ψ .

En particulier, $\overline{\{y_{\eta,P}\}}$ n'est pas réduit au singleton $\{y_{\eta,P}\}$ et le point $y_{\eta,P}$ n'est pas fermé. Il découle alors de toute l'étude menée ci-dessus que les points

fermés de $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$ sont exactement les points fermés de ses fibres fermées au-dessus de $\text{Spec } \mathbb{Z}$, ou encore ses points à corps résiduel fini.

(4.2.5) Étude de $\overline{\{y_{\eta,P}\}}$: deux exemples explicites.

(4.2.5.1) *Le cas où $P = T^2 + 1$.* Dans ce cas $P_0 = T^2 + 1$ aussi. Soit p un nombre premier. Nous allons décrire l'intersection de $\overline{\{y_{\eta,T^2+1}\}} = V(T^2 + 1)$ avec $\psi^{-1}(x_p) \simeq \text{Spec } \mathbb{F}_p[T]$. Elle s'identifie à $V(T^2 + 1) \subset \text{Spec } \mathbb{F}_p[T]$. On distingue trois cas.

- *Supposons que $p \equiv -1 \pmod{4}$.* Le polynôme $T^2 + 1$ est alors irréductible dans $\mathbb{F}_p[T]$. En conséquence, $\overline{\{y_{\eta,T^2+1}\}} \cap \psi^{-1}(x_p)$ consiste en un point fermé dont le corps résiduel est $\mathbb{F}_p[T]/(T^2 + 1)$ (qui compte p^2 éléments).

- *Supposons que $p \equiv 1 \pmod{4}$.* Le polynôme $T^2 + 1$ de $\mathbb{F}_p[T]$ s'écrit alors $(T - a)(T + a)$ pour un certain $a \in \mathbb{F}_p^\times$. En conséquence, $\overline{\{y_{\eta,T^2+1}\}} \cap \psi^{-1}(x_p)$ est le sous-ensemble $V(T - a) \cup V(T + a)$ de $\text{Spec } \mathbb{F}_p[T]$, qui est égal à $\{a, -a\}$; ses deux points ont pour corps résiduel $\mathbb{F}_p$.

- *Supposons que $p = 2$.* Dans l'anneau $\mathbb{F}_2[T]$ on a $T^2 + 1 = (T - 1)^2$. En conséquence, $\overline{\{y_{\eta,T^2+1}\}} \cap \psi^{-1}(x_2)$ est le sous-ensemble $V(T - 1)$ de $\text{Spec } \mathbb{F}_2[T]$; c'est donc le singleton $\{1\}$, dont l'unique point est de corps résiduel $\mathbb{F}_2$.

(4.2.5.2) *Le cas où $P = T - (1/2)$.* Le point $y_{\eta,P}$ est alors simplement l'élément $1/2$ de $\mathbb{Q}$, vu comme point de $\text{Spec } \mathbb{Q}[T]$ de corps résiduel $\mathbb{Q}$; et le polynôme P_0 est égal à $2T - 1$.

Soit p un nombre premier. Nous allons décrire l'intersection du fermé $\overline{\{y_{\eta,T-(1/2)}\}} = V(2T - 1)$ avec la fibre $\psi^{-1}(x_p) \simeq \text{Spec } \mathbb{F}_p[T]$. Cette intersection s'identifie à $V(2T - 1) \subset \text{Spec } \mathbb{F}_p[T]$. On distingue deux cas.

- *Supposons que p est impair.* Dans ce cas $(1/2)$ existe dans $\mathbb{F}_p$. En conséquence, $\overline{\{y_{\eta,T-(1/2)}\}} \cap \psi^{-1}(x_p)$ est le sous-ensemble $V(T - (1/2))$ de $\text{Spec } \mathbb{F}_p[T]$, qui n'est autre que le singleton $\{(1/2)\}$, dont l'unique point est de corps résiduel $\mathbb{F}_p$.

- *Supposons que $p = 2$.* Le polynôme $2T - 1$ de $\mathbb{F}_2[T]$ est alors égal à 1. En conséquence, $\overline{\{y_{\eta,T-(1/2)}\}} \cap \psi^{-1}(x_2)$ est le sous-ensemble $V(1)$ de $\text{Spec } \mathbb{F}_2[T]$, qui est *vide*.

Le spectre de $k[S, T]$

(4.2.6) On fixe un corps *algébriquement clos* k . Nous allons décrire dans ce qui suit le spectre de $k[S, T]$ par une démarche parallèle à celle suivie *supra* à propos de $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$. Notons toutefois que la situation traitée ici est un peu plus «géométrique», dans la mesure où $\text{Spec } k[S]$ est l'avatar schématique de la droite affine k , et $\text{Spec } k[S, T]$ celui du plan affine k^2 (cf. 4.1.21 et sq.).

On note $\psi: \text{Spec } k[S, T] \rightarrow \text{Spec } k[S]$ la flèche induite par le plongement $k[S] \hookrightarrow k[S, T]$. Pour tout point x de $\text{Spec } k[S, T]$, la fibre $\psi^{-1}(x)$ s'identifie au spectre de $k[S][T] \otimes_{k[S]} \kappa(x)$, c'est-à-dire à $\text{Spec } \kappa(x)[T]$.

(4.2.6.1) Tout élément λ de k peut être vu comme un point fermé de $\text{Spec } k[T]$ de corps résiduel k – le morphisme d'évaluation correspondant est simplement la surjection $f \mapsto f(\lambda)$, et $V(T - \lambda) = \{\lambda\}$. Comme k est algébriquement clos, on obtient ainsi tous les points fermés de $\text{Spec } k[S]$ (4.1.18.3).

(4.2.6.2) Rappelons quelques faits vus en 4.1.21 et sq. (cf. notamment 4.1.21.5). Tout point (λ, μ) de k^2 peut être identifié à un point fermé de Spec $k[S, T]$ dont le corps résiduel est k ; le morphisme d'évaluation correspondant est simplement la surjection $f \mapsto f(\lambda, \mu)$; et l'idéal maximal associé, c'est-à-dire le noyau de cette surjection, est $(S - \mu, T - \lambda)$.

Il résulte de 4.1.21.2, qui repose *in fine* sur le *Nullstellensatz*, que l'on obtient ainsi *tous* les points fermés de Spec $k[S, T]$; mais l'étude ci-dessous permettra de retrouver directement ce fait de manière plus élémentaire.

(4.2.7) La fibre générique. Soit η le point générique de Spec $k[S]$. La fibre générique $\psi^{-1}(\eta)$ s'identifie à Spec $k(S)[T]$ et possède donc deux types de points.

(4.2.7.1) Le point générique. Désignons par ξ_η le point générique de Spec $k(S)[T] \simeq \psi^{-1}(\eta)$.

Lorsqu'on voit ξ_η comme point de Spec $k(S)[T]$, son corps résiduel est $k(S, T)$, et le morphisme d'évaluation $f \mapsto f(\xi_\eta)$ est simplement le plongement $k(S)[T] \hookrightarrow k(S, T)$.

En conséquence, lorsqu'on voit ξ_η comme appartenant à Spec $k[S, T]$, son corps résiduel est $k(S, T)$, et l'évaluation $f \mapsto f(\xi_\eta)$ est la flèche composée

$$k[S, T] \hookrightarrow k(S)[T] \hookrightarrow k(S, T).$$

L'idéal premier correspondant à ξ_η est le noyau de cette dernière, c'est-à-dire l'idéal nul. L'adhérence $\overline{\{\xi_\eta\}}$ est alors égale à $V(0)$, qui n'est autre que Spec $k[S, T]$ tout entier.

(4.2.7.2) Les points fermés. Soit $P \in k(S)[T]$ un polynôme irréductible unitaire. Il définit un point fermé $y_{\eta, P}$ sur Spec $k(S)[T] \simeq \psi^{-1}(\eta)$.

Lorsqu'on voit $y_{\eta, P}$ comme un point de Spec $k(S)[T]$ c'est le lieu des zéros de P , son corps résiduel est $k(S)[T]/P$ et l'évaluation en $y_{\eta, P}$ est la flèche quotient $k(S)[T] \rightarrow k(S)[T]/P$.

En conséquence, lorsqu'on voit $y_{\eta, P}$ comme appartenant à Spec $k[S, T]$, son corps résiduel est $k(S)[T]/P$, et l'évaluation $f \mapsto f(y_{\eta, P})$ est la flèche composée

$$k[S, T] \hookrightarrow k(S)[T] \rightarrow k(S)[T]/P.$$

L'idéal premier correspondant à $y_{\eta, P}$ est le noyau de cette dernière flèche. Un raisonnement fondé sur la factorialité de $k[S]$ assure que ce noyau est l'idéal (P_0) , où P_0 est le produit de P par le plus petit multiple commun des dénominateurs de ses coefficients (écrits sous forme irréductible); c'est un polynôme appartenant à $k[S][T]$ dont le contenu (le plus grand diviseur commun des coefficients) vaut 1.

L'adhérence $\overline{\{y_{\eta, P}\}}$ est donc égale à $V(P_0)$; nous en dirons quelques mots un peu plus loin.

(4.2.8) Les fibres fermées. Soit λ un élément de k , que nous voyons comme un point fermé de Spec $k[S]$ (4.2.6.1). Son corps résiduel est k – il est plus précisément égal à $k[S]/(S - \lambda)$ en tant que $k[S]$ -algèbre. La fibre fermée $\psi^{-1}(\lambda)$ s'identifie dès lors au spectre de

$$k \otimes_{k[S]} k[S, T] \xrightarrow[S \mapsto \lambda]{\simeq} k[T].$$

(4.2.8.1) *Le point générique.* Désignons par ξ_λ le point générique de $\text{Spec } k[T] \simeq \psi^{-1}(\lambda)$.

Lorsqu'on voit ξ_λ comme un point de $\text{Spec } k[T]$, son corps résiduel est $k(T)$, et le morphisme d'évaluation $f \mapsto f(\xi_\lambda)$ est le plongement $k[T] \hookrightarrow k(T)$.

En conséquence, lorsqu'on voit ξ_λ comme appartenant à $\text{Spec } k[S, T]$, son corps résiduel est $k(T)$, et l'évaluation $f \mapsto f(\xi_\lambda)$ est la flèche composée

$$k[S, T] \xrightarrow{S \mapsto \lambda} k[T] \hookrightarrow k(T) .$$

L'idéal premier correspondant à ξ_λ est le noyau de cette dernière, c'est-à-dire $(S - \lambda)$. L'adhérence $\overline{\{\xi_\lambda\}}$ est alors égale à $V(S - \lambda)$, qui n'est autre que $\psi^{-1}(\lambda)$ (puisque $\{\lambda\}$ est lui-même égal à $V(S - \lambda) \subset \text{Spec } k[S]$).

Remarque. On aurait pu voir directement sans calculer le noyau de l'évaluation que $\overline{\{\xi_\lambda\}} = \psi^{-1}(\lambda)$, puisque ξ_λ est dense dans $\psi^{-1}(\lambda)$ et puisque cette dernière est fermée dans $\text{Spec } k[S, T]$.

(4.2.8.2) *Les points fermés.* Soit μ un élément de k . On peut le voir comme un point fermé de corps résiduel k sur $\text{Spec } k[T] \simeq \psi^{-1}(\lambda)$; la flèche d'évaluation correspondante est simplement $f \mapsto f(\mu)$.

En conséquence, lorsqu'on voit ce point comme appartenant à $\text{Spec } k[S, T]$, son corps résiduel est k , et l'évaluation correspondante est la flèche composée

$$k[S, T] \xrightarrow{S \mapsto \lambda} k[T] \xrightarrow{T \mapsto \mu} k ,$$

qui n'est autre que $f \mapsto f(\lambda, \mu)$. Ce point est donc simplement le point fermé (λ, μ) .

(4.2.9) Retour à l'étude de $\overline{\{y_{\eta, P}\}}$, où P est un polynôme irréductible de $k(S)[T]$. Nous reprenons les notations P et P_0 du 4.2.7.2, et allons décrire un peu plus précisément l'adhérence $V(P_0)$ de x_P , en regardant sa trace sur chacune des fibres.

Comme $y_{\eta, P}$ est fermé dans $\psi^{-1}(\eta)$, on a $V(P_0) \cap \psi^{-1}(\eta) = \{y_{\eta, P}\}$. Écrivons $P_0 = \sum a_i T^i$. Soit $\lambda \in k$. L'intersection de $V(P_0)$ avec la fibre $\psi^{-1}(\lambda) \simeq \text{Spec } k[T]$ s'identifie au fermé $V(\sum a_i(\lambda) T^i)$ de $\text{Spec } k[T]$.

(4.2.9.1) Par définition de P_0 , les a_i sont globalement premiers entre eux; en particulier ils ne peuvent être tous nuls modulo $S - \lambda$, et $\sum a_i(\lambda) T^i$ est donc un élément *non nul* de $k[T]$; en conséquence, $V(P_0) \cap \psi^{-1}(\lambda)$ est un ensemble fini de points fermés.

Cet ensemble peut être vide : c'est le cas si et seulement si $\sum a_i(\lambda) T^i$ est inversible, c'est-à-dire (compte-tenu du fait qu'il est non nul) si et seulement si $a_i(\lambda) = 0$ pour tout $i \geq 1$, ou encore si et seulement si $S - \lambda$ divise a_i pour tout $i \geq 1$.

(4.2.9.2) Il résulte de ce qui précède que l'ensemble des éléments λ de k tels que $\overline{\{y_{\eta, P}\}} \cap \psi^{-1}(\lambda) = \emptyset$ est *fini*; autrement dit, $\overline{\{y_{\eta, P}\}}$ rencontre presque toutes les fibres fermées de ψ , et donc une infinité de telles fibres (le corps k est algébriquement clos, et partant infini).

En particulier, $\overline{\{y_{\eta, P}\}}$ n'est pas réduit au singleton $\{y_{\eta, P}\}$ et le point $y_{\eta, P}$ n'est pas fermé. Il découle alors de toute l'étude menée ci-dessus que les points

fermés de Spec $k[S, T]$ sont exactement les points de la forme (λ, μ) avec λ et μ dans k ; on retrouve ainsi 4.1.21.7 dans ce cas particulier, comme annoncé plus haut.

(4.2.10) Étude de $\overline{\{y_{\eta, P}\}}$: deux exemples explicites.

(4.2.10.1) *Le cas où $P = T^2 - S$ et où k est de caractéristique différente de 2.* Dans ce cas $P_0 = T^2 - S$ aussi. Soit $\lambda \in k$. Nous allons décrire l'intersection de $\overline{\{y_{\eta, T^2-S}\}} = V(T^2 - S)$ avec la fibre $\psi^{-1}(\lambda) \simeq \text{Spec } k[T]$. Cette intersection s'identifie à $V(T^2 - \lambda) \subset \text{Spec } k[T]$. On distingue deux cas.

- *Supposons que $\lambda \neq 0$.* Le polynôme $T^2 - \lambda$ de $k[T]$ est alors scindé à racines simples (car la caractéristique de k est différente de 2); il s'écrit $(T - \sqrt{\lambda})(T + \sqrt{\lambda})$ où l'on désigne par $\sqrt{\lambda}$ l'une des deux racines carrées de λ . En conséquence, $\overline{\{y_{\eta, T^2-S}\}} \cap \psi^{-1}(\lambda)$ est le sous-ensemble $V(T - \sqrt{\lambda}) \cup V(T + \sqrt{\lambda})$ de Spec $k[T]$, qui consiste en deux points fermés, à savoir $\sqrt{\lambda}$ et $(-\sqrt{\lambda})$. Vus comme points de Spec $k[S, T]$, ce sont les points $(\lambda, \sqrt{\lambda})$ et $(\lambda, -\sqrt{\lambda})$.

- *Supposons que $\lambda = 0$.* Dans ce cas, $\overline{\{y_{\eta, T^2-S}\}} \cap \psi^{-1}(\lambda)$ est le sous-ensemble $V(T)$ de Spec $k[T]$. Il consiste en un seul point fermé, à savoir 0. Vu comme point de Spec $k[S, T]$, c'est l'origine $(0, 0)$.

(4.2.10.2) *Le cas où $P = T - (1/S)$.* Dans ce cas $P_0 = ST - 1$. Soit λ appartenant à k . Nous allons décrire l'intersection de $\overline{\{y_{\eta, T-(1/S)}\}} = V(ST - 1)$ avec $\psi^{-1}(\lambda) \simeq \text{Spec } k[T]$, intersection qui s'identifie à $V(\lambda T - 1) \subset \text{Spec } k[T]$. On distingue deux cas.

- *Supposons que $\lambda \neq 0$.* Dans ce cas $\overline{\{y_{\eta, T-(1/S)}\}} \cap \psi^{-1}(\lambda)$ est le sous-ensemble $V(T - (1/\lambda))$ de Spec $k[T]$. Il consiste en un seul point fermé, à savoir $(1/\lambda)$. Vu comme point de Spec $k[S, T]$, c'est le point $(\lambda, 1/\lambda)$.

- *Supposons que $\lambda = 0$.* Dans ce cas, $\overline{\{y_{\eta, T-(1/S)}\}} \cap \psi^{-1}(\lambda)$ est le sous-ensemble $V(1)$ de Spec $k[T]$, qui est *vide*.

(4.2.11) Récapitulation. On déduit de ce qui précède que Spec $k[S, T]$ comprend trois types de points.

(4.2.11.1) Il y a tout d'abord les points classiques, qui sont exactement les points fermés de Spec $k[S, T]$, ou encore ceux de corps résiduel k ; ils constituent un ensemble en bijection naturelle avec k^2 .

(4.2.11.2) Il y a ensuite le point générique que nous avons noté ξ_η , dont l'adhérence est Spec $k[S, T]$ tout entier, et dont le corps résiduel est $k(S, T)$. L'idéal correspondant à ξ_η est l'idéal nul, et l'évaluation en ξ_η est le plongement $k[S, T] \hookrightarrow k(S)[T]$.

(4.2.11.3) Il y a enfin une famille de points «intermédiaires» : ceux que nous avons notés ξ_λ où $\lambda \in k$ et $y_{\eta, P}$, où P est un polynôme irréductible de $k(S)[T]$. Leur point commun est le suivant : l'idéal premier correspondant à chacun d'eux est engendré par un polynôme irréductible de $k[S, T]$ (il s'agit de $S - \lambda$ pour ξ_λ , et de celui que nous avons noté P_0 pour $y_{\eta, P}$ – le lecteur vérifiera qu'on obtient ainsi tous les polynômes irréductibles de $k[S, T]$).

Si z est l'un de ces points et si Q désigne le polynôme irréductible de $k[S, T]$ qui lui correspond, il résulte de 4.2.8.1, 4.2.9 et 4.2.9.1 que $\{z\} = V(Q)$ ne comprend, hormis le point z lui-même, que des points fermés; on a donc

$$\overline{\{z\}} = \{z\} \cup \{(\lambda, \mu) \in k^2, Q(\lambda, \mu) = 0\}.$$

L'ensemble $E := \{(\lambda, \mu) \in k^2, Q(\lambda, \mu) = 0\}$, qui n'est autre que la courbe algébrique «naïve» d'équation $Q = 0$, est toujours infini :

- si $z = \xi_\lambda$ pour un certain λ alors $Q = (S - \lambda)$ et $E = \{(\lambda, \mu)\}_{\mu \in k}$;
- si $z = y_{\eta, P}$ pour un certain P alors $Q = P_0$ et l'on a vu plus haut (4.2.9 et sq.) que l'ensemble $E_\lambda := \{\mu \in k \text{ t.q. } (\lambda, \mu) \in E\}$ est fini pour tout λ , et non vide pour presque tout λ .

Quant au corps résiduel $\kappa(z) = \text{Frac } k[S, T]/Q$, il se décrit plus précisément comme suit (4.2.7.2, 4.2.8.1) :

- si $z = \xi_\lambda$ pour un certain λ alors $\kappa(z) \simeq k(T)$;
- si $z = y_{\eta, P}$ pour un certain P alors $\kappa(z) = k(S)[T]/P$.

Dans les deux cas, $\kappa(z)$ est une extension de k de degré de transcendance égal à 1.

(4.2.12) Quelques commentaires. Ce qui précède met bien en évidence l'analogie entre $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$ et $\text{Spec } k[S, T]$. Le lecteur pourra d'ailleurs se convaincre que nous aurions pu nous contenter d'un paragraphe coiffant ces deux exemples, en étudiant $\text{Spec } A[T]$ *via* le morphisme $\psi: \text{Spec } A[T] \rightarrow \text{Spec } A$ induit par $A \hookrightarrow A[T]$, où A est un anneau principal *ayant un ensemble infini d'éléments irréductibles*.

(4.2.12.1) La condition sur l'existence d'une infinité d'éléments irréductibles sert simplement à assurer que si $y_{\eta, P}$ est un point fermé de la fibre générique $\psi^{-1}(\eta)$, son adhérence rencontre au moins une fibre fermée et n'est en particulier pas réduite à $\{y_{\eta, P}\}$. Nous allons esquisser ici un contre-exemple à ce fait lorsque A n'a qu'un nombre fini d'irréductibles ; les détails sont laissés au lecteur.

Soit p un nombre premier. On vérifie que le localisé $\mathbb{Z}_{(p)}$ de $\mathbb{Z}$ est principal, et a un unique élément irréductible, à savoir p . L'adhérence $\{y_{\eta, T-(1/p)}\}$ ne rencontre alors pas la fibre fermée de $\psi: \text{Spec } \mathbb{Z}_{(p)}[T] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_{(p)}$, et $y_{\eta, T-(1/p)}$ apparaît ainsi comme un point fermé de $\text{Spec } \mathbb{Z}_{(p)}[T]$ *qui est situé sur la fibre générique de ψ* . L'évaluation correspondante n'est autre que la flèche naturelle de $\mathbb{Z}_{(p)}[T]$ vers $\mathbb{Q}$ qui envoie T sur $1/p$, et qui est effectivement surjective puisque $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}[1/p]$.

(4.2.12.2) Cette analogie entre $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$ et $\text{Spec } k[S, T]$ permet de penser en termes géométriques à $\mathbb{Z}[T]$, qui pouvait apparaître comme de nature davantage algébrique ou arithmétique¹. Nous attirons par exemple l'attention du lecteur sur la similitude des exemples 4.2.5.2 et 4.2.10.2 : le fermé $V(2T-1)$ de $\text{Spec } \mathbb{Z}[T]$ ressemble beaucoup à l'hyperbole $V(ST-1) \subset \text{Spec } k[S, T]$. Cette dernière rencontre toutes les droites verticales, c'est-à-dire les fibres fermées de ψ , à l'exception de la fibre en l'origine : comme S s'annule en l'origine, l'hyperbole ne coupe pas la fibre correspondante – en fait, elle la rencontre plus précisément «à l'infini», en un sens que nous préciserons plus loin lorsque nous aurons introduit la géométrie projective.

1. Insistons sur le fait que, contrairement à une impression qu'on peut avoir à première vue (par exemple face à la profusion de points étranges sur un objet censé jouer le rôle du plan affine), la théorie des schémas est faite pour favoriser l'intuition géométrique à propos d'objets sur lesquels elle semblait inopérante à première vue, et pas pour la chasser lorsqu'elle est naturellement présente !

Le même phénomène vaut pour $V(2T - 1) \subset \text{Spec } \mathbb{Z}[T]$: puisque 2, vu comme fonction sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, s'annule en x_2 , le fermé $V(2T - 1)$ ne rencontre pas la fibre $\psi^{-1}(x_2)$ – et là encore, nous verrons plus bas qu'il la rencontre en fait «à l'infini», ce qui permettra au lecteur imaginaire de penser à cette fibre comme à une asymptote de $V(2T - 1)$.

4.3 Compléments sur la topologie de Spec A

Idéaux radicaux et fermés de Zariski

(4.3.1) Soit A un anneau et soit I un idéal de A . On note $\sqrt{I}$ l'image réciproque du nilradical de A/I par la flèche quotient $A \rightarrow A/I$; c'est un idéal de A , qu'on peut également décrire comme l'ensemble des $a \in A$ pour lesquels il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \in I$. On dit que $\sqrt{I}$ est le *radical* de I .

(4.3.1.1) Les faits suivants découlent immédiatement de la définition : si I est un idéal de A alors $I \subset \sqrt{I}$ et $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$; si J est un idéal de A tel que $I \subset J$ alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$; l'idéal $\sqrt{(0)}$ est le nilradical de A .

(4.3.1.2) Il résulte de 4.3.1.1 que si J est un idéal de A tel que

$$I \subset J \subset \sqrt{I}$$

alors $\sqrt{J} = \sqrt{I}$.

(4.3.2) Nous dirons qu'un idéal I de A est *radical* s'il est égal à son radical ; cela revient à demander que A/I soit réduit.

(4.3.2.1) Si I est un idéal de A alors $\sqrt{I}$ est radical (4.3.1.1).

(4.3.2.2) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A il est radical ($A/\mathfrak{p}$ est intègre, et *a fortiori* réduit).

(4.3.3) La formule $I \mapsto V(I)$ définit une surjection décroissante (pour l'inclusion) de l'ensemble des idéaux de A vers l'ensemble des fermés de Spec A .

Par ailleurs, la formule

$$F \mapsto \mathcal{J}(F) := \{f \in A \text{ t.q. } \forall x \in F \ f(x) = 0\}$$

définit une application décroissante de l'ensemble des fermés de Spec A vers l'ensemble des idéaux de A .

Il résulte immédiatement des définitions que $I \subset \mathcal{J}(V(I))$ pour tout idéal I de A , et que $F \subset V(\mathcal{J}(F))$ pour tout fermé F de Spec A .

(4.3.3.1) Soit F un fermé de Spec A , et soit $f \in A$ tel que $f^n \in \mathcal{J}(F)$ pour un certain entier n . On a alors $f^n(x) = 0$ pour tout $x \in F$, et partant $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$; ainsi, $f \in \mathcal{J}(F)$ et $\mathcal{J}(F)$ est radical.

(4.3.3.2) Soit I un idéal de A et soit $f \in A$. La flèche $A \rightarrow A/I$ induit un homéomorphisme de Spec A/I sur $V(I)$. En conséquence on a pour tout $f \in A$ l'équivalence entre les assertions suivantes :

- i) $f \in \mathcal{J}(V(I))$, i.e. f s'annule en tout point x de $V(I)$;

ii) la classe $\bar{f}$ de f modulo I s'annule en tout point de $\text{Spec } A/I$.

Mais cette dernière condition revient à demander que $\bar{f}$ soit nilpotente dans A/I , donc que $f \in \sqrt{I}$. On a ainsi démontré que

$$\mathcal{J}(V(I)) = \sqrt{I}.$$

(4.3.4) Lemme. *Les flèches $I \mapsto V(I)$ et $F \mapsto \mathcal{J}(F)$ établissent une bijection décroissante d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des idéaux radicaux de A et l'ensemble des fermés de $\text{Spec } A$.*

Démonstration. Soit I un idéal radical de A . On a alors $\mathcal{J}(V(I)) = \sqrt{I} = I$ (la première égalité est due à 4.3.3.2, la seconde à l'hypothèse de radicalité).

Soit F un fermé de $\text{Spec } A$; écrivons $F = V(J)$ pour un certain idéal J de A . On sait que $\mathcal{J}(F)$ est radical (4.3.3.1). On a $F \subset V(\mathcal{J}(F))$. Par ailleurs comme $F = V(J)$ il vient $J \subset \mathcal{J}(F)$ et donc $V(\mathcal{J}(F)) \subset V(J) = F$. Ainsi, $V(\mathcal{J}(F)) = F$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(4.3.5) Commentaire. Le lemme 4.3.4 ci-dessus affirme en particulier que la restriction de $I \mapsto V(I)$ à l'ensemble des idéaux radicaux est injective. Mais on peut également en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux idéaux I et J (non nécessairement radicaux) vérifient l'égalité $V(I) = V(J)$. En effet, comme $F \mapsto \mathcal{J}(F)$ est injective en vertu de *loc. cit.*, ce sera le cas si et seulement si $\mathcal{J}(V(I)) = \mathcal{J}(V(J))$, c'est-à-dire si et seulement si $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ (4.3.3.2).

C'est vrai en particulier lorsque $J = 0$. On a donc $V(I) = V(0) = \text{Spec } A$ si et seulement si $\sqrt{I}$ est égal au nilradical de A ; on voit immédiatement que c'est le cas si et seulement si I lui-même est contenu dans le nilradical de A , et l'on retrouve ainsi ce qui avait été mentionné en 4.1.26.1.

Le cas d'une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos

(4.3.6) Supposons maintenant que A est une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos k , et choisissons un isomorphisme de k -algèbres $A \simeq k[T_1, \dots, T_n]/(P_1, \dots, P_r)$. On reprend les notations de 4.1.21 *et sq.* : on pose $X = \text{Spec } A$, et l'on note $X(k)$ l'ensemble $\text{Hom}_k(A, k)$, qui coïncide avec l'ensemble X_0 des points fermés de X . L'ensemble $X(k)$ s'identifie par ailleurs à celui des n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$ en lesquels les P_j s'annulent.

(4.3.7) On munit $X(k)$ de la topologie induite par celle de X , qu'on appelle encore topologie de Zariski; ses fermés sont les parties de la forme $V(E) \cap X(k)$ où E est une partie de A (on peut d'ailleurs se limiter aux idéaux de A) et une base d'ouverts de $X(k)$ est formée des parties de la forme $D(f) \cap X(k)$ où $f \in A$.

Si l'on voit $X(k)$ comme un ensemble de n -uplets, alors pour tout $E \subset A$ et tout $f \in A$ on a

$$E \cap X(k) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X(k) \text{ t.q. } g(x_1, \dots, x_n) = 0 \ \forall \ g \in E\}$$

et

$$D(f) \cap X(k) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X(k) \text{ t.q. } f(x_1, \dots, x_n) \neq 0\}.$$

(4.3.8) Soit T un espace topologique. On notera $\mathcal{C}(T)$ le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{P}(T)$ contenant les fermés, les ouverts, et qui est stable par unions finies, intersections finies et passage au complémentaire. On vérifie aussitôt que $\mathcal{C}(T)$ est l'ensemble des parties de T de la forme $\bigcup_{i \in I} U_i \cap F_i$ où I est un ensemble fini, où les U_i sont des ouverts et où les F_i sont des fermés.

(4.3.9) **Proposition.** *L'application $C \mapsto C(k) := C \cap X(k)$ induit une bijection de $\mathcal{C}(X)$ sur $\mathcal{C}(X(k))$.*

Démonstration. Par définition de la topologie induite, $C(k) \in \mathcal{C}(X(k))$ pour tout $C \in \mathcal{C}(X)$, et toute partie appartenant à $\mathcal{C}(X(k))$ est de la forme $C(k)$ pour une telle C . Il reste donc à s'assurer que $C \mapsto C(k)$ est injective.

(4.3.9.1) *Un cas particulier.* Soit $C \in \mathcal{C}(X)$ telle que $C(k) = \emptyset$; nous allons montrer que $C = \emptyset$. Comme C est une union finie de parties de la forme $U \cap F$, où U est ouvert et F fermé, on peut supposer que $C = U \cap F$. Le fermé F s'écrit $V(I)$ pour un certain I , et s'identifie donc à $\text{Spec } A/I$. Quitte à remplacer A par A/I , on peut supposer $F = \text{Spec } A$ et $C = U$. Dans ce cas C est réunion d'ouverts de la forme $D(f)$, avec $f \in A$, et l'on est ainsi ramené au cas où $C = D(f)$. L'ouvert C s'identifie alors au spectre de la k -algèbre de type fini A_f . Comme $C(k) = \emptyset$, le spectre de A_f n'a pas de point fermé, ce qui veut dire que A_f est nulle et que $C = \text{Spec } A_f = \emptyset$.

(4.3.9.2) *Le cas général.* Soient C et D deux parties appartenant à $\mathcal{C}(X)$ telles que $C(k) = D(k)$. Soit C' l'intersection de C et du complémentaire de D , et soit D' l'intersection de D et du complémentaire de C ; les parties C' et D' appartiennent à $\mathcal{C}(X)$. Par hypothèse $C'(k) = D'(k) = \emptyset$; le cas particulier traité au 4.3.9.1 ci-dessus assure alors que $C' = D' = \emptyset$, et donc que $C = D$. $\square$

(4.3.10) Quelques conséquences.

(4.3.10.1) Soient C et D deux parties appartenant à $\mathcal{C}(X)$. On a les équivalences

$$C \subset D \iff C \cap (X \setminus D) = \emptyset \iff C(k) \cap (X(k) \setminus D(k)) = \emptyset \iff C(k) \subset D(k)$$

(la deuxième équivalence découle de la proposition 4.3.9 ci-dessus, les autres sont tautologiques).

(4.3.10.2) Soit F un fermé de Zariski de $X(k)$; on notera $\mathcal{J}(F)$ l'idéal de A formé des fonctions f qui s'annulent en tout point de F .

Le fermé F est de la forme $G(k)$, où G est un fermé de Zariski de X qui est uniquement déterminé d'après la proposition 4.3.9 ci-dessus. Si $f \in A$ on a les équivalences

$$f \in \mathcal{J}(F) \iff G(k) \subset V(f)(k) \iff G \subset V(f) \iff f \in \mathcal{J}(G),$$

la deuxième équivalence résultant de 4.3.10.1. Ainsi $\mathcal{J}(F) = \mathcal{J}(G)$.

(4.3.10.3) En combinant 4.3.10.2, la proposition 4.3.9 et le lemme 4.3.4, on voit que $I \mapsto V(I)(k)$ et $F \mapsto \mathcal{J}(F)$ établissent une bijection entre l'ensemble des idéaux radicaux de A et l'ensemble des fermés de Zariski de $X(k)$.

(4.3.11) La proposition 4.3.9 et ses conséquences signalées en 4.3.10 et sq. expliquent pourquoi l'on peut, pour un grand nombre de questions, se passer

du langage des schémas lorsqu'on fait de la géométrie algébrique sur un corps algébriquement clos : dans ce contexte, une partie définissable de manière algébrique (c'est-à-dire par des conditions d'annulation ou de non-annulation de polynômes) est connue sans ambiguïté dès qu'on connaît ses points naïfs, et l'on ne perd donc pas grand-chose à ne considérer que lesdits points.

Espaces topologiques irréductibles, composantes irréductibles, dimension de Krull

(4.3.12) Définition. Soit X un espace topologique. On dit que X est *irréductible* si X est non vide et si pour tout couple (Y, Z) de fermés de X tels que $X = Y \cup Z$ on a $X = Y$ ou $X = Z$.

(4.3.12.1) On peut donner une définition bourbakiste de l'irréductibilité – analogue à celle de l'intégrité donnée en 0.1.3.2 – en disant que X est irréductible si et seulement si toute union finie de fermés stricts de X est stricte ; cela force en particulier la réunion *vide* de tels fermés (qui est l'ensemble vide) à être stricte, et donc X à être non vide.

(4.3.12.2) Il est tautologique qu'un espace topologique X est irréductible si et seulement si $X \neq \emptyset$ et si tout ouvert non vide de X est dense dans X (passer au complémentaire dans la définition initiale).

On en déduit que si X est un espace topologique irréductible, tout ouvert non vide de X est encore irréductible.

(4.3.12.3) Soit X un espace topologique. Si X possède une partie dense irréductible, il est irréductible : c'est immédiat.

Comme un singleton est trivialement irréductible, tout espace topologique possédant un point générique (c'est-à-dire dense) est irréductible.

(4.3.12.4) Il résulte de la définition qu'un espace topologique irréductible est en particulier connexe.

(4.3.13) La notion d'espace irréductible n'a guère d'intérêt lorsqu'on s'intéresse aux espaces topologiques usuels. On démontre par exemple aisément (le lecteur est invité à le faire à titre d'exercice) qu'un espace topologique séparé est irréductible si et seulement si c'est un singleton.

Elle est par contre extrêmement utile en géométrie algébrique, qui manipule des espaces à la topologie assez grossière et très combinatoire. La proposition suivante en est une bonne illustration.

(4.3.14) Proposition. Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) $\text{Spec } A$ a un unique point générique.
- ii) $\text{Spec } A$ a un point générique.
- iii) $\text{Spec } A$ est irréductible.
- iv) Le quotient A_{red} de A par son nilradical est intègre.

Démonstration. On sait que la flèche quotient $A \rightarrow A_{\text{red}}$ induit un homéomorphisme $\text{Spec } A_{\text{red}} \simeq \text{Spec } A$ (4.1.26.1). On peut donc remplacer A par A_{red} , et ainsi supposer que A est réduit, c'est-à-dire que $A = A_{\text{red}}$.

Il est clair que i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii).

Supposons que iii) soit vraie, et montrons que $A = A_{\text{red}}$ est intègre. Comme $\text{Spec } A$ est irréductible, il est non vide et A est donc non nul.

Soient f et g deux éléments de A tels que $fg = 0$. On a alors $\text{Spec } A = V(fg) = V(f) \cup V(g)$.

Par irréductibilité, il vient $\text{Spec } A = V(f)$ ou $\text{Spec } A = V(g)$. En conséquence, f est nilpotente ou g est nilpotente ; comme A est réduit, on a $f = 0$ ou $g = 0$ et A est intègre.

Supposons que iv) soit vraie, et montrons i). Soit $x \in \text{Spec } A$ et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier correspondant. Le point x est générique si et seulement si tout idéal premier de A contient $\mathfrak{p}$; mais il est clair que cette propriété est vérifiée par (0) (qui est premier car A est intègre) et par lui seul, d'où i). $\square$

(4.3.15) Soit A un anneau.

(4.3.15.1) Soit F un fermé de $\text{Spec } A$. On a $F = V(I)$ pour un certain idéal I de A , et F est homéomorphe à $\text{Spec } A/I$. Par la proposition 4.3.14 ci-dessus, F est irréductible si et seulement si il admet un point générique, lequel est alors unique.

On en déduit que $x \mapsto \overline{\{x\}}$ établit une bijection entre $\text{Spec } A$ et l'ensemble de ses fermés irréductibles, la réciproque envoyant un fermé F sur son unique point générique.

(4.3.15.2) Soit I un idéal radical de A . Par définition, A/I est réduit ; il s'ensuit d'après *loc. cit.* que $V(I) \simeq \text{Spec } A/I$ est irréductible si et seulement si A/I est intègre, c'est-à-dire si et seulement si I est premier. En conséquence, $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ et $F \mapsto \mathcal{J}(F)$ établissent une bijection décroissante d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des idéaux premiers de A et celui des fermés irréductibles de $\text{Spec } A$. Bien entendu, cette bijection est simplement la traduction en termes d'idéaux premiers de la bijection décrite au 4.3.15.1 ci-dessus par la formule plus géométrique $x \mapsto \overline{\{x\}}$.

(4.3.16) Intermède culturel. On dit qu'un espace topologique est *sobre* si chacun de ses fermés irréductibles admet un et un seul point générique. On vient de voir que le spectre d'un anneau est sobre.

(4.3.16.1) Tout espace topologique admet une *sobrification* ; nous laissons au lecteur le soin de la définir, et de la construire – suivant la philosophie habituelle : *just do it!*

(4.3.16.2) On démontre que si X et Y sont deux espaces topologiques, les catégories des faisceaux (d'ensembles) sur X et sur Y sont équivalentes si et seulement si X et Y ont même sobrification.

(4.3.17) Interprétation des points schématiques en termes classiques. Soit k un corps algébriquement clos et soit A une k -algèbre de type fini ; posons $X = \text{Spec } A$.

(4.3.17.1) Il résulte de la proposition 4.3.9 et de 4.3.10.1 que $F \mapsto F(k)$ établit une bijection entre l'ensemble des fermés irréductibles de X et l'ensemble des fermés irréductibles de $X(k)$; en conséquence, $x \mapsto \overline{\{x\}}(k)$ établit une bijection entre X et l'ensemble des fermés irréductibles de $X(k)$.

Insistons à ce propos sur le fait que tous les points de l'espace topologique $X(k)$ sont fermés ; en conséquence, un fermé irréductible non

singleton de $X(k)$ (c'est-à-dire, par ce qui précède, un fermé de la forme $\overline{\{x\}}(k)$ avec $x \notin X(k)$) n'a pas de point générique dans $X(k)$.

(4.3.17.2) On voit donc que topologiquement, on peut construire X à partir de $X(k)$ en rajoutant un point générique par fermé irréductible non singleton. L'espace X apparaît ainsi comme la *sobrification* de $X(k)$.

(4.3.17.3) Soit x un point de X et soit G le fermé irréductible $\overline{\{x\}}(k)$. Pour tenter d'appréhender intuitivement le point x , on pourra se référer au slogan suivant : *une propriété (raisonnable) est vraie en x si et seulement si elle est vraie sur un ouvert de Zariski non vide de G .*

C'est par exemple le cas pour l'annulation ou la non-annulation des fonctions : si $f \in A$ et si $f(x) = 0$ alors f est nulle en tout point de G ; et si $f(x) \neq 0$ l'ouvert $D(f) \cap G$ est non vide, puisque $D(f) \cap \{x\} \neq \emptyset$ (il contient x). Mais ce le sera aussi pour un grand nombre d'autres propriétés plus subtiles.

Le passage de la variété naïve $X(k)$ au schéma X s'apparente ainsi à une déclinaison d'un procédé très répandu en mathématiques : on estime souvent avoir intérêt, pour des raisons de confort psychologique, à inventer un objet conceptuellement un peu compliqué pour pouvoir remplacer des énoncés de la forme «*il existe un ensemble sur lequel telle propriété est vraie*» par des énoncés plus agréables de la forme «*telle propriété est vraie en tel point*».

Donnons un exemple de ce type de démarche, qui vous est certainement très familier : *la construction du corps des réels*. On remplace l'objet assez simple $\mathbb{Q}$ par l'objet plus compliqué $\mathbb{R}$, mais on gagne en simplicité des assertions. Par exemple si $P \in \mathbb{Q}[T]$, on a équivalence entre « $P(\sqrt{2}) > 0$ » et «il existe un entier $M > 0$ et un entier $N > 0$ tel que pour tout nombre rationnel positif r satisfaisant les inégalités $2 - 1/M \leq r^2 \leq 2 + 1/M$ on ait $P(r) > 1/N$ ».

Espaces noethériens et composantes irréductibles

(4.3.18) Définition. Soit X un espace topologique. On vérifie sans peine que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) tout ensemble non vide de fermés de X admet un élément minimal (pour l'inclusion) ;
- ii) toute suite décroissante de fermés de X est stationnaire.

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que X est *noethérien*.

(4.3.19) Il découle immédiatement de la définition que tout fermé d'un espace topologique noethérien est encore noethérien.

Nous invitons par ailleurs le lecteur à démontrer qu'un espace topologique X est noethérien si et seulement si tous ses ouverts sont quasi-compacts.

(4.3.20) Exemple. Soit A un anneau noethérien. Tout ensemble non vide d'idéaux de A admet un élément maximal ; c'est en particulier vrai lorsqu'on se restreint aux ensembles d'idéaux radicaux, et il découle alors du lemme 4.3.4 que l'espace topologique $\text{Spec } A$ est noethérien.

(4.3.21) En fait, le lemme 4.3.4 garantit précisément que si A est un anneau, $\text{Spec } A$ est noethérien si et seulement si tout ensemble non vide

d'idéaux radicaux de A a un élément maximal. C'est une propriété *a priori* plus faible que la noethérianité, et l'on peut effectivement construire un exemple d'anneau non noethérien à spectre noethérien. Par exemple, soit k un corps, soit I l'idéal de $k[X_i]_{i \in \mathbb{N}}$ engendré par tous les monômes de degré 2, et soit A le quotient $k[X_i]_{i \in \mathbb{N}}/I$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les points suivants :

- l'idéal $(\overline{X_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est le seul idéal premier de A , et Spec A est donc un singleton, évidemment noethérien ;
- l'idéal $(\overline{X_i})_{i \in \mathbb{N}}$ n'est pas de type fini, et A n'est donc pas noethérien.

(4.3.22) Lemme. *Soit X un espace topologique noethérien. Il existe un ensemble fini E de fermés irréductibles de X possédant les propriétés suivantes :*

- i) les fermés appartenant à E sont deux à deux non comparables pour l'inclusion ;*
- ii) X est la réunion des fermés appartenant à E .*

De plus si E est un tel ensemble, tout fermé irréductible de X est contenu dans (au moins) un fermé appartenant à E , et E apparaît ainsi comme l'ensemble des fermés irréductibles maximaux de X . Il est donc unique, et ses éléments sont appelés les composantes irréductibles de X .

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

(4.3.22.1) Première étape : *X est une réunion finie de fermés irréductibles.* On suppose que ce n'est pas le cas, et l'on note F l'ensemble des fermés de X qui ne sont pas réunion finie de fermés irréductibles. Par hypothèse, $X \in F$ et $F \neq \emptyset$; comme X est noethérien, F admet un élément minimal Y .

Comme $Y \in F$, il n'est pas réunion finie de fermés irréductibles ; en particulier, il est non vide (sinon, ce serait la réunion vide de tels fermés) et non irréductible. Il existe donc deux fermés stricts Z et T de Y tels que $Y = Z \cup T$. Comme Z et T sont strictement contenus dans Y , la minimalité de Y implique qu'ils n'appartiennent pas à F . Chacun d'eux est donc une union finie de fermés irréductibles, et il en va dès lors de même de Y , ce qui est absurde.

(4.3.22.2) Il existe donc un ensemble fini E de fermés irréductibles de X satisfaisant ii). Si Y et Z sont deux fermés appartenant à E avec $Y \subsetneq Z$, alors $X = \bigcup_{T \in E, T \neq Y} T$, et on peut donc retirer Y de E sans altérer la validité de ii). En recommençant l'opération autant de fois que nécessaire, on obtient bien un ensemble fini de fermés irréductibles de X qui satisfait i) et ii).

(4.3.22.3) Soit maintenant E un tel ensemble et soit Y un fermé irréductible de X . Comme X est réunion des éléments de E , le fermé Y est réunion de ses fermés $Y \cap Z$ où Z parcourt E . Comme Y est irréductible, l'un au moins de ces fermés n'est pas strict ; il existe donc $Z \in E$ tel que $Y \cap Z = Y$, c'est-à-dire tel que $Y \subset Z$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(4.3.23) Exemple. Soit k un corps et soit f un élément non nul de $k[T_1, \dots, T_n]$. Le fermé de Zariski $V(f)$ de Spec $k[T_1, \dots, T_n]$ s'identifie à Spec $k[T_1, \dots, T_n]/(f)$. L'anneau $k[T_1, \dots, T_n]/(f)$ étant noethérien, l'espace topologique $V(f)$ est lui aussi noethérien, et est en conséquence justiciable du lemme précédent. Nous allons décrire explicitement ses composantes irréductibles.

Comme f est un élément non nul de l'anneau factoriel $k[T_1, \dots, T_n]$, il s'écrit comme un produit fini $\prod P_i^{n_i}$ où les P_i sont des polynômes irréductibles deux à deux non associés et les n_i des entiers > 0 . On a alors

$$V(f) = \bigcup V(P_i^{n_i}) = \bigcup V(P_i).$$

Fixons i . Comme P_i est un polynôme irréductible de l'anneau factoriel $k[T_1, \dots, T_n]$, l'idéal (P_i) est premier, et $V(P_i)$ est donc irréductible d'après 4.3.15.2.

Par ailleurs, si i et j sont deux indices distincts, (P_i) et (P_j) sont non comparables pour l'inclusion (puisque P_i et P_j ne le sont pas pour la divisibilité), et $V(P_i)$ et $V(P_j)$ ne le sont donc pas non plus d'après *loc. cit.*

En conséquence, les $V(P_i)$ sont exactement les composantes irréductibles de $V(f)$.

Dimension de Krull

(4.3.24) Définition. Soit X un espace topologique. La *dimension de Krull* de X est la borne supérieure de l'ensemble des entiers n pour lesquels il existe une chaîne strictement croissante

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n$$

où les X_i sont des fermés irréductibles de X .

(4.3.24.1) Commentaires. L'ensemble d'entiers dont on prend la borne supérieure dans la définition ci-dessus est vide si et seulement si X n'a pas de fermés irréductibles, ce qui signifie que $X = \emptyset$: dans le cas contraire, il existe $x \in X$, et $\overline{\{x\}}$ est un fermé irréductible de X .

Si $X = \emptyset$, sa dimension de Krull est donc égale à $-\infty$ (voir la note de bas de page au paragraphe 2.8.14.1). Sinon, c'est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, qui vaut $+\infty$ si et seulement si X possède des chaînes strictement croissantes arbitrairement longues de fermés irréductibles.

(4.3.24.2) La dimension de Krull n'est pas une notion pertinente pour comprendre les espaces topologiques usuels. Ainsi, comme les seuls fermés irréductibles de $\mathbb{R}^n$ sont les points, la dimension de Krull de $\mathbb{R}^n$ est nulle quel que soit n .

Elle est en revanche tout à fait adaptée aux espaces topologiques rudimentaires qui interviennent en géométrie algébrique, et correspond alors parfaitement à l'idée intuitive qu'on se fait de la dimension.

Par exemple, dire qu'un espace X est de dimension de Krull égal à 2 signifie que les chaînes strictement croissantes de fermés irréductibles de X les plus longues qu'on puisse trouver comportent trois éléments (la numérotation commence à 0). Or c'est ce que l'on attend, indépendamment de la définition précise donnée à ce terme, d'une surface algébrique, sur laquelle une telle chaîne doit être constituée d'un point, d'une courbe irréductible, et de la surface elle-même.

(4.3.24.3) Signalons qu'il existe une notion bien plus fine de dimension en topologie générale qui est pertinente pour tout ce qui est peu ou prou modélisé sur $\mathbb{R}$; par exemple, $\mathbb{R}^n$ est de dimension n . Mais nous n'en aurons pas besoin dans le cadre de ce cours, et ne donnerons pas sa définition.

(4.3.25) Soit A un anneau. Il résulte des définitions et du dictionnaire entre fermés irréductibles de $\text{Spec } A$ et idéaux premiers de A que la dimension de Krull de l'espace topologique $\text{Spec } A$ est égale à la dimension de Krull de A .

Supposons que A soit un algèbre non nulle et de type fini sur un corps k . Si A est intègre, le théorème 2.10.11 implique que la dimension de Krull de $\text{Spec } A$ est égale au degré de transcendance de $\text{Frac } A$ sur k ; en général (si on ne suppose plus A intègre) on déduit simplement du corollaire 2.10.13 que la dimension de Krull de $\text{Spec } A$ est finie.

Chapitre 5

La notion de schéma

5.1 La catégorie des schémas

Le spectre comme espace localement annelé

(5.1.1) Soit A un anneau. Le but de ce qui suit est de munir l'espace topologique $\text{Spec } A$ d'une structure d'espace localement annelé, c'est-à-dire de construire un faisceau d'anneaux sur $\text{Spec } A$ dont les fibres soient des anneaux locaux.

Nous aurons en fait également besoin plus loin de considérer sur l'espace localement annelé $\text{Spec } A$ des faisceaux de modules d'un certain type. Aussi avons-nous choisi de donner une construction qui fournit directement ces faisceaux de modules, dont notre faisceau d'anneaux apparaîtra simplement comme un cas particulier.

(5.1.2) Soit M un A -module et soit U un ouvert de $\text{Spec } A$. On note $S(U)$ l'ensemble des éléments f de A qui ne s'annulent pas sur U . C'est une partie multiplicative de A , égale à $A^\times$ si $U = \text{Spec } A$. On désigne par $M_{\text{pref}}(U)$ le $S(U)^{-1}A$ -module $S(U)^{-1}M$. Si V est un ouvert contenu dans U , on dispose d'une application A -linéaire naturelle $M_{\text{pref}}(U) \rightarrow M_{\text{pref}}(V)$, et M_{pref} apparaît ainsi comme un préfaisceau de A -modules sur $\text{Spec } A$.

(5.1.2.1) On remarque que A_{pref} hérite quant à lui d'une structure plus riche : c'est un préfaisceau de A -algèbres, et M_{pref} est de manière naturelle un A_{pref} -module.

(5.1.2.2) *Les fibres de M_{pref} .* Fixons $x \in \text{Spec } A$, et soit Σ l'ensemble des éléments de A non nuls en x ; notons que Σ est précisément le complémentaire dans A de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ correspondant à x .

L'ensemble des voisinages ouverts de x , muni de l'ordre *opposé* à celui de l'inclusion, est filtrant ; si U et V sont deux voisinages ouverts de x avec $V \subset U$ alors $S(U) \subset S(V)$, et la réunion des $S(U)$ lorsque U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x est égale à Σ (si $f \in \Sigma$, alors $f \in S(D(f))$).

On déduit alors de 2.5.7.4 que $M_{\text{pref},x}$ s'identifie à $\Sigma^{-1}M$, c'est-à-dire à $M_{\mathfrak{p}}$. En particulier, $A_{\text{pref},x}$ est l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$.

(5.1.2.3) Nous allons faire une remarque de nature technique à propos de la description locale des sections de M_{pref} , qui nous servira par la suite.

Soit U un ouvert de $\text{Spec } A$, soit σ une section de M_{pref} sur U et soit $x \in U$. On peut écrire $\sigma = \mu/s$ avec $\mu \in M$ et $s \in S(U)$. Soit g tel que $D(g)$ soit un voisinage ouvert de x dans U . Comme s ne s'annule pas sur U , on a $D(g) \subset D(s)$ et donc $D(g) = D(sg)$. La restriction de σ à $D(sg)$ s'écrit $\mu/s = \mu g/sg$. Ainsi, on a montré l'existence d'un élément f de A tel que $x \in D(f) \subset U$ et tel que $\sigma|_{D(f)}$ soit de la forme m/f avec $m \in M$.

(5.1.3) On note $\widetilde{M}$ le faisceau associé au préfaisceau M_{pref} . Le faisceau $\widetilde{A}$ est un faisceau de A -algèbres, et $\widetilde{M}$ est un $\widetilde{A}$ -module.

(5.1.3.1) Soit $x \in \text{Spec } A$ et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier correspondant. La fibre $\widetilde{M}_x$ est canoniquement isomorphe à $M_{\text{pref},x}$, c'est-à-dire à $M_{\mathfrak{p}}$.

(5.1.3.2) En particulier, la fibre de $\widetilde{A}$ en x s'identifie à l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$.

(5.1.3.3) Soit $f \in A$. Comme $f \in S(D(f))$, on dispose d'une application A -linéaire naturelle $M_f \rightarrow S(D(f))^{-1}M = M_{\text{pref}}(D(f))$ (qui envoie m/f vu comme appartenant à M_f sur m/f vu comme appartenant à $S(D(f))^{-1}M$). Par composition avec la flèche canonique $M_{\text{pref}}(D(f)) \rightarrow D(f)$, on obtient une application A -linéaire $M_f \rightarrow \widetilde{M}(D(f))$.

(5.1.4) Le théorème qui suit est absolument fondamental. Il donne une description explicite de $\widetilde{M}$ qui permet de manipuler effectivement ce dernier (et qui s'appliquera en particulier à $\widetilde{A}$). Il est à la base de toute la théorie des schémas. Comme vous allez le voir, sa preuve met en jeu deux types d'ingrédients :

- les propriétés générales des localisés, et notamment la condition de nullité d'une fraction (ou d'égalité de deux fractions) ;
- une petite astuce de calcul, pas difficile mais absolument cruciale, qui permet d'exhiber par une formule explicite un élément de M répondant à certaines conditions.

(5.1.5) **Théorème.** *Pour tout $f \in A$ l'application A -linéaire $M_f \rightarrow \widetilde{M}(D(f))$ est bijective. En particulier, $M \rightarrow \widetilde{M}(\text{Spec } A)$ est bijective (prendre f égal à 1).*

Démonstration. Nous allons commencer par une remarque qui permet de simplifier un peu la démonstration. Soit $f \in A$ et soit U un ouvert de $D(f)$; notez que $f \in S(U)$ par définition. Le morphisme $A \mapsto A_f$ identifie de manière naturelle $\text{Spec } A_f$ à $D(f)$, ce qui permet de voir U comme un ouvert de $\text{Spec } A_f$. On note alors $T(U)$ la partie multiplicative de A_f formée des éléments $g \in A_f$ tels que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$; il est immédiat qu'un élément a/f^n de A_f appartient à $T(U)$ si et seulement si a appartient à $S(U)$.

La flèche canonique $A \rightarrow T(U)^{-1}A_f$ envoie $S(U)$ dans l'ensemble des éléments inversibles du but, et induit donc un morphisme de $S(U)^{-1}A$ vers $T(U)^{-1}A_f$, qui est un isomorphisme en vertu de 2.1.8.2.

Il en résulte par tensorisation avec M que $M_{\text{pref}}(U) = S(U)^{-1}M$ s'identifie canoniquement à $T(U)^{-1}M_f = M_{f,\text{pref}}(U)$, où $M_{f,\text{pref}}$ est le préfaisceau sur $\text{Spec } A_f$ associé au A_f -module M_f . En conséquence, $\widetilde{M}|_{D(f)}$ s'identifie au faisceau $\widetilde{M}_f$ sur $\text{Spec } A_f$.

Si l'on montre l'injectivité (resp. la surjectivité) de $M \rightarrow \widetilde{M}(\text{Spec } A)$, ceci entraînera donc l'injectivité (resp. la surjectivité) de $M_f \rightarrow \widetilde{M}(D(f))$ pour tout f , en appliquant le résultat à l'anneau A_f en lieu et place de A .

(5.1.5.1) *Preuve de l'injectivité de $M \rightarrow \widetilde{M}(\text{Spec } A)$, et partant de l'injectivité $M_f \rightarrow \widetilde{M}(D(f))$ pour tout f .* Soit m un élément de M dont l'image dans $\widetilde{M}(\text{Spec } A)$ est nulle. Les germes de cette image sont alors tous nuls, ce qui signifie que l'image de m dans $M_{\mathfrak{p}}$ est nulle pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de M (5.1.3.1). En conséquence, $m = 0$ d'après le lemme 2.7.2.1.

(5.1.5.2) *Preuve de la surjectivité de $M \rightarrow \widetilde{M}(\text{Spec } A)$, et partant de la surjectivité de $M_f \rightarrow \widetilde{M}(D(f))$ pour tout f .* Soit σ appartenant à $\widetilde{M}(\text{Spec } A)$; nous allons construire un élément $m \in M$ d'image égale à σ .

En vertu de 5.1.2.3, de la quasi-compacité de $\text{Spec } A$, et du fait que toute section de $\widetilde{M}$ provient localement d'une section de M_{pref} , il existe une famille finie $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de A et une famille $(m_i)_{i \in I}$ d'éléments de M tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- a) $\text{Spec } A = \bigcup D(f_i)$;
- b) pour tout i , la restriction $\sigma|_{D(f_i)}$ provient de la section m_i/f_i de $M_{\text{pref}}(D(f_i))$.

Soient i et j deux indices. Par construction, la restriction $\sigma|_{D(f_i f_j)}$ provient de la section $m_i/f_i = f_j m_i / (f_i f_j)$ de $M_{\text{pref}}(D(f_i f_j))$, et également de la section $f_i m_j / (f_i f_j)$ de ce dernier. La flèche $M_{f_i f_j} \rightarrow \widetilde{M}(D(f_i f_j))$ est injective d'après ce qu'on a déjà montré au 5.1.5.1; en conséquence, on a $f_i m_j / (f_i f_j) = f_j m_i / (f_i f_j)$ dans $M_{(f_i f_j)}$. Cela signifie qu'il existe un entier N tel que $(f_i f_j)^N (f_j m_i - f_i m_j) = 0$; notons que comme l'ensemble d'indices est fini, l'entier N peut être choisi indépendamment de i et j .

Nous allons simplifier un peu ces égalités. On commence par remarquer que

$$\begin{aligned} (f_i f_j)^N (f_j m_i - f_i m_j) &= 0 \\ \iff f_i^N f_j^{N+1} m_i &= f_j^N f_i^{N+1} m_j, \end{aligned}$$

qui n'est autre que l'égalité classique des produits en croix pour les fractions $f_i^N m_i / (f_i^{N+1})$ et $f_j^N m_j / (f_j^{N+1})$.

On remplace alors pour tout i la fonction f_i par f_i^{N+1} (ce qui ne change pas $D(f_i)$) et l'élément m_i par $f_i^N m_i$. Les conditions a) et b) ci-dessus restent vérifiées, et l'on a de plus $f_i m_j - f_j m_i = 0$ pour tout (i, j) .

Nous en venons au cœur de la preuve : la construction d'un antécédent de σ . Remarquons pour commencer que si $m \in M$, le fait que son image dans $\widetilde{M}(\text{Spec } A)$ soit égale à σ peut se tester sur chacun des ouverts $D(f_i)$ (puisque $\widetilde{M}$ est un faisceau). On en déduit, en considérant pour tout i le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \widetilde{M}(\text{Spec } A) , \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{f_i} & \longrightarrow & \widetilde{M}(D(f_i)) \end{array}$$

que pour que l'image de m dans $\widetilde{M}(\text{Spec } A)$ soit égale à σ , il suffit que l'image de m dans M_{f_i} soit égale à m_i/f_i pour tout i .

Nous allons maintenant utiliser l'hypothèse que les $D(f_i)$ recouvrent $\text{Spec } A$. Cela signifie qu'il existe $(a_i) \in A^I$ tel que $\sum a_i f_i = 1$. Intervient alors l'astuce de calcul que nous avons évoquée plus haut : on pose $m = \sum_{j \in I} a_j m_j$ et nous allons vérifier que l'image de m dans M_{f_i} est égale à m_i/f_i pour tout i .

Fixons i . On a

$$\begin{aligned} f_i m &= f_i \sum_j a_j m_j = \sum_j a_j (f_i m_j) \\ &= \sum_j a_j (f_j m_i) \quad (\text{car } f_i m_j = f_j m_i \text{ pour tout } j) \\ &= \left(\sum_j a_j f_j \right) m_i = m_i. \end{aligned}$$

En conséquence, l'image de m dans M_{f_i} est égale à m_i/f_i , ce qui achève la démonstration. $\square$

(5.1.6) Muni du faisceau d'anneaux $\widetilde{A}$, l'espace topologique $\text{Spec } A$ devient un espace *localement* annelé, dont le faisceau structural $\widetilde{A}$ sera désormais noté $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$. Les faits suivant sont des reformulations de 5.1.3.2 et du théorème 5.1.5 pour $M = A$ (nous nous permettons de noter les isomorphismes canoniques comme des égalités) :

- si x est un point de $\text{Spec } A$ correspondant à l'idéal $\mathfrak{p}$ alors $\mathcal{O}_{\text{Spec } A, x} = A_{\mathfrak{p}}$;
- si $f \in A$ alors $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f)) = A_f$; en particulier, $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A) = A$.

(5.1.7) Compatibilité des notations. Soit $x \in \text{Spec } A$ et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier qui lui correspond. Nous faisons face *a priori* à un conflit de notations : on dispose d'un corps $\kappa(x)$ et d'un morphisme $f \mapsto f(x)$ de $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A) = A$ dans $\kappa(x)$ fournis par la théorie générale des espaces localement annelés (3.3.4.2) ; et d'un corps $\kappa(x)$ et d'un morphisme $f \mapsto f(x)$ de A dans $\kappa(x)$ définis directement (4.1.3). Rappelons en quoi ils consistent.

(5.1.7.1) Définitions dans le contexte des espaces localement annelés. Le corps $\kappa(x)$ est alors le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_{\text{Spec } A, x}$, c'est-à-dire $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \text{Frac } A/\mathfrak{p}$. Et l'évaluation est la composée de la flèche naturelle

$$\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A) = A \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } A, x} = A_{\mathfrak{p}}$$

et de la flèche quotient $\mathcal{O}_{\text{Spec } A, x} \rightarrow \kappa(x) = A_{\mathfrak{p}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \text{Frac } A/\mathfrak{p}$. Elle s'identifie à la flèche canonique de A dans $\text{Frac } A/\mathfrak{p}$.

(5.1.7.2) Définition directe. On a $\kappa(x) = \text{Frac } A/\mathfrak{p}$ et la flèche $f \mapsto f(x)$ est la flèche canonique $A \rightarrow \text{Frac } A/\mathfrak{p}$.

(5.1.7.3) Tout va donc pour le mieux : il n'y a *a posteriori* plus de conflit.

Les schémas : définition et premières propriétés

(5.1.8) Définition. Un *schéma* est un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ qui est localement isomorphe au spectre d'un anneau. Cela signifie plus précisément que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un anneau A et un isomorphisme d'espaces localement annelés $(U, \mathcal{O}_U) \simeq (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$.

Un *morphisme de schémas* de $(Y, \mathcal{O}_Y)$ vers $(X, \mathcal{O}_X)$ est simplement un morphisme d'espaces localement annelés de $(Y, \mathcal{O}_Y)$ vers $(X, \mathcal{O}_X)$. En d'autres termes, on définit la catégorie **Sch** des schémas comme une *sous-catégorie pleine* de **EspLocAnn**.

(5.1.9) Considérer les espaces localement annelés localement isomorphes à des espaces d'un certain type préalablement fixé peut s'avérer utile dans bien d'autres contextes géométriques.

Par exemple, il est loisible de définir la catégorie des variétés différentielles comme la sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés en $\mathbb{R}$ -algèbres formée des espaces localement isomorphes à un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ (pour un certain n) muni de son faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Cela dit, en pratique, les géomètres différentiels préfèrent utiliser des cartes et atlas ; c'est essentiellement une affaire de goût, et nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'équivalence des deux points de vue.

(5.1.10) Premiers exemples.

(5.1.10.1) Si A est un anneau, $\text{Spec } A$ est un schéma par définition. Un schéma qui est isomorphe à $\text{Spec } A$ pour un certain A sera qualifié d'*affine*.

(5.1.10.2) Soit A un anneau et soit $f \in A$. On a signalé au début de la preuve du théorème 5.1.5 que la restriction de $\mathcal{O}_{\text{Spec } A} = \tilde{A}$ à l'ouvert $D(f)$ s'identifie, modulo l'homéomorphisme $\text{Spec } A_f \simeq D(f)$ induit par $A \rightarrow A_f$, au faisceau $\tilde{A}_f = \mathcal{O}_{\text{Spec } A_f}$. En conséquence, l'ouvert $D(f)$ de l'espace localement annelé $\text{Spec } A$ est un schéma, et même un schéma affine : il est canoniquement isomorphe à $\text{Spec } A_f$.

Il s'ensuit que $\text{Spec } A$ possède une base d'ouverts qui sont des schémas affines, que l'on qualifiera plus simplement d'*ouverts affines* ; ce fait s'étend immédiatement à un schéma quelconque. Il en résulte que tout ouvert d'un schéma est un schéma.

(5.1.11) Les immersions ouvertes.

(5.1.11.1) *La propriété universelle d'un ouvert.* Les faits suivants se déduisent de 3.3.8.

Si U est un ouvert d'un schéma X , l'inclusion $j : U \hookrightarrow X$ est sous-jacente à un morphisme de schémas noté encore j , tel que pour tout schéma Y et tout morphisme $\psi : Y \rightarrow X$ vérifiant $\psi(Y) \subset U$, il existe un unique morphisme de schémas $\chi : Y \rightarrow U$ tel que $j \circ \chi = \psi$. Le couple (U, j) représente donc le foncteur qui envoie un schéma Y sur l'ensemble des morphismes de $Y \rightarrow X$ dont l'image est contenue dans U .

En d'autres termes, toute factorisation *ensembliste* d'un morphisme de schémas par un ouvert est automatiquement *morphique*.

Si nous avons insisté sur cette propriété, qui semble tellement évidente qu'on omet souvent de l'expliciter, c'est parce qu'elle ne vaut pas sauf exceptions pour les *fermés* d'un schéma. Plus précisément, nous verrons plus loin qu'un fermé Z d'un schéma X admet toujours *au moins une* structure naturelle de schéma, mais qu'on ne peut pas en général en trouver une par laquelle se factorise tout morphisme $\psi : Y \rightarrow X$ vérifiant $\psi(Y) \subset Z$.

(5.1.11.2) On dira qu'un morphisme de schémas $Y \rightarrow X$ est une *immersion ouverte* s'il induit un isomorphisme entre Y et un ouvert de X .

(5.1.12) Soit X un schéma, soit K un corps et soit ξ l'unique point de $\text{Spec } K$. Soit $x \in X$ et soit λ un plongement de $\kappa(x)$ dans K . Nous allons montrer qu'il existe un unique morphisme $\psi : \text{Spec } K \rightarrow X$ tel que $\psi(\xi) = x$ et tel que la flèche induite $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(\xi) = K$ soit égale à λ .

(5.1.12.1) *Unicité de ψ .* Soit ψ comme ci-dessus. Comme $\psi(\xi) = x$, le morphisme ψ est uniquement déterminé ensemblistement. Soit U un ouvert de X . Il reste à s'assurer que la flèche $\psi^* : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } K}(\psi^{-1}(U))$ induite par ψ est elle aussi uniquement déterminée par le couple (x, λ) .

Si $x \notin U$ on a $\psi^{-1}(U) = \emptyset$ et $\psi^*(f) = 0$ pour toute $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Si $x \in U$ alors $\psi^{-1}(U) = \{\xi\}$ et on déduit du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\text{Spec } K}(\psi^{-1}(U)) = K & \xrightarrow{\text{Id}=(\mathbf{g} \mapsto \mathbf{g}(\xi))} & K = \kappa(\xi) \\ \psi^* \uparrow & & \uparrow \lambda \\ \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{f \mapsto f(x)} & \kappa(x) \end{array}$$

que $\psi^*(f) = \lambda(f(x))$ pour toute $f \in \mathcal{O}_X(U)$, d'où notre assertion.

(5.1.12.2) *Existence de ψ .* On s'inspire des égalités dont on vient de voir qu'elles sont *nécessairement* vérifiées.

On décrit tout d'abord ψ ensemblistement en posant $\psi(\xi) = x$. Soit maintenant U un ouvert de X . Nous définissons un morphisme ψ^* de $\mathcal{O}_X(U)$ vers $\mathcal{O}_{\text{Spec } K}(\psi^{-1}(U))$ comme suit :

- si $x \notin U$ on a $\psi^{-1}(U) = \emptyset$ et l'on pose $\psi^*(f) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{O}_X(U)$;
- si $x \in U$ on a $\psi^{-1}(U) = \text{Spec } K$, et l'on pose

$$\psi^*(f) = \lambda(f(x)) \in K = \mathcal{O}_{\text{Spec } K}(\text{Spec } K).$$

Ces formules étant compatibles aux restrictions, on obtient ainsi un morphisme de $\text{Spec } K$ vers X , dont il est immédiat qu'il satisfait les conditions requises.

(5.1.13) En vertu de ce qui précède, se donner un morphisme de $\text{Spec } K$ vers X revient à se donner un point x de X et un plongement $\kappa(x) \hookrightarrow K$.

En particulier, à tout point x de X est associé un morphisme canonique $\text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$: celui qui correspond au couple $(x, \text{Id}_{\kappa(x)})$.

(5.1.14) Quelques propriétés topologiques des schémas. Nous allons nous contenter d'énoncés très généraux – il est difficile d'être plus précis sans hypothèses spécifiques sur les schémas en jeu. Le lemme 5.1.14.3 et le 5.1.14.4 étendent des résultats précédemment démontrés pour les spectres d'anneaux (prop. 4.3.14 et 4.3.15.1).

(5.1.14.1) Comme tout schéma affine est quasi-compact (en tant qu'espace topologique), un schéma est quasi-compact si et seulement si il est réunion *finie* d'ouverts affines.

(5.1.14.2) Insistons sur le fait qu'un schéma n'a aucune raison d'être quasi-compact en général. Par exemple, soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de schémas. La somme disjointe $\coprod X_i$ des X_i dans la catégorie des espaces localement annelés «est» la somme disjointe des X_i dans la catégorie des espaces annelés (3.3.9), qui a été décrite au 3.2.7. C'est un schéma : cette propriété est en effet par définition locale, et $\coprod X_i$ est recouvert par ses ouverts X_i qui sont des schémas. Si les X_i sont tous non vides et si l'ensemble I est infini, le schéma $\coprod X_i$ n'est pas quasi-compact.

Notons que comme les schémas forment une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés, $\coprod X_i$ est la somme disjointe des X_i dans la catégorie des schémas.

Remarque : nous invitons le lecteur à vérifier que le raisonnement suivi aux paragraphes 4.1.28 et sq. montre en réalité l'existence d'un *isomorphisme de schémas*

$$\mathrm{Spec}(A \times B) \simeq \mathrm{Spec} A \coprod \mathrm{Spec} B$$

(utiliser plus précisément 4.1.28.3).

(5.1.14.3) **Lemme.** Soit X un schéma et soit Y un fermé de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Y possède un unique point générique ;
- ii) Y possède un point générique ;
- iii) Y est irréductible.

Démonstration. Il est clair que i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii). Supposons maintenant que iii) soit vraie. Comme Y est irréductible, il est non vide, et il existe donc un ouvert affine U de X tel que $U \cap Y$ soit non vide. L'espace Y étant irréductible, il en va de même de son ouvert non vide $U \cap Y$. Comme celui-ci est par ailleurs un fermé du schéma affine U , il est lui-même homéomorphe à un schéma affine et possède donc un unique point générique η (prop. 4.3.14, cf. aussi 4.3.15.1). Le point η est dense dans $U \cap Y$, lequel est dense dans Y par irréductibilité de ce dernier. En conséquence, η est dense dans Y : c'en est un point générique.

Il reste à s'assurer de l'unicité de η . Soit ξ un point générique de Y . La densité de ξ dans Y signifie que ξ appartient à tout ouvert non vide de Y , et en particulier à $Y \cap U$. Le point ξ qui est dense dans Y l'est *a fortiori* dans $Y \cap U$; par unicité du point générique de U , il vient alors $\xi = \eta$. $\square$

(5.1.14.4) On en déduit que $x \mapsto \overline{\{x\}}$ induit une bijection entre X et l'ensemble de ses fermés irréductibles.

(5.1.14.5) *Remarque.* Nous avons énoncé et démontré le lemme 5.1.14.3 ci-dessus pour tout fermé de X , et pas seulement pour le schéma X lui-même. Mais cette généralité est en réalité illusoire : en effet, comme nous l'avons déjà mentionné au 5.1.11.1, nous verrons plus bas que tout fermé d'un schéma possède (au moins) une structure de schéma.

Morphismes vers le spectre d'un anneau

(5.1.15) Lemme. Soit X un espace annelé et soit A un anneau. Pour tout morphisme $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ et toute application continue $\chi : X \rightarrow \text{Spec } A$ il existe au plus un morphisme d'espaces annelés $\psi : X \rightarrow \text{Spec } A$ dont l'application continue sous-jacente coïncide avec χ et tel que le morphisme

$$A = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

induit par ψ soit égal à φ .

Démonstration. Soit $\psi : X \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme d'espaces annelés comme dans l'énoncé. Comme les ouverts de la forme $D(f)$ forment une base de la topologie de $\text{Spec } A$, il suffit de s'assurer que pour tout f appartenant à A , la flèche

$$A_f = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f)) \rightarrow \mathcal{O}_X(\chi^{-1}(D(f)))$$

induite par ψ est uniquement déterminé par φ .

Soit $f \in A$. Posons $U = \chi^{-1}(D(f))$. Soit $\rho : A \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ la composée de $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ et de la flèche de restriction $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U) \\ \uparrow \varphi & \nearrow \rho & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A_f \end{array}$$

montre que la flèche composée $A \rightarrow A_f \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ est égale à ρ . Mais la propriété universelle du localisé A_f assure qu'il y a *au plus* un morphisme de A_f vers $\mathcal{O}_X(U)$ dont la composée avec $A \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ est égale à ρ (elle assure aussi qu'un tel morphisme existe si et seulement si $\rho(f)$ est inversible); ainsi, le morphisme $A_f \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ est uniquement déterminé par φ , ce qu'on souhaitait établir. $\square$

(5.1.16) Théorème. Soit X un espace localement annelé et soit A un anneau. Pour tout morphisme $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ il existe un unique morphisme d'espaces localement annelés $\psi : X \rightarrow \text{Spec } A$ tel que le morphisme

$$A = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

induit par ψ soit égal à φ .

Démonstration. Nous allons, comme souvent, commencer par établir l'unicité; puis nous nous inspirerons des conditions nécessaires qui auront été dégagées à cette occasion pour exhiber un morphisme satisfaisant les conditions requises.

(5.1.16.1) Preuve de l'unicité de ψ . Soit ψ comme dans l'énoncé. Par hypothèse, il induit le morphisme φ entre les anneaux de sections globales. Pour montrer qu'il est uniquement déterminé il suffit alors, en vertu du lemme 5.1.15, de montrer qu'il est uniquement déterminé *ensemblément*.

Soit $x \in X$ et soit $f \in A$. L'image de f dans $\mathcal{O}_X(X)$ est par hypothèse égale à $\varphi(f)$. Comme ψ est un morphisme d'espaces localement annelés, on a

$$\varphi(f)(x) = 0 \iff f(\psi(x)) = 0.$$

Ainsi, $\psi(x)$ est *nécessairement* le point correspondant au noyau de $f \mapsto \varphi(f)(x)$ (ou encore au morphisme $f \mapsto \varphi(f)(x)$ de A dans $\kappa(x)$).

(5.1.16.2) Existence de ψ . Commençons par le définir ensemblistement : pour tout $x \in X$, on note $\psi(x)$ le point de $\text{Spec } A$ correspondant au noyau de la flèche $f \mapsto \varphi(f)(x)$ (ou encore au morphisme $f \mapsto \varphi(f)(x)$ de A dans $\kappa(x)$). Cela signifie que l'on a pour tout $f \in A$ l'équivalence

$$\varphi(f)(x) = 0 \iff f(\psi(x)) = 0.$$

Il s'ensuit que $\psi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$, et ψ est en conséquence continue.

Pour faire de ψ un morphisme d'espaces annelés, il faut maintenant se donner un morphisme $\mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_X$; nous reprenons les notations de 5.1.2 et *sq.*

Soit U un ouvert de $\text{Spec } A$. Si $s \in S(U)$, il résulte de la définition de ψ que $\varphi(s)$ est inversible sur $\psi^{-1}(U)$. La flèche composée

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\psi^{-1}(U))$$

envoie donc S dans l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{O}_X(\psi^{-1}(U))$. Elle induit dès lors un morphisme de $S(U)^{-1}A$ vers $\mathcal{O}_X(\psi^{-1}(U))$. Cette construction étant compatible aux restrictions, elle définit un morphisme de préfaisceaux d'anneaux de A_{pref} vers $\psi_* \mathcal{O}_X$. Comme $\psi_* \mathcal{O}_X$ est un faisceau, ce morphisme induit un morphisme de faisceau d'anneaux de $\tilde{A} = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ vers $\psi_* \mathcal{O}_X$ dont l'effet sur les sections globales coïncide par construction avec φ .

Il reste à s'assurer que le morphisme d'espaces annelés ψ est bien un morphisme d'espaces *localement* annelés. Soit $x \in X$ et soit g une section de $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ définie sur un voisinage de $\psi(x)$. On peut toujours supposer que ce voisinage est de la forme $D(f)$ avec $f(\psi(x)) \neq 0$, auquel cas la fonction g est de la forme a/f ; on a $\psi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$, et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(D(\varphi(f))) \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A_f \end{array}$$

assure que l'image de g dans $\mathcal{O}_X(\psi^{-1}(D(f)))$ est égale à $\varphi(a)/\varphi(f)$. On a les équivalences

$$g(\psi(x)) = 0 \iff a(\psi(x)) = 0 \iff \varphi(a)(x) = 0 \iff [\varphi(a)/\varphi(f)](x) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

(5.1.17) Exemple. Soit A un anneau, soit U un ouvert de $\text{Spec } A$, et soit ρ la flèche de restriction de A vers $\mathcal{O}_U(U)$. Le morphisme induit par l'immersion ouverte $U \hookrightarrow A$ au niveau des anneaux de sections globales est égal à ρ . En conséquence, la flèche $U \rightarrow \text{Spec } A$ associée par le théorème 5.1.16 au morphisme ρ coïncide avec l'immersion ouverte $U \hookrightarrow \text{Spec } A$.

(5.1.18) Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Le théorème 5.1.16 permet d'associer à φ un morphisme $\psi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$, à savoir l'unique morphisme

qui induit φ entre leurs anneaux de sections globales. Les faits suivants découlent de la description explicite de ψ , donnée en 5.1.16.2 lors de la preuve de *loc. cit.*

(5.1.18.1) Ensemblistement, ψ coïncide avec l'application continue construite au 4.1.22 : si $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B , et si y est le point correspondant de $\text{Spec } B$, alors $\psi(y)$ correspond à l'idéal premier $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ de A .

(5.1.18.2) Supposons que $B = A_f$ pour un certain $f \in A$; le morphisme ψ est l'immersion ouverte induite par l'isomorphisme $\text{Spec } A_f \simeq D(f)$ décrit en 5.1.10.2.

(5.1.18.3) Revenons au cas où B est quelconque, et soit $f \in A$. On a $\psi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ et le morphisme

$$[A_f = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f))] \rightarrow [B_{\varphi(f)} = \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(D(\varphi(f)))]$$

induit par ψ est le morphisme canonique $A_f \rightarrow B_{\varphi(f)}$ déduit de φ .

(5.1.18.4) Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B , et soit y le point correspondant de $\text{Spec } B$. Le morphisme

$$[A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} = \mathcal{O}_{\text{Spec } A, \psi(y)}] \rightarrow [B_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{\text{Spec } B, y}]$$

induit par ψ est le morphisme canonique $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$ déduit de φ .

(5.1.19) Soit A un anneau. Le morphisme $\text{Id}_{\text{Spec } A}$ induit l'identité sur l'anneau des sections globales de $\text{Spec } A$; c'est donc le morphisme associé à Id_A .

Soient $\varphi : A \rightarrow B$ et $\varphi' : B \rightarrow C$ deux morphismes d'anneaux. La composée des morphismes $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B$ et $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ respectivement associés à φ' et φ est un morphisme de $\text{Spec } C$ vers $\text{Spec } A$ qui induit le morphisme $\varphi' \circ \varphi$ entre leurs anneaux de sections globales : c'est donc le morphisme de $\text{Spec } C$ vers $\text{Spec } A$ associé à $\varphi' \circ \varphi$.

Notons que ces fait pourraient aussi se déduire des descriptions explicites des morphismes évoqués, que nous avons fournies en 5.1.18.1–5.1.18.4.

(5.1.20) Ainsi, $A \mapsto \text{Spec } A$ apparaît comme un foncteur contravariant de la catégorie des anneaux vers celle des espaces localement annelés, qui induit pour tout couple (A, B) d'anneaux une bijection

$$\text{Hom}_{\text{Ann}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{\text{Sch}}(\text{Spec } B, \text{Spec } A),$$

dont la réciproque envoie un morphisme $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ sur la flèche induite

$$[\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A) = A] \rightarrow [\mathcal{O}_{\text{Spec } B}(\text{Spec } B) = B].$$

Il s'ensuit que $A \mapsto \text{Spec } A$ établit une anti-équivalence¹ entre la catégorie des anneaux et celle des schémas *affines*, dont $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$ est un quasi-inverse.

(5.1.21) Nous allons maintenant pouvoir donner diverses interprétations fonctorielles du théorème 5.1.16.

(5.1.21.1) Soit X un espace localement annelé. Le théorème 5.1.16 assure en particulier l'existence d'un unique morphisme $\chi : X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$

1. Le préfixe «anti» fait référence au fait que c'est un foncteur contravariant.

induisant $\text{Id}_{\mathcal{O}_X(X)}$ sur les anneaux de sections globales, dont nous dirons que c'est le morphisme *canonique* de X vers $\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$ (notons que si $X = \text{Spec } A$ on a $\mathcal{O}_X(X) = A$ et χ est alors nécessairement égal à l'identité, par unicité).

Soit φ un morphisme de A vers $\mathcal{O}_X(X)$. Il induit un morphisme θ de $\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$ vers $\text{Spec } A$; la composée $\theta \circ \chi$ est une flèche de X vers $\text{Spec } A$ qui induit le morphisme φ sur les anneaux de sections globales : c'est donc le morphisme ψ dont le théorème 5.1.16 assure l'existence et l'unicité.

Ainsi, ψ se factorise *via* χ . Cette factorisation est unique : si θ' est un morphisme de $\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$ vers $\text{Spec } A$ tel que $\theta' \circ \chi = \psi$ on vérifie aussitôt que θ' induit le morphisme φ sur les anneaux de sections globales, et il est dès lors égal à θ .

En conséquence, le foncteur covariant de la catégorie des schémas affines vers les ensembles qui envoie Y sur $\text{Hom}_{\text{Sch}}(X, Y)$ est représentable par le couple $(\text{Spec } \mathcal{O}_X(X), \chi: X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_X(X))$.

(5.1.21.2) Le théorème 5.1.16 affirme que pour tout couple (X, A) formé d'un espace localement annelé et d'un anneau, l'application naturelle

$$\text{Hom}_{\text{EspLocAnn}}(X, \text{Spec } A) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ann}}(A, \mathcal{O}_X(X))$$

est bijective. On vérifie immédiatement que cette bijection est fonctorielle en X et A .

On vient ainsi d'établir une propriété d'adjonction entre les foncteurs «spectre» et «sections globales». Comme ils sont contravariants on doit, pour décider du sens de cette adjonction, remplacer une des deux catégories en jeu par son opposée pour avoir affaire à des foncteurs covariants. Travaillons par exemple avec EspLocAnn et Ann^{op} . On dispose alors pour tout couple (X, A) d'une bijection

$$\text{Hom}_{\text{EspLocAnn}}(X, \text{Spec } A) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ann}^{\text{op}}}(\mathcal{O}_X(X), A)$$

fonctorielle en X et A , si bien que le foncteur $A \mapsto \text{Spec } A$ de Ann^{op} vers EspLocAnn est adjoint à droite du foncteur $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$ de EspLocAnn vers Ann^{op} .

(5.1.22) La place des spectres au sein des espaces localement annelés.

Il résulte du 5.1.21.2 ci-dessus que la notion de spectre est naturelle dès lors qu'on s'intéresse aux espaces localement annelés généraux, puisque $A \mapsto \text{Spec } A$ est adjoint à $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$.

Ce fait permet en un sens de penser à $\text{Spec } A$ comme à *l'espace localement annelé le plus général d'anneau des sections globales égal à A* .

(5.1.23) Remarque culturelle. La notion de spectre, et sa caractérisation fonctorielle donné au 5.1.22 ci-dessus, se généralisent comme suit. Le foncteur d'inclusion de la catégorie des espaces localement annelés dans celle des espaces annelés admet un adjoint à droite $\mathfrak{Sp}$, qui est une sorte de «spectre étalé»; et si A est un anneau, $\text{Spec } A$ s'identifie à $\mathfrak{Sp}(\{*\}, A)$. Nous ne nous servirons pas de $\mathfrak{Sp}$, mais nous allons indiquer sa construction pour le lecteur intéressé. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé.

(5.1.23.1) *Description ensembliste.* L'ensemble sous-jacent à $\mathfrak{Sp}(X)$ est l'union disjointe $\coprod_{x \in X} \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$, munie d'une application naturelle p vers X (le spectre de $\mathcal{O}_{X,x}$ est placé au-dessus de x).

(5.1.23.2) *La topologie de $\mathfrak{Sp}(X)$.* Pour tout ouvert U de X et tout élément f de $\mathcal{O}_X(U)$, on note $\mathfrak{D}(U, f)$ le sous-ensemble de $\mathfrak{Sp}(X)$ égal à la réunion, pour x parcourant U , des ouverts $D(f_x) \subset \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} = p^{-1}(x)$. On munit $\mathfrak{Sp}(X)$ de la topologie engendrée par les $\mathfrak{D}(U, f)$, pour laquelle p est continue.

(5.1.23.3) *Le faisceau structural de $\mathfrak{Sp}(X)$.* Soit V un ouvert de $\mathfrak{Sp}(X)$. Pour tout ouvert U de X contenant $p(V)$, notons $S_V(U)$ l'ensemble des sections f de $\mathcal{O}_X$ sur U telles que $V \subset \mathfrak{D}(U, f)$. C'est une partie multiplicative de $\mathcal{O}_X(U)$; soit $\Lambda(V)$ la colimite des $S_V(U)^{-1} \mathcal{O}_X(U)$, où U parcourt l'ensemble des ouverts de X contenant $p(V)$.

Si W est un ouvert de V , on dispose d'une application naturelle de $\Lambda(V)$ vers $\Lambda(W)$.

On peut ainsi voir Λ comme un préfaisceau d'anneaux sur $\mathfrak{Sp}(X)$, et l'on munit alors $\mathfrak{Sp}(X)$ du faisceau associé au préfaisceau Λ . On voit facilement que $\mathfrak{Sp}(X)$ est un espace localement annelé.

(5.1.23.4) On dispose par construction du faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{Sp}(X)}$ d'un morphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow p_* \mathcal{O}_{\mathfrak{Sp}(X)}$ permettant de voir $p: \mathfrak{Sp}(X) \rightarrow X$ comme un morphisme d'espaces annelés; pour tout espace localement annelé Y , on vérifie que l'application $\varphi \mapsto p \circ \varphi$ établit une bijection entre $\text{Hom}_{\text{EspLocAnn}}(Y, \mathfrak{Sp}(X))$ et $\text{Hom}_{\text{EspAnn}}(Y, X)$.

(5.1.24) **Quelques adjoints.** Notons O_1 et O_2 les foncteurs oublis respectifs de EspAnn et EspLocAnn vers Top .

(5.1.24.1) Le foncteur O_1 admet un adjoint à droite, à savoir $X \mapsto (X, \underline{\mathbb{Z}})$; ainsi qu'un adjoint à gauche, à savoir $X \mapsto (X, \{0\})$.

(5.1.24.2) Le foncteur O_2 est la composée de l'inclusion $\text{EspLocAnn} \hookrightarrow \text{EspAnn}$ et de O_1 . On déduit alors de 5.1.24.1 et 5.1.23 *et sq.* que O_2 admet un adjoint à droite, à savoir $X \mapsto \mathfrak{Sp}(X, \underline{\mathbb{Z}})$.

(5.1.24.3) Le fait que les foncteurs $\text{EspLocAnn} \hookrightarrow \text{EspAnn}$, O_1 et O_2 admettent un adjoint à droite «explique» pourquoi ils commutent aux colimites, ce qui avait été vu directement par la construction explicite de ces dernières (3.2.7, 3.3.9). Et le fait que O_1 admette un adjoint à gauche «explique» pourquoi il commute aux limites, ce qui a également été vu par construction explicite (3.2.6).

(5.1.24.4) Grâce au foncteur $\mathfrak{Sp}$, on peut désormais montrer que les limites existent dans EspLocAnn (et les décrire). Nous laissons plus précisément le lecteur vérifier (c'est purement formel) que si $\mathcal{D}$ est un diagramme dans EspLocAnn alors $\mathfrak{Sp}(\lim_{\text{EspAnn}} \mathcal{D})$ est la limite de $\mathcal{D}$ dans EspLocAnn .

(5.1.24.5) On prendra garde que O_2 ne commute pas aux limites (et n'a donc pas d'adjoint à gauche). Cela résulte par exemple de 5.1.24.4 et du fait que $\mathfrak{Sp}$ ne préserve pas en général l'espace topologique sous-jacent. Toutefois, on peut le voir directement sur un exemple simple : pour tout espace localement annelé X , on a une bijection naturelle

$$\text{Hom}(X, \text{Spec } \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathcal{O}_X(X)) = \{*\},$$

si bien que $\text{Spec } \mathbb{Z}$ est l'objet final de EspLocAnn ; mais l'espace topologique sous-jacent à $\text{Spec } \mathbb{Z}$ n'est pas l'objet final de Top , qui est le singleton.

Un critère d'affinité, et un premier contre-exemple

(5.1.25) *A priori*, le fait d'être affine ne semble pas être une propriété facile à vérifier pour un schéma donné X : cela signifie en effet qu'il existe un anneau A et un isomorphisme $X \simeq \operatorname{Spec} A$.

Mais le lemme ci-dessous assure qu'en réalité, cela peut s'exprimer de façon directe, sans quantificateur existentiel toujours un peu désagréable.

(5.1.26) Lemme. *Soit X un schéma. Il est affine si et seulement si le morphisme canonique $X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Si $X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ est un isomorphisme, X est affine par définition. Supposons réciproquement que X soit affine, donc qu'il existe un isomorphisme $X \simeq \operatorname{Spec} A$. On dispose alors d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \operatorname{Spec} A & \xrightarrow{\operatorname{Id}} & \operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \end{array}$$

qui montre que $X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ est un isomorphisme. $\square$

(5.1.27) Un premier exemple de schéma non affine. Soit k un corps. Nous allons introduire une notation que nous utiliserons dans toute la suite du cours : on désigne par $\mathbb{A}_k^n$ le schéma $\operatorname{Spec} k[T_1, \dots, T_n]$. Il est muni d'un morphisme naturel vers $\operatorname{Spec} k$, induit par le plongement $k \hookrightarrow k[T_1, \dots, T_n]$; on dit que $\mathbb{A}_k^n$ est l'espace affine de dimension n sur le corps k .

Pour le moment, nous allons travailler avec le plan affine $\mathbb{A}_k^2$. Soit U l'ouvert complémentaire dans $\mathbb{A}_k^2$ de l'origine $(0, 0)$, vue comme point fermé de $\mathbb{A}_k^2$.

(5.1.27.1) Détermination de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}(U)$. Comme $(0, 0) = V(T_1, T_2)$, l'ouvert U est la réunion de $D(T_1)$ et $D(T_2)$. On a

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}(D(T_1)) = k[T_1, T_2]_{T_1} = \left\{ \frac{P}{T_1^n}, P \in k[T_1, T_2], n \in \mathbb{N} \right\} \subset k(T_1, T_2),$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}(D(T_2)) = k[T_1, T_2]_{T_2} = \left\{ \frac{P}{T_2^n}, P \in k[T_1, T_2], n \in \mathbb{N} \right\} \subset k(T_1, T_2)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(D(T_1) \cap D(T_2)) &= \mathcal{O}_X(D(T_1 T_2)) = k[T_1, T_2]_{T_1 T_2} \\ &= \left\{ \frac{P}{T_1^n T_2^m}, P \in k[T_1, T_2], n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset k(T_1, T_2). \end{aligned}$$

Se donner une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}$ sur U revient à se donner un couple (t_1, t_2) formé d'une section t_1 de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}$ sur $D(T_1)$ et d'une section t_2 de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}$ sur $D(T_2)$, telles que $t_1|_{D(T_1 T_2)} = t_2|_{D(T_1 T_2)}$. Par ce qui précède, cela revient à se donner une fraction $R \in K(T_1, T_2)$ pouvant à la fois s'écrire sous la forme P/T_1^n et sous la forme Q/T_2^m où P et Q appartiennent à $k[T_1, T_2]$. Un argument élémentaire d'arithmétique des anneaux factoriels assure qu'un tel R

appartient nécessairement à $k[T_1, T_2] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}(\mathbb{A}_k^2)$. Autrement dit, la flèche de restriction $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}(\mathbb{A}_k^2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}(U)$ est un isomorphisme.

(5.1.27.2) La flèche canonique de U vers $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}(U)$ s'identifie par ce qui précède (et en vertu de l'exemple 5.1.17) à l'immersion ouverte de U dans $\mathbb{A}_k^2$, qui n'est pas un isomorphisme (elle n'est déjà pas ensemblistement surjective, puisque son image ne contient pas l'origine). Il en résulte que U n'est pas affine.

5.2 Recollement de schémas, construction des produits fibrés

Recollements de schémas

(5.2.1) Soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans la catégorie des schémas et soit X sa colimite dans la catégorie des espaces localement annelés ; rappelons que X «est» en fait la limite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des espaces annelés (3.3.9), laquelle a été décrite au 3.2.7.

(5.2.1.1) Si X a le bon goût d'être un schéma, c'est *a fortiori* la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des schémas, puisque celle-ci est une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés.

(5.2.1.2) Comme être un schéma est une propriété locale il suffit, pour que X soit un schéma, que chacun des morphismes canoniques $X_i \rightarrow X$ soit une immersion ouverte.

(5.2.2) Nous allons maintenant donner quelques exemples dans lesquelles la condition suffisante du 5.2.1.2 est satisfaite.

(5.2.2.1) Soit $\mathcal{D} = (X_i)$ un diagramme sans flèche dans la catégorie des schémas. Sa colimite dans la catégorie des espaces localement annelés est l'espace somme disjointe $\coprod X_i$, décrit en 3.2.8. Comme $X_j \rightarrow \coprod X_i$ est une immersion ouverte pour tout j d'après *loc. cit.*, l'espace localement annelé $\coprod X_i$ est en vertu de 5.2.1.2 un schéma, et est plus précisément la somme disjointe des X_i dans la catégorie des schémas (nous avons déjà signalé ce fait en 5.1.14.2).

(5.2.2.2) Soit I un ensemble ordonné et soit $\mathcal{D}$ un diagramme commutatif induit par un foncteur de I dans la catégorie des schémas (1.6.11.1). Pour tout indice i appartenant à I on note X_i l'objet correspondant de $\mathcal{D}$; pour tout couple $(i, j) \in I$ avec $i \leq j$, on note f_{ij} la flèche $X_i \rightarrow X_j$ de $\mathcal{D}$.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- (i) les f_{ij} sont toutes des immersions ouvertes ;
- (ii) pour tout $(i, j) \in I$ et tout ℓ majorant i et j , l'ouvert $f_{i\ell}(X_i) \cap f_{j\ell}(X_j)$ de X_ℓ est la réunion des $f_{\alpha\ell}(X_\alpha)$ pour α minorant i et j .

Soit X la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des espaces localement annelés. Les faits suivants résultent de 3.2.12.

- ◊ Soient i et j deux indices tels que $i \leq j$. On a alors $\lambda_i = \lambda_j \circ f_{ij}$; en particulier, $\lambda_i(X_i) = \lambda_j(f_{ij}(X_i)) \subset \lambda_j(X_j)$.
- ◊ Pour tout i , la flèche canonique $\lambda_i: X_i \rightarrow \text{colim } \mathcal{D}$ est une immersion ouverte, et $\text{colim } \mathcal{D}$ est la réunion des $\lambda_i(X_i)$.

- ◇ Soient i et j deux indices. L'intersection $\lambda_i(X_i) \cap \lambda_j(X_j)$ est la réunion des $\lambda_\alpha(X_\alpha)$ pour α minorant i et j .

Il résulte alors de 5.2.1.2 que X est un schéma, qui s'identifie à la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des schémas. On dit que X est le schéma obtenu en recollant les X_i le long des f_{ij} .

(5.2.2.3) Remarque. *Conservons les hypothèses et notations du 5.2.2.2. Il arrivera qu'on se permette de considérer chacun des X_i comme un ouvert de colim $\mathcal{D}$ via l'immersion λ_i . Modulo cet abus les propriétés énoncées ci-dessus se reformulent comme suit :*

- ◇ colim $\mathcal{D}$ est recouvert par les X_i ;
- ◇ on a $X_i \subset X_j$ dès que $i \leq j$, et cette identification entre X_i et un ouvert de X_j est celle que fournit l'immersion ouverte f_{ij} ;
- ◇ pour tout (i, j) l'intersection $X_i \cap X_j$ est la réunion des X_α pour α minorant i et j .

(5.2.2.4) Soit I un ensemble (quelconque) d'indices. Pour tout i , soit X_i un schéma. Pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$ on se donne un ouvert (X_{ij}) de X_i , et un isomorphisme $\iota_{ij}: X_{ij} \simeq X_{ji}$. On suppose que les ι_{ij} satisfont les conditions suivantes :

- (i) $\iota_{ij} = \iota_{ji}^{-1}$ pour tout (i, j) avec $i \neq j$;
- (ii) si (i, j, k) sont trois indices deux à deux distincts alors

$$\iota_{ij}(X_{ik} \cap X_{ij}) = X_{ji} \cap X_{jk}$$

et

$$\iota_{jk} \circ \iota_{ij} = \iota_{ik},$$

les deux membres étant vus comme des isomorphismes de $X_{ij} \cap X_{ik}$ sur $X_{ki} \cap X_{kj}$.

Soit $\mathcal{D}$ le diagramme dont les objets sont les X_i et les X_{ij} , et dont les flèches sont les isomorphismes ι_{ij} et les immersions ouvertes $X_{ij} \hookrightarrow X_i$.

Soit X la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des espaces localement annelés. Les faits suivants résultent de 3.2.13.

- ◇ Pour tout i , la flèche canonique $\lambda_i: X_i \rightarrow \text{colim } \mathcal{D}$ est une immersion ouverte, et colim $\mathcal{D}$ est la réunion des $\lambda_i(X_i)$.
- ◇ Soient i et j deux indices avec $i \neq j$. On a

$$\lambda_i(X_i) \cap \lambda_j(X_j) = \lambda_i(X_{ij}) = \lambda_j(X_{ji})$$

et

$$\lambda_i|_{X_{ij}} = \lambda_j|_{X_{ji}} \circ \iota_{ij} \text{ et } \lambda_j|_{X_{ji}} = \lambda_i|_{X_{ij}} \circ \iota_{ji}.$$

Il résulte alors de 5.2.1.2 que X est un schéma, qui s'identifie à la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des schémas. On dit que X est le schéma obtenu en recollant les X_i le long des ι_{ij} .

(5.2.2.5) Remarque. *Conservons les hypothèses et notations du 5.2.2.4. Il arrivera qu'on se permette de considérer chacun des X_i comme un ouvert de colim $\mathcal{D}$ via l'immersion λ_i . Modulo cet abus les propriétés énoncées ci-dessus se reformulent comme suit :*

- ◇ colim $\mathcal{D}$ est recouvert par les X_i ;
- ◇ pour tout (i, j) avec $i \neq j$ l'intersection $X_i \cap X_j$ est égale à X_{ij} en tant qu'ouvert de X_i et à X_{ji} en tant qu'ouvert de X_{ji} , le passage d'une identification à l'autre se faisant *via* les isomorphismes ι_{ij} et ι_{ji} .

(5.2.3) Le cas des Y -schémas. Soit Y un schéma. Un Y -schéma est un couple (X, f) où X est un schéma et f un morphisme de X vers Y ; un *morphisme de Y -schémas*, ou *Y -morphisme*, de (X, f) vers (X', f') est un morphisme de schémas $g : X \rightarrow X'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & \searrow f \quad \swarrow f' & \\ & Y & \end{array}$$

commute (la catégorie $Y\text{-Sch}$ des Y -schémas est donc simplement la catégorie Sch/Y avec les notations de 1.1.3.2).

(5.2.3.1) Soit A un anneau. Nous parlerons par abus de A -schéma plutôt que de $\text{Spec } A$ -schéma ; la catégorie des A -schémas sera notée $A\text{-Sch}$.

Si X est un schéma, se donner une structure de A -schéma sur X revient à se donner un morphisme d'anneaux de A dans $\mathcal{O}_X(X)$, ou encore une structure de A -algèbre sur $\mathcal{O}_X(X)$: c'est une simple reformulation du théorème 5.1.16.

Une fois X muni d'une telle structure, $\mathcal{O}_X$ devient de manière naturelle un faisceau en A -algèbres.

(5.2.3.2) Soit $\mathcal{D} = ((X_i), (E_{ij}))$ un diagramme dans la catégorie des schémas et soit Y un schéma. Supposons que chaque X_i soit muni d'une structure de Y -schéma, et que les éléments de E_{ij} soient pour tout (i, j) des Y -morphisms. Si colim $\mathcal{D}$ existe dans la catégorie des schémas, elle hérite d'une structure naturelle de Y -schéma qui en fait la colimite de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des Y -schémas : c'est un fait complètement général, cf. 1.6.9.1.

La droite projective et la droite affine avec origine dédoublée

(5.2.4) Soit k un corps. Nous allons travailler dans ce qui suit avec deux copies X et Y de la droite affine $\mathbb{A}_k^1$, vue comme un k -schéma de façon évidente. Pour éviter de les confondre, nous écrirons $X = \text{Spec } k[T]$ et $Y = \text{Spec } k[S]$. On note U l'ouvert $D(T)$ de X , et V l'ouvert $D(S)$ de Y . On a $U \simeq \text{Spec } k[T, T^{-1}]$ et $V \simeq \text{Spec } k[S, S^{-1}]$. On note i l'immersion ouverte de U dans X , et j celle de V dans Y .

(5.2.5) La droite projective. L'isomorphisme de k -algèbres

$$\begin{array}{ccc} k[S, S^{-1}] & \rightarrow & k[T, T^{-1}] \\ S & \mapsto & T^{-1} \\ S^{-1} & \mapsto & T \end{array}$$

induit un isomorphisme de k -schémas $\psi : U \rightarrow V$.

On note $\mathbb{P}_k^1$ le k -schéma obtenu par recollement de X et Y le long de ψ et ψ^{-1} , défini en 5.2.2.4 – notez que la condition ii) de *loc cit.* est ici vide puisqu'on

ne recolle que deux ouverts. Le k -schéma $\mathbb{P}_k^1$ est également appelé la *droite projective sur k* . Nous allons maintenant la décrire plus avant, en déclinant dans ce cas particulier les énoncés 1) et 2) de *loc. cit.*

(5.2.5.1) La droite projective $\mathbb{P}_k^1$ est réunion de deux ouverts affines X' et Y' (les images de X et Y). Chacun d'eux est une copie de la droite affine : on a $X' \simeq \operatorname{Spec} k[T]$ et $Y' \simeq k[S]$. Leur intersection $X' \cap Y'$ est égale à $D(T)$ en tant qu'ouvert de X' , et donc à $\operatorname{Spec} k[T, T^{-1}]$; elle est égale à $D(S)$ en tant qu'ouvert de Y' , et donc à $\operatorname{Spec} k[S, S^{-1}]$. L'isomorphisme entre $D(T) \subset X'$ et $D(S) \subset Y'$ induit par leurs identifications avec $X' \cap Y'$ est celui fourni par le morphisme de k -algèbres qui envoie S sur T^{-1} .

Le complémentaire de $X' \cap Y'$ dans $\mathbb{P}_k^1$ est constitué de deux points fermés de corps résiduel k : l'origine de $X' \simeq \mathbb{A}_k^1$ (le point d'annulation de T) et l'origine de $Y' \simeq \mathbb{A}_k^1$ (le point d'annulation de S). Comme $S = T^{-1}$ sur l'ouvert $X' \cap Y'$, il est raisonnable, si l'on décide par exemple de privilégier la variable T , de noter 0 l'origine de X' et ∞ l'origine de Y' (puisque cette dernière est définie par l'équation $S = 0$ à laquelle on pense comme « $T^{-1} = 0$ »). On peut donc voir $\mathbb{P}_k^1$ comme la droite affine à laquelle on a rajouté un point fermé de corps résiduel k «à l'infini».

Si l'on effectue la construction analogue en topologie en remplaçant $\mathbb{A}_k^1$ par $\mathbb{R}$, on obtient un cercle, la droite réelle se recollant par ses deux bouts sur le point à l'infini; si l'on remplace $\mathbb{A}_k^1$ par $\mathbb{C}$, on obtient une sphère. Dans les deux cas, l'espace construit apparaît comme une compactification de l'espace de départ (celle d'Alexandrov, en l'occurrence).

Cela reste vrai *mutatis mutandis* dans le cadre des schémas : nous avons déjà évoqué l'existence d'un avatar schématique de la compacité que nous rencontrerons plus loin, la *propreté*; et nous verrons à cette occasion que $\mathbb{P}_k^1$ est un k -schéma propre.

(5.2.5.2) Déterminons maintenant la k -algèbre des sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}$. Se donner un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(\mathbb{P}_k^1)$, c'est se donner une fonction sur X' et une fonction sur Y' dont les restrictions à $X' \cap Y'$ coïncident. Autrement dit, cela revient à se donner un polynôme $P \in k[T]$ et un polynôme $Q \in k[S]$ dont les images dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(X' \cap Y') = k[T, T^{-1}]$ coïncident. La restriction de S à l'ouvert $X' \cap Y'$ étant égale à T^{-1} , cette condition de coïncidence signifie simplement que l'on a $P = Q(T^{-1})$ dans l'anneau $k[T, T^{-1}]$. La seule possibilité pour qu'un polynôme en T soit égal à un polynôme en T^{-1} est évidemment que les deux soient constants, et il vient $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(\mathbb{P}_k^1) = k$.

(5.2.5.3) *Remarque.* On a signalé au 5.2.5.1 que l'on pouvait penser à $\mathbb{P}_k^1$ comme à un objet compact, et l'on a par ailleurs vu au 5.2.5.2 que les seules fonctions globales sur $\mathbb{P}_k^1$ sont les constantes : c'est un cas particulier de l'avatar schématique du *principe du maximum* de la géométrie analytique complexe.

(5.2.5.4) Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(\mathbb{P}_k^1) = k$, son spectre est réduit à un point. Le morphisme canonique $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(\mathbb{P}_k^1)$ n'est donc évidemment pas un isomorphisme, et $\mathbb{P}_k^1$ n'est dès lors pas affine.

En fait, *ce n'est même pas un ouvert d'un schéma affine* : en effet, on sait d'après le 5.1.21.1 que tout morphisme de $\mathbb{P}_k^1$ vers un schéma affine se factorise par $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(\mathbb{P}_k^1)$, et a donc pour image ensembliste un point.

(5.2.6) La droite affine avec origine dédoublée. L'isomorphisme de k -algèbres

$$\begin{array}{ccc} k[S, S^{-1}] & \rightarrow & k[T, T^{-1}] \\ S & \mapsto & T \\ S^{-1} & \mapsto & T^{-1} \end{array}$$

induit un isomorphisme de k -schémas $\chi : U \rightarrow V$.

De manière analogue à ce qui a été fait au 5.2.5 on définit le recollement de X et Y le long de χ et χ^{-1} . Cette limite sera notée $\mathbb{D}_k$ (ce n'est pas une notation standard). Nous allons maintenant la décrire plus avant, en déclinant dans ce cas particulier les faits mentionnés au 5.2.2.4.

(5.2.6.1) Le k -schéma $\mathbb{D}_k$ est réunion de deux ouverts affines X'' et Y'' (les images de X et Y). Chacun d'eux est une copie de la droite affine : on a $X'' \simeq \text{Spec } k[T]$ et $Y'' \simeq \text{Spec } k[S]$. Leur intersection $X'' \cap Y''$ est égale à $D(T)$ en tant qu'ouvert de X'' , et donc à $\text{Spec } k[T, T^{-1}]$; elle est égale à $D(S)$ en tant qu'ouvert de Y'' , et donc à $\text{Spec } k[S, S^{-1}]$. L'isomorphisme entre $D(T) \subset X''$ et $D(S) \subset Y''$ induit par leurs identifications avec $X'' \cap Y''$ est celui fourni par le morphisme de k -algèbres qui envoie S sur T .

Le complémentaire de $X'' \cap Y''$ dans $\mathbb{D}_k$ est constitué de deux points fermés : l'origine de $X'' \simeq \mathbb{A}_k^1$ (le point d'annulation de T) et l'origine de $Y'' \simeq \mathbb{A}_k^1$ (le point d'annulation de S). Mais comme $S = T$ sur l'ouvert $X'' \cap Y''$, l'origine de Y'' n'est pas cette fois-ci «rejetée à l'infini» : tout se passe plutôt comme si l'on avait *dédoublé* l'origine classique en une origine dans X'' et une autre dans Y'' .

Si l'on effectuait la construction analogue en topologie en remplaçant $\mathbb{A}_k^1$ par $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on obtiendrait «une droite réelle (resp. complexe) avec origine dédoublée» qui n'est pas un espace séparé : tout voisinage de la première origine rencontre tout voisinage de la seconde.

Nous verrons plus loin qu'il existe une notion de k -schéma séparé, et que $\mathbb{D}_k$ n'est justement pas séparé. Mais cette notion n'est pas purement topologique (la topologie de Zariski n'est de toute façon presque jamais séparée).

(5.2.6.2) Déterminons maintenant la k -algèbre des sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}$. Se donner un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}(\mathbb{D}_k)$ c'est se donner une fonction sur X'' et une fonction sur Y'' dont les restrictions à $X'' \cap Y''$ coïncident. Autrement dit, cela revient à se donner un polynôme $P \in k[T]$ et un polynôme $Q \in k[S]$ dont les images dans $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}(X'' \cap Y'') = k[T, T^{-1}]$ coïncident. La restriction de S à $X'' \cap Y''$ étant égale à T , cette condition de coïncidence signifie simplement que le polynôme Q est égal à $P(S)$. La restriction à X'' induit donc un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}(\mathbb{D}_k) = k[T]$; de même, la restriction à Y'' induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}(\mathbb{D}_k) = k[S]$, l'isomorphisme entre $k[T]$ et $k[S]$ induit par ces deux identifications étant celui qui envoie T sur S .

(5.2.6.3) Soit P un polynôme appartenant à $k[T]$, vu comme fonction globale sur $\mathbb{D}_k$. Par définition, son évaluation en l'origine de X'' (en laquelle $T = 0$) est égale à $P(0)$. Quant à son évaluation en l'origine de Y'' (en laquelle $S = 0$), elle s'obtient en substituant S à T , puis en faisant $S = 0$; c'est donc encore $P(0)$.

Il s'ensuit que le morphisme canonique $p : \mathbb{D}_k \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}(\mathbb{D}_k)$ envoie les deux origines sur le même point de $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}(\mathbb{D}_k) \simeq \text{Spec } k[T] = \mathbb{A}_k^1$, à savoir

l'origine de $\mathbb{A}_k^1$. En particulier, p n'est pas un isomorphisme et $\mathbb{D}_k$ n'est dès lors pas affine.

En fait, *ce n'est même pas un ouvert d'un schéma affine* : en effet, on sait d'après le 5.1.21.1 que tout morphisme de $\mathbb{D}_k$ vers un schéma affine se factorise par p , et envoie donc les deux origines sur le même point.

Produits fibrés de schémas

(5.2.7) Le but de ce qui suit est de montrer que la catégorie des schémas admet des produits fibrés, et d'en donner une description (raisonnablement) explicite. Nous allons commencer par une remarque qui jouera un rôle crucial pour recoller nos constructions locales.

(5.2.7.1) Soient $f : Y \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow X$ deux morphismes de schémas. Supposons que l'on sache que $Y \times_X Z$ existe ; notons p sa projection sur Y , et q sa projection sur Z . Soient U, V et W des ouverts de X, Y et Z respectivement, tels que $f(V) \subset U$ et $g(W) \subset U$.

On vérifie alors immédiatement, en combinant propriétés universelles des produits fibrés et propriétés universelles des immersions ouvertes (5.1.11.1) que le produit fibré $V \times_U W$ existe, et qu'il s'identifie canoniquement à l'ouvert $p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W)$ de $Y \times_X Z$ (on note qu'il ne dépend pas de U).

(5.2.7.2) *Un cas particulier.* Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Le produit fibré $Y \times_X X$ existe et s'identifie tautologiquement à Y . Il résulte alors de 5.2.7.1 que pour tout ouvert U de X le produit fibré $Y \times_X U$ existe et s'identifie à l'ouvert $f^{-1}(U)$ de Y (on pourrait aussi le démontrer directement, là encore à l'aide de la propriété universelle des immersions ouvertes).

(5.2.8) Construction des produits fibrés. Nous allons procéder en deux étapes.

(5.2.8.1) *Produits fibrés de schémas affines.* Soit A un anneau et soient B et C deux A -algèbres. Dans la catégorie des anneaux, la somme amalgamée de B et C le long de A existe : ce n'est autre que le produit tensoriel $B \otimes_A C$.

Ce dernier peut évidemment se décrire également comme le produit fibré au-dessus de A de B et C dans $\mathbf{Ann}^{\text{op}}$. Or lorsqu'on voit Spec comme un foncteur covariant de $\mathbf{Ann}^{\text{op}}$ vers $\mathbf{EspLocAnn}$, il admet un adjoint à gauche, à savoir $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$ (5.1.21.2). Par conséquent, il commute aux limites ; en particulier $\text{Spec}(B \otimes_A C)$ s'identifie au produit fibré $\text{Spec } B \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } C$ dans la catégorie des espaces localement annelés, et *a fortiori* dans celle des schémas qui en est une sous-catégorie pleine.

(5.2.8.2) *Produits fibrés : le cas général.* Soient $f : Y \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow X$ des morphismes de schémas. Notons I l'ensemble des triplets (U, V, W) où U (resp. V , resp. W) est un ouvert affine de X (resp. Y , resp. Z) et où $f(V) \subset U$ et $g(W) \subset U$. On munit l'ensemble I de l'ordre partiel pour lequel on a $(U, V, W) \leq (U', V', W')$ si $U \subset U', V \subset V'$ et $W \subset W'$.

Pour tout $(U, V, W) \in I$, le produit fibré $V \times_U W$ existe dans la catégorie des schémas en vertu de 5.2.8.1. Soient (U, V, W) et (U', V', W') deux éléments de I avec $(U, V, W) \leq (U', V', W')$, et soient π_1 et π_2 les projections respectives de $V' \times_{U'} W'$ sur V' et W' . Il résulte de 5.2.7.1 que la flèche canonique de $V \times_U W$

dans $V' \times_{U'} W'$ est une immersion ouverte $a_{U,V,W,U',V',W'}$ qui identifie $V \times_U W$ à l'ouvert $\pi_1^{-1}(V) \cap \pi_2^{-1}(W)$ de $V' \times_{U'} W'$.

La donnée des schémas $V \times_U W$ pour (U, V, W) parcourant I , et des immersions ouvertes $a_{U,V,W,U',V',W'}$, constitue un diagramme $\mathcal{D}$ du type mentionné au 5.2.2.2. Il admet d'après *loc. cit.* une colimite P dans la catégorie des schémas – c'est ce qu'on appelle le recollement des $V \times_U W$ le long des immersions $a_{U,V,W,U',V',W'}$. Nous allons montrer que P s'identifie au produit fibré $Y \times_X Z$; pour tout (U, V, W) appartenant à I , nous utiliserons l'immersion ouverte $V \times_U W \hookrightarrow P$ pour identifier $V \times_U W$ à un ouvert de P (rem. 5.2.2.3).

Définition des projections. Soit $(U, V, W) \in I$. Soient $p_{U,V,W}$ et $q_{U,V,W}$ les flèches composées respectives

$$V \times_U W \rightarrow V \hookrightarrow Y \text{ et } V \times_U W \rightarrow W \hookrightarrow Z ;$$

elles vérifient l'égalité $f \circ p_{U,V,W} = g \circ q_{U,V,W}$. Il est immédiat la famille $(p_{U,V,W})$ (resp. $(q_{U,V,W})$) constitue un morphisme de $\mathcal{D}$ vers Y (resp. Z), et induit donc un morphisme p (resp. q) de P vers Y (resp. Z). Par construction, $f \circ p = g \circ q$.

Soit $(U, V, W) \in I$. Montrons que $p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W) = V \times_U W$ pour tout $(U, V, W) \in I$. Il est clair que $V \times_U W \subset p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W)$. Réciproquement, soit x appartenant à $p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W)$. Le point x appartient à $V' \times_{U'} W'$ pour un certain $(U', V', W') \in I$. Par hypothèse, l'image v de x sur V' est située sur V et l'image w de x sur W' est située sur W ; soit u l'image commune de v et w sur U' . Il existe alors un voisinage affine U'' de u dans $U \cap U'$, un voisinage affine V'' de v dans $V \cap V'$ et un voisinage affine W'' de w dans $W' \cap W''$ tels que $f(V'') \subset U''$ et $g(W'') \subset U''$. Par construction, $x \in V'' \times_{U''} W'' \subset V \times_U W$.

Vérification de la propriété universelle. Soit T un schéma et soient $\lambda: T \rightarrow Y$ et $\mu: T \rightarrow Z$ deux morphismes tels que $f \circ \lambda = g \circ \mu$. Nous allons montrer qu'il existe un unique morphisme $\pi: T \rightarrow P$ tel que $p \circ \pi = \lambda$ et $q \circ \pi = \mu$; notre argumentation va reposer de façon cruciale sur le fait suivant, qui est une conséquence immédiate des définitions : $\Omega \mapsto \text{Hom}(\Omega, P)$ est un faisceau sur T .

Comme un schéma est recouvert par ses ouverts affines, la famille $(\lambda^{-1}(V) \times \mu^{-1}(W))_{(U,V,W) \in I}$ constitue un recouvrement ouvert de T . Un morphisme $\pi: T \rightarrow P$ satisfait donc les égalités $p \circ \pi = \lambda$ et $q \circ \pi = \mu$ si et seulement si

$$p \circ \pi|_{\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W)} = \lambda|_{\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W)}$$

et

$$q \circ \pi|_{\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W)} = \mu|_{\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W)}$$

pour tout $(U, V, W) \in I$.

Soit $(U, V, W) \in I$. Si ψ est un morphisme de $\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W)$ dans P qui satisfait les égalités $p \circ \psi = \lambda|_{\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W)}$ et $q \circ \psi = \mu|_{\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W)}$ alors $\psi(\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W))$ est contenu dans $p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W)$, lequel est égal à $V \times_U W$ comme on l'a vu plus haut.

Il en résulte, compte tenu des propriétés universelles du produit fibré $V \times_U W$ et de l'immersion ouverte $V \times_U W \hookrightarrow P$, qu'il existe un et un seul morphisme ψ de $\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W)$ vers P vérifiant les égalités $p \circ \psi = \lambda|_{\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W)}$ et $q \circ \psi = \mu|_{\lambda^{-1}(V) \cap \mu^{-1}(W)}$; on le note $\psi_{U,V,W}$.

Soient (U', V', W') et (U, V, W) deux éléments de l'ensemble I tels que $(U', V', W') \leq (U, V, W)$. Comme $\psi_{U,V,W}|_{\lambda^{-1}(V') \cap \lambda^{-1}(W')}$ satisfait l'égalité qui caractérise $\psi_{U',V',W'}$, on a

$$\psi_{U,V,W}|_{\lambda^{-1}(V') \cap \lambda^{-1}(W')} = \psi_{U',V',W'}.$$

Les $\psi_{U,V,W}$ se recollent donc, lorsque (U, V, W) parcourt I , en un morphisme $\pi: T \rightarrow P$ qui par construction vérifie $p \circ \pi = \lambda$ et $q \circ \pi = \mu$, et est le seul morphisme de T dans P à satisfaire ces égalités. On a donc bien démontré que (P, p, q) s'identifie à $Y \times_X Z$.

(5.2.9) Quelques commentaires.

(5.2.9.1) *Produits fibrés, objet final, produits cartésiens.* On a signalé en 5.1.24.3 que $\text{Spec } \mathbb{Z}$ est l'objet final de la catégorie des espaces localement annelés ; c'est en particulier l'objet final de la catégorie des schémas.

Il s'ensuit au vu de 5.2.8 *et sq.* que le produit cartésien de deux schémas Y et Z existe toujours : c'est leur produit fibré au-dessus de $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

(5.2.9.2) L'une des difficultés techniques et psychologiques de la théorie des schémas est que l'espace topologique sous-jacent à un produit fibré *n'est pas*, en général, le produit fibré des espaces topologiques sous-jacents. Donnons un contre-exemple très simple.

Le produit fibré $\text{Spec } \mathbb{C} \times_{\text{Spec } \mathbb{R}} \text{Spec } \mathbb{C}$ est égal à $\text{Spec } \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &= \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[T]/T^2 + 1 \simeq \mathbb{C}[T]/T^2 + 1 \\ &= \mathbb{C}[T]/(T-i)(T+i) \simeq \mathbb{C}[T]/(T-i) \times \mathbb{C}[T]/(T+i) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Le produit fibré $\text{Spec } \mathbb{C} \times_{\text{Spec } \mathbb{R}} \text{Spec } \mathbb{C}$ s'identifie donc au spectre de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, c'est à dire à $\text{Spec } \mathbb{C} \coprod \text{Spec } \mathbb{C}$, qui comprend deux points. Mais comme $\text{Spec } \mathbb{C}$ et $\text{Spec } \mathbb{R}$ sont deux singletons, le produit fibré *topologique* de $\text{Spec } \mathbb{C}$ par lui-même au-dessus de $\text{Spec } \mathbb{R}$ est un singleton.

(5.2.9.3) Si $Y \rightarrow X$ et $Z \rightarrow X$ sont deux morphismes de schémas, il y a deux manières d'envisager le produit fibré $Y \times_X Z$ (aucune n'est meilleure que l'autre, tout dépend du contexte). On peut bien sûr y penser comme à un objet symétrique en Y et Z . Mais on peut également privilégier l'un des deux facteurs, disons Y , et voir $Y \times_X Z$ comme *un schéma qui est à Z ce que Y est à X* ; on traduit cette idée en disant que $Y \times_X Z$ est le *Z -schéma déduit du X -schéma Y par changement de base de X à Z* . Illustrons ces deux visions du produit fibré par des exemples.

Soit k un corps. On a

$$\mathbb{A}_k^1 \times_{\text{Spec } k} \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[S] \otimes_k k[T] = \text{Spec } k[S, T] = \mathbb{A}_k^2.$$

On se trouve ainsi face à un bon exemple de conception «symétrique» du produit fibré : le produit de la droite affine par elle-même (sur un corps de base fixé) est égal au plan affine.

Donnons-nous maintenant une extension L de k . On a alors

$$\mathbb{A}_k^1 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L = \text{Spec } k[T] \otimes_k L = \text{Spec } L[T] = \mathbb{A}_L^1.$$

Ici, c'est plutôt la seconde conception qui s'impose : $\mathbb{A}_L^1$ est à L ce que $\mathbb{A}_k^1$ est à k ; ou encore, si l'on préfère, le L -schéma $\mathbb{A}_L^1$ se déduit du k -schéma $\mathbb{A}_k^1$ par changement de base de k à L .

(5.2.9.4) Généralisation des exemples ci-dessus. Pour tout n , on note $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$ le schéma $\text{Spec } \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$. Pour tout couple (n, m) d'entiers on a

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^m &= \text{Spec } \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S_1, \dots, S_m] \\ &= \text{Spec } \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m] = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{n+m}. \end{aligned}$$

Si X est un schéma quelconque, on pose $\mathbb{A}_X^n = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} X$; on dit que c'est *l'espace affine de dimension n relatif sur X* . Si A est un anneau, on écrira le plus souvent $\mathbb{A}_A^n$ au lieu de $\mathbb{A}_{\text{Spec } A}^n$; on a $\mathbb{A}_A^n = \text{Spec } A[T_1, \dots, T_n]$. Lorsque A est un corps, cette notation est compatible avec celle précédemment introduite.

Soit X un schéma, soit Y un X -schéma, et soient n et m deux entiers. On a

$$\mathbb{A}_X^n \times_X Y = (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} X) \times_X Y = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} Y = \mathbb{A}_Y^n$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_X^n \times_X \mathbb{A}_X^m &= \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} X \times_X (X \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^m) \\ &= \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^m \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} X = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{n+m} \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} X = \mathbb{A}_X^{n+m}. \end{aligned}$$

(5.2.10) Structure de schéma sur une fibre. Soit $\psi : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas et soit x un point de X ; on dispose d'un morphisme canonique $\text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$ (5.1.13). Soit $p : Y \times_X \text{Spec } \kappa(x) \rightarrow Y$ la première projection. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \text{Spec } \kappa(x) & \longrightarrow & \text{Spec } \kappa(x) \\ p \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

assure que l'image de p est contenue dans $\psi^{-1}(x)$.

(5.2.10.1) Le morphisme p induit un homéomorphisme

$$Y \times_X \text{Spec } \kappa(x) \simeq \psi^{-1}(x).$$

En effet, grâce à 5.2.7.1, on peut raisonner localement sur Y et restreindre X au voisinage de x , ce qui autorise à supposer Y et X affines, auquel cas l'assertion voulue découle² de 4.1.27.

(5.2.10.2) Cet identification topologique $\psi^{-1}(x) \simeq Y \times_X \text{Spec } \kappa(x)$ permet de munir la fibre $\psi^{-1}(x)$ d'une structure de $\kappa(x)$ -schéma.

Que les fibres des morphismes soient elles-mêmes des objets de la théorie a de multiples avantages. Nous allons en mentionner un, particulièrement important : la présence éventuelle de nilpotents dans le faisceau structural

2. Modulo le fait suivant, dont nous laissons la vérification au lecteur : si A est un anneau et x un point de $\text{Spec } A$, le morphisme $\text{Spec } \kappa(x) \rightarrow \text{Spec } A$ induit par l'évaluation $A \rightarrow \kappa(x)$ coïncide avec celui défini au 5.1.13.

du schéma $\psi^{-1}(x)$ permet de détecter de manière naturelle et élégante les phénomènes de multiplicité.

Donnons un exemple. Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soit X le k -schéma $\text{Spec } k[U, V, T]/(U^2 + TV^2 - T)$. La flèche naturelle de $k[T]$ dans $k[U, V, T]/(U^2 + TV^2 - T)$ induit un morphisme p de X vers $\mathbb{A}_k^1$.

Soit $x \in \mathbb{A}_k^1$. Le $\kappa(x)$ -schéma $\psi^{-1}(x)$ est égal à

$$\text{Spec } \kappa(x)[U, V]/(U^2 + T(x)V^2 - T(x)).$$

Si $T(x) \neq 0$, c'est-à-dire si le point x n'est pas l'origine de la droite affine $\mathbb{A}_k^1$, le polynôme $U^2 + T(x)V^2 - T(x)$ de $\kappa(x)[U, V]$ est irréductible (car $\kappa(x)$ est de caractéristique différente de 2), et l'anneau des fonctions globales sur le schéma $\psi^{-1}(x)$ est intègre.

Si x est l'origine $T(x) = 0$, et $U^2 + T(x)V^2 - T(x) = U^2$; l'anneau des fonctions globales sur $\psi^{-1}(x)$ est alors égal à $k[U, V]/U^2$, et n'est pas réduit.

Cette apparition de nilpotents est la manifestation rigoureuse de ce qu'on décrirait informellement de la manière suivante : la famille de coniques affines d'équations $U^2 + TV^2 - T = 0$, dépendant du paramètre T , dégénère en une droite double lorsque $T = 0$.

(5.2.10.3) Soient $\psi : Y \rightarrow X$ et $Z \rightarrow X$ deux morphismes de schémas, soit z un point de Z et soit x son image sur X . La fibre de $Y \times_X Z$ en z s'identifie à

$$\begin{aligned} (Y \times_X Z) \times_Z \text{Spec } \kappa(z) &= Y \times_X \text{Spec } \kappa(z) \\ &= (Y \times_X \text{Spec } \kappa(x)) \times_{\text{Spec } \kappa(x)} \text{Spec } \kappa(z) = \psi^{-1}(x) \times_{\text{Spec } \kappa(x)} \text{Spec } \kappa(z). \end{aligned}$$

(5.2.11) Nous allons maintenant essayer de décrire précisément la différence entre l'espace sous-jacent au produit fibré et le produit fibré des espaces sous-jacents. Pour ce faire, il va être commode de noter $|X|$ l'espace topologique sous-jacent à un schéma X .

(5.2.11.1) Lemme. Soient $\psi : Y \rightarrow X$ et $\chi : Z \rightarrow X$ deux morphismes de schémas. Il existe une application continue surjective naturelle

$$\pi : |Y \times_X Z| \rightarrow |Y| \times_{|X|} |Z|.$$

Si $(y, z) \in |Y| \times_{|X|} |Z|$ et si x désigne l'image commune de y et z sur X alors

$$\pi^{-1}(y, z) \simeq \text{Spec } \kappa(y) \times_{\text{Spec } \kappa(x)} \text{Spec } \kappa(z) = \text{Spec } (\kappa(y) \otimes_{\kappa(x)} \kappa(z)).$$

Démonstration. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Z & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

en induit un

$$\begin{array}{ccc} |Y \times_X Z| & \longrightarrow & |Z| \\ \downarrow & & \downarrow \\ |Y| & \longrightarrow & |X| \end{array}$$

dans la catégorie des espaces topologiques qui, en vertu de la propriété universelle du produit fibré, induit lui-même une application continue

$$\pi : |Y \times_X Z| \rightarrow |Y| \times_{|X|} |Z|.$$

Donnons-nous maintenant x, y et z comme dans l'énoncé, et notons p et q les projections respectives de $Y \times_X Z$ sur Y et X . Par définition, l'espace topologique $\pi^{-1}(y, z)$ est l'intersection $p^{-1}(y) \cap q^{-1}(z)$.

Il résulte de 5.2.10.3 que $q^{-1}(z)$ s'identifie à $\psi^{-1}(x) \times_{\text{Spec } \kappa(x)} \text{Spec } \kappa(z)$. En réappliquant *loc. cit.* à la projection de $\psi^{-1}(x) \times_{\text{Spec } \kappa(x)} \text{Spec } \kappa(y)$ sur $\psi^{-1}(x)$, on voit que

$$\pi^{-1}(y, z) = p^{-1}(y) \cap q^{-1}(z) \simeq \text{Spec } \kappa(y) \times_{\text{Spec } \kappa(x)} \text{Spec } \kappa(z).$$

Pour conclure, il reste à établir la surjectivité de π , c'est-à-dire à s'assurer que la fibre $\pi^{-1}(y, z) \simeq \text{Spec } (\kappa(y) \otimes_{\kappa(x)} \kappa(z))$ est non vide, c'est-à-dire encore que l'anneau $\kappa(y) \otimes_{\kappa(x)} \kappa(z)$ est non nul. Mais c'est immédiat, puisqu'il s'agit du produit tensoriel de deux espaces vectoriels non nuls sur le corps $\kappa(x)$.

(5.2.11.2) Soient $\psi : Y \rightarrow X$ et $\chi : Z \rightarrow X$ deux morphismes de schémas. On déduit du lemme ci-dessus que $Y \times_X Z$ est vide si et seulement si $|Y| \times_{|X|} |Z|$ est vide, c'est-à-dire si et seulement si $\psi(Y) \cap \chi(Z) = \emptyset$.

Comme la vacuité d'un spectre équivaut à la nullité de l'anneau correspondant, la remarque ci-dessus permet de donner une interprétation géométrique d'un phénomène *a priori* purement algébrique : si A est un anneau et B et C sont deux A -algèbres alors $B \otimes_A C$ est nul si et seulement si les images de $\text{Spec } B$ et $\text{Spec } C$ sur $\text{Spec } A$ sont disjointes.

5.3 Faisceaux quasi-cohérents

Faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine

(5.3.1) Soit A un anneau, soit X le spectre de A et soit M un A -module. Aux paragraphes 5.1.1 *et sq.* nous avons construit un faisceau $\widetilde{M}$ sur X . Lorsque M est égal à A , c'est ce faisceau que nous avons utilisé pour faire de X un espace localement annelé ; en général, $\widetilde{M}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module, qui possède les propriétés suivantes (5.1.3.1, th. 5.1.5) :

- pour tout $f \in A$ on a $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$; en particulier $\widetilde{M}(X) = M$ (prendre f égal à 1) ;
- si x est un point de X correspondant à un idéal premier $\mathfrak{p}$ alors

$$\widetilde{M}_x = M_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_A M.$$

(5.3.2) Soit M un A -module, soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module et soit u une application A -linéaire de M vers $\mathcal{F}(X)$. Pour tout ouvert U de X , l'application u induit par composition avec la restriction une application A -linéaire de M vers $\mathcal{F}(U)$. La structure de A -module de $\mathcal{F}(U)$ est sous-jacente à une structure de $S(U)^{-1}A$ -module, et la flèche $M \rightarrow \mathcal{F}(U)$ se prolonge donc de manière unique en une application $S(U)^{-1}A$ -linéaire de $S(U)^{-1}M$ vers $\mathcal{F}(U)$, c'est-à-dire de $M_{\text{pref}}(U)$

vers $\mathcal{F}(U)$ (nous utilisons les notations de 5.1.1 *et sq.*). Ces flèches étant compatibles aux restrictions lorsque U varie, elles définissent un morphisme de préfaisceau de M_{pref} vers $\mathcal{F}$, qui est l'unique morphisme A_{pref} -linéaire de préfaisceaux de M_{pref} vers $\mathcal{F}$ induisant u au niveau des sections globales. Il s'ensuit, compte-tenu du fait que $\widetilde{M}(X) = M_{\text{pref}}(X) = M$ et de la propriété universelle de la faisceautisation, qu'il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\widetilde{u}$ de $\widetilde{M}$ vers $\mathcal{F}$ qui induit u au niveau des sections globales.

(5.3.3) La construction décrite en 5.3.2 a deux conséquences importantes.

(5.3.3.1) Si M et N sont deux A -modules, on peut appliquer 5.3.2 en prenant pour $\mathcal{F}$ le faisceau $\widetilde{N}$; on en déduit que pour tout morphisme A -linéaire u de M vers N il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\widetilde{u}: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ induisant u au niveau des sections globales.

Cette construction fait de $M \mapsto \widetilde{M}$ un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des A -modules vers celles de $\mathcal{O}_X$ -modules.

(5.3.3.2) Soit M un A -module, soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. On a construit en 5.3.2 une bijection

$$\text{Hom}_A(M, \mathcal{F}(X)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathcal{F})$$

qui est visiblement fonctorielle en M et $\mathcal{F}$. Elle fait donc de $M \mapsto \widetilde{M}$ l'adjoint à gauche de $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$.

(5.3.4) Soit M un A -module. Nous allons proposer une construction de $\widetilde{M}$ qui diffère un peu de celle donnée initialement, et est plus naturelle du point de vue des espaces localement annelés; si nous ne l'avons pas utilisée lorsque nous lorsque nous avons défini $\widetilde{M}$, c'est parce que nous n'avions alors pas encore muni X d'une structure d'espace localement annelé. Nous reprenons les notations de 5.1.1 *et sq.*

(5.3.4.1) Soit $M^\sharp$ le préfaisceau sur X donné par la formule $U \mapsto \mathcal{O}_X(U) \otimes_A M$. Si U est un ouvert de X , l'application de restriction $A \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ envoie les éléments de $S(U)$ sur des éléments inversibles de $\mathcal{O}_X(U)$; elle induit donc un morphisme de $S(U)^{-1}A$ vers $\mathcal{O}_X(U)$, et partant un morphisme de $M_{\text{pref}}(U)$ vers $M^\sharp(U)$. Cette construction est compatible aux restrictions, et l'on obtient ainsi un morphisme de préfaisceaux $M_{\text{pref}} \rightarrow M^\sharp$.

Par commutation du produit tensoriel aux colimites, la fibre de $M^\sharp$ en un point x de X s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_A M$, c'est-à-dire à $M_{\mathfrak{p}}$ si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier correspondant à x . Le morphisme de préfaisceaux $M_{\text{pref}} \rightarrow M^\sharp$ induit donc un isomorphisme au niveau des fibres, et partant un isomorphisme entre les faisceaux associés. Ainsi, $\widetilde{M}$ est le faisceau associé à $M^\sharp$.

(5.3.4.2) Soit U un ouvert affine de X . La restriction de $M^\sharp$ à U est le préfaisceau $V \mapsto M \otimes_A V = (M \otimes_A \mathcal{O}_X(U)) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V)$; c'est donc le préfaisceau $(M \otimes_X \mathcal{O}_X(U))^\sharp$. En conséquence, $\widetilde{M}|_U = \widetilde{(M \otimes_X \mathcal{O}_X(U))^\sharp}$; on dispose en particulier d'un isomorphisme naturel $\widetilde{M}(U) \simeq M \otimes_A \mathcal{O}_X(U)$, ce qui n'était jusqu'alors connu que lorsque U est de la forme $D(f)$ (5.3.1).

(5.3.5) Définition. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ sur X est *quasi-cohérent* s'il existe un A -module M et un isomorphisme $\widetilde{M} \simeq \mathcal{F}$.

(5.3.5.1) *Commentaire sur la terminologie.* Il existe également une notion de faisceau *cohérent* : c'est un faisceau quasi-cohérent satisfaisant certaines conditions de finitude, aisées à énoncer si A est noethérien mais plus délicates en général. Nous n'en aurons pas besoin dans ce cours.

(5.3.5.2) *Premiers exemples.* Le faisceau nul (qui est égal à $\widetilde{\{0\}}$) et le faisceau $\mathcal{O}_X = \widetilde{A}$ sont quasi-cohérents.

(5.3.5.3) On déduit de 5.3.1 et 5.3.3.1 que $M \mapsto \widetilde{M}$ établit une équivalence entre la catégorie des A -modules et celle des $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents, et que $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ en est un quasi-inverse.

(5.3.6) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module quelconque sur X . En vertu de 5.3.2, $\text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$ induit un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\widetilde{\mathcal{F}(X)} \rightarrow \mathcal{F}$. Il est clair que $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent si et seulement si ce morphisme est un isomorphisme. Cela peut se tester sur les fibres, et revient donc à demander que $\mathcal{F}(X) \otimes_A \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{F}_x$ soit un isomorphisme pour tout $x \in X$.

(5.3.6.1) Quelle est la signification intuitive de la quasi-cohérence ? On peut y penser comme à une propriété de *stabilisation*. En effet, on déduit de 5.3.6 qu'un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent si et seulement si pour tout ouvert affine U de X , le morphisme naturel $\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est un isomorphisme. Autrement dit, lorsqu'on passe de X à U , le module des sections de $\mathcal{F}$ change aussi peu que possible : il subit simplement une extension des scalaires, ce qui veut dire en quelque sorte qu'aucune nouvelle section ou aucune nouvelle relation entre sections déjà existantes ne surgissent *ex nihilo*.

(5.3.6.2) Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ un diagramme dans la catégorie des A -modules. D'après le lemme 2.7.2.4, ce diagramme est une suite exacte si et seulement si $0 \rightarrow M'_p \rightarrow M_p \rightarrow M''_p \rightarrow 0$ est une suite exacte pour tout idéal premier p de A . Compte-tenu de 5.3.1 et du fait que les propriétés d'exactitude faisceautique se détectent fibre à fibre, on en déduit que la suite de modules $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est exacte si et seulement si la suite de faisceaux $0 \rightarrow \widetilde{M'} \rightarrow \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M''} \rightarrow 0$ est exacte.

Insistons sur une conséquence frappante de cet énoncé : *lorsqu'on le restreint à la catégorie des faisceaux quasi-cohérents*, le foncteur des sections globales $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ est exact (rappelons qu'en général, il est seulement exact à gauche : la surjectivité peut poser des problèmes).

(5.3.6.3) Soit $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme entre faisceaux quasi-cohérents sur X . Son noyau, son conoyau et son image (faisceautiques!) sont alors quasi-cohérents.

En effet, soient M et N les modules de sections globales de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$; on a $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$, $\mathcal{G} \simeq \widetilde{N}$, et le morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est induit par une application A -linéaire $M \rightarrow N$. Si P (resp. Q) désigne le noyau (resp. conoyau) de celle-ci, il résulte de 5.3.6.2 que $\widetilde{P}$ (resp. $\widetilde{Q}$) est le noyau (resp. conoyau) de $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, d'où notre assertion en ce qui concerne le noyau et le conoyau ; on traite le cas de l'image en remarquant simplement que c'est le noyau du conoyau.

(5.3.6.4) Puisque le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ est un adjoint à gauche, il commute aux colimites. Par conséquent, une colimite de faisceaux quasi-cohérents est quasi-cohérente (la cohérence du conoyau établie en 5.3.6.3 ci-dessus est un cas

particulier de cette assertion) ; ceci entraîne notamment qu'une somme directe quelconque de faisceaux quasi-cohérents est quasi-cohérente.

(5.3.6.5) Par contre, on prendra garde qu'en général une limite de faisceaux quasi-cohérents (calculée dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules) n'est pas quasi-cohérente. Donnons un exemple simple. Soit $\mathcal{F}$ le $\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}$ -module $\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}$. Nous allons montrer qu'il n'est pas quasi-cohérent.

On a $\mathcal{F}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}((D(2))) = (\mathbb{Z}[1/2])^{\mathbb{N}}$. Mais la flèche canonique

$$\mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow (\mathbb{Z}[1/2])^{\mathbb{N}}$$

n'est pas un isomorphisme : en effet, nous invitons le lecteur à vérifier qu'elle identifie $\mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ au sous-module strict de $(\mathbb{Z}[1/2])^{\mathbb{N}}$ constitué des suites à dénominateurs bornés. En conséquence, $\mathcal{F}$ n'est pas quasi-cohérent.

Si l'on reprend le langage un peu imagé utilisé au 5.3.6.1, on peut dire que lorsqu'on passe de $\text{Spec } \mathbb{Z}$ à son ouvert affine $D(2)$, une flopée de nouvelles sections de $\mathcal{F}$ surgissent *ex nihilo* : toutes les suites à dénominateurs non bornés.

(5.3.7) Fonctorialité. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Notons Y le spectre de B , et soit $\psi : Y \rightarrow X$ le morphisme de schémas correspondant à φ . Soit M un A -module et soit N un B -module.

(5.3.7.1) Le $\mathcal{O}_X$ -module $\psi_* \widetilde{N}$ s'identifie à $\widetilde{{}_A N}$, où ${}_A N$ désigne N vu comme A -module. En particulier, le faisceau $\psi_* \widetilde{N}$ est quasi-cohérent. En effet, on a $\psi_* \widetilde{N}(X) = \widetilde{N}(Y) = N$. Soit maintenant U un ouvert affine de X , d'anneau des fonctions C . On a

$$\psi_* \widetilde{N}(U) = \widetilde{N}(\psi^{-1}(U)) = \widetilde{N}(Y \times_X U) = N \otimes_B (B \otimes_A C) = N \otimes_A C = \widetilde{{}_A N}(U)$$

Les ouverts affines formant une base de la topologie de X , le morphisme canonique de $\widetilde{{}_A N} = \widetilde{\psi_* \widetilde{N}(X)}$ vers $\psi_* \widetilde{N}$ est un isomorphisme, ce qu'on souhaitait établir.

(5.3.7.2) Le $\mathcal{O}_Y$ -module $\psi^* \widetilde{M}$ s'identifie à $\widetilde{B \otimes_A M}$ et est en particulier quasi-cohérent. En effet, on dispose par construction d'une application B -linéaire $B \otimes_A M \rightarrow \psi^* \widetilde{M}(Y)$; il suffit alors de montrer que la flèche composée

$$u : \widetilde{B \otimes_A M} \rightarrow \psi^* \widetilde{M}(Y) \rightarrow \psi^* \widetilde{M}$$

est un isomorphisme. Soit $y \in Y$ et soit x son image sur X . La fibre de $\widetilde{B \otimes_A M}$ en y s'identifie à $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_B (B \otimes_A M) = \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_A M$.

Quant à la fibre de $\psi^* \widetilde{M}$ en y , elle s'identifie à

$$\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \widetilde{M}_x = \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} (\mathcal{O}_{X,x} \otimes_A M) = \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_A M.$$

En conséquence, la flèche u induit un isomorphisme au niveau des fibres, et est de ce fait elle-même un isomorphisme.

(5.3.7.3) Remarque. Ce qu'on a vu plus haut au 5.3.4.2 est un cas particulier de ce qui précède : celui où Y est un ouvert affine de X .

Caractère local de la quasi-cohérence, faisceaux quasi-cohérents sur un schéma quelconque

(5.3.8) Nous allons maintenant établir un résultat fondamental, qui n'a rien d'évident au vu des définitions : le fait que la quasi-cohérence est une propriété *locale*. Comme vous allez le voir, la preuve n'est pas triviale, même si elle ne repose *in fine* que sur la sempiternelle condition d'égalité de deux fractions dans un module localisé.

(5.3.9) **Théorème.** *Soit A un anneau et soit X son spectre. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines, et soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent ;
- 2) $\mathcal{F}|_{U_i}$ est quasi-cohérent pour tout i .

Démonstration. L'implication 1) $\Rightarrow$ 2) découle directement de 5.3.4.2. Supposons maintenant que 2) soit vraie, et montrons 1). Toujours grâce à 5.3.4.2, on peut raffiner le recouvrement (U_i) sans altérer 2). Cela autorise à supposer que U_i est de la forme $D(f_i)$ pour tout i ; comme X est quasi-compact, on peut également faire l'hypothèse que l'ensemble d'indices I est fini.

Pour montrer que $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent, nous allons vérifier que le morphisme naturel $\widetilde{\mathcal{F}(X)} \rightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme. Cela peut se tester localement ; il suffit donc de s'assurer que $\widetilde{\mathcal{F}(X)}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}|_{U_i}$ est un isomorphisme pour tout i .

Fixons i , et montrons que $\widetilde{\mathcal{F}(X)}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}|_{U_i}$ est un isomorphisme. Les $\mathcal{O}_{U_i}$ -modules $\widetilde{\mathcal{F}(X)}|_{U_i}$ et $\mathcal{F}|_{U_i}$ étant quasi-cohérents, cette dernière condition se teste sur les sections globales : il suffit donc de s'assurer que

$$\widetilde{\mathcal{F}(X)}(U_i) = \mathcal{F}(X)_{f_i} \rightarrow \mathcal{F}(U_i)$$

est un isomorphisme.

(5.3.9.1) *Injectivité de $\mathcal{F}(X)_{f_i} \rightarrow \mathcal{F}(U_i)$.* Soit s/f_i^r un élément de $\mathcal{F}(X)_{f_i}$ dont l'image dans $\mathcal{F}(U_i)$ est nulle. Comme f_i est inversible sur $U_i = D(f_i)$, la restriction de s à U_i est nulle.

Soit $j \in I$ (ce qui suit est trivial si $j = i$, mais on n'exclut pas ce cas). La restriction de s à $U_i \cap U_j$ est *a fortiori* nulle, ce que l'on peut récrire $(s|_{U_j})|_{U_i \cap U_j} = 0$. Le faisceau $\mathcal{F}|_{U_j}$ est quasi-cohérent, et $U_i \cap U_j$ est l'ouvert $D(f_i)$ du schéma affine U_j ; en conséquence, $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ s'identifie à $\mathcal{F}(U_j)_{f_i}$. L'annulation de $s|_{U_j}$ sur $U_i \cap U_j$ signifie alors qu'il existe N tel que $f_i^N s|_{U_j} = 0$; comme l'ensemble I est fini, on peut choisir N de sorte que cette égalité vaille pour tout j . Puisque $\mathcal{F}$ est un faisceau, il vient $f_i^N s = 0$, et la fraction $s/f_i^r \in \mathcal{F}(X)_{f_i}$ est nulle, ce qui achève de montrer l'injectivité requise.

(5.3.9.2) *Surjectivité de $\mathcal{F}(X)_{f_i} \rightarrow \mathcal{F}(U_i)$.* Soit $\sigma \in \mathcal{F}(U_i)$. Il s'agit de montrer qu'il existe un entier N tel que $f_i^N \sigma$ se prolonge en une section globale de $\mathcal{F}$.

Soit $j \in I$ (ce qui suit est trivial si $j = i$, mais on n'exclut pas ce cas). Le faisceau $\mathcal{F}|_{U_j}$ est quasi-cohérent, et $U_i \cap U_j$ est l'ouvert $D(f_i)$ du schéma

affine U_j ; en conséquence, $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ s'identifie à $\mathcal{F}(U_j)_{f_i}$. Il s'ensuit qu'il existe n tel que la restriction $f_i^n \sigma|_{U_i \cap U_j}$ se prolonge en une section σ_j de $\mathcal{F}$ sur U_j ; comme l'ensemble I est fini, on peut choisir un entier n convenant pour tout j .

Soient j et j' deux éléments de I . Les restrictions de $\sigma_j|_{U_j \cap U_{j'}}$ et $\sigma_{j'}|_{U_j \cap U_{j'}}$ à $U_j \cap U_{j'} \cap U_i$ coïncident (elles sont toutes deux égales à la restriction de $f_i^n \sigma$). Comme $U_j \cap U_{j'}$ est l'ouvert affine $D(f_{j'})$ de U_j , le faisceau $\mathcal{F}|_{U_j \cap U_{j'}}$ est quasi-cohérent ; puisque $U_i \cap U_j \cap U_{j'}$ est l'ouvert $D(f_i)$ du schéma affine $U_j \cap U_{j'}$, $\mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_{j'})$ s'identifie à $\mathcal{F}(U_j \cap U_{j'})_{f_i}$. Il existe donc un entier ℓ tel que $f_i^\ell \sigma_j|_{U_j \cap U_{j'}} = f_i^\ell \sigma_{j'}|_{U_j \cap U_{j'}}$; comme l'ensemble I est fini, on peut choisir un entier ℓ convenant pour tout (j, j') .

Posons $N = n + \ell$. Par construction, la famille des $f_i^N \sigma_j$ se recolle (pour j variable) en une section globale s de $\mathcal{F}$, et $s|_{U_i} = f_i^N \sigma$. $\square$

(5.3.10) Proposition-définition. Soit X un schéma et soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) pour tout ouvert affine U de X , le $\mathcal{O}_U$ -module $\mathcal{F}|_U$ est quasi-cohérent ;
- 2) il existe un recouvrement (U_i) de X par des ouverts affines tels que $\mathcal{F}|_{U_i}$ soit un $\mathcal{O}_{U_i}$ -module quasi-cohérent pour tout i .

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent.

Démonstration. Il est clair que 1) $\Rightarrow$ 2). Réciproquement, supposons que 2) soit satisfaite, et soit U un ouvert affine de X . Il existe un recouvrement ouvert (V_j) de U par des ouverts affines tel que V_j soit contenu pour tout j dans $U_{i(j)} \cap U$ pour un certain indice $i(j)$.

Pour tout j , le faisceau $\mathcal{F}|_{V_j}$ est la restriction du faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}|_{U_{i(j)}}$, et est donc quasi-cohérent. Il résulte alors du théorème 5.3.9 que $\mathcal{F}|_U$ est quasi-cohérent. $\square$

(5.3.11) Premières propriétés. Soit X un schéma.

(5.3.11.1) Le faisceau nul ainsi que le structural $\mathcal{O}_X$ sont quasi-cohérents en vertu de 5.3.5.2.

(5.3.11.2) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. Il résulte immédiatement de la définition que si $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent, sa restriction à tout ouvert de X l'est encore ; et que s'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X tel que $\mathcal{F}|_{U_i}$ soit quasi-cohérent pour tout i , alors $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent.

(5.3.11.3) On déduit de 5.3.6.3 et 5.3.6.4 que le noyau, le conoyau et l'image d'un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents sont quasi-cohérents, et qu'une colimite de $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents est quasi-cohérente ; en particulier, une somme directe de $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents est quasi-cohérente.

(5.3.11.4) Soit $\psi: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas et soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent. L'image réciproque $\psi^* \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ sur Y est alors un $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent. En effet, comme la propriété est locale, on peut raisonner localement sur Y et X , et se ramener ainsi au cas où tous les deux sont affines, pour lequel l'assertion requise a été démontrée en 5.3.7.2.

(5.3.12) Soit X un schéma. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini, il est quasi-cohérent : c'est une conséquence immédiate du caractère local de la quasi-cohérence, et de la quasi-cohérence de $\mathcal{O}_X^m$ pour tout m .

Supposons maintenant que $X = \operatorname{Spec} A$ pour un certain anneau A , et soit M un A -module. On déduit de la quasi-compacité de $\operatorname{Spec} A$ que le faisceau quasi-cohérent $\widetilde{M}$ est localement libre de rang fini si et seulement si il existe une famille finie (f_i) d'éléments de A et une famille finie (n_i) d'entiers tels que $\widetilde{M}|_{D(f_i)}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{D(f_i)}^{n_i}$ pour tout i , c'est-à-dire encore tels que $M_{f_i} \simeq A_{f_i}^{n_i}$ pour tout i . On déduit alors de 2.7.12 que $\widetilde{M}$ est localement libre de rang fini si et seulement si M est projectif et de type fini.

(5.3.13) Image directe d'un faisceau quasi-cohérent. La situation est moins simple que pour l'image réciproque : comme nous allons le voir, l'image directe d'un faisceau quasi-cohérent n'est pas quasi-cohérente en général. Nous allons commencer par énoncer une condition de finitude suffisante – un peu rébarbative – pour qu'elle le soit, puis nous donnerons un contre-exemple dans un cas assez simple où cette condition n'est pas remplie.

(5.3.13.1) Soit A un anneau, soit X son spectre et soit $\psi : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur Y . On suppose que Y satisfait la propriété suivante :

(*) *il existe un recouvrement fini (U_i) de Y par des ouverts affines tels que $U_i \cap U_j$ soit pour tout (i, j) une réunion finie d'ouverts affines.*

Nous allons démontrer que sous cette hypothèse, $\psi_* \mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent. Pour cela, on écrit chacun des $U_i \cap U_j$ comme réunion finie d'ouverts affines $V_{ij\ell}$. On écrit $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ et $V_{ij\ell} = \operatorname{Spec} B_{ij\ell}$ pour tout i, j, ℓ .

Comme $\mathcal{F}$ est un faisceau, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{(s_i)_i \mapsto (s_i|_{V_{ij\ell}} - s_j|_{V_{ij\ell}})_{ij\ell}} \prod_{i,j,\ell} \mathcal{F}(V_{ij\ell}) .$$

Soit $f \in A$. On note Y', U'_i et $V'_{ij\ell}$ les produits fibrés

$$Y \times_X D(f), U_i \times_X D(f) \text{ et } V_{ij\ell} \times_X D(f),$$

et le f en indice fera référence à la localisation *en tant que A -module*. La A -algèbre A_f est plate. Par ailleurs, les produits intervenants dans la suite exacte ci-dessus comprennent par hypothèse un nombre fini de facteurs ; ce sont donc également des sommes directes, et de ce fait ils commutent au produit tensoriel. Il en résulte qu'en appliquant $A_f \otimes_A \bullet$ à la suite précédente, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(Y)_f \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i)_f \xrightarrow{(s_i)_i \mapsto (s_i|_{V_{ij\ell}} - s_j|_{V_{ij\ell}})_{ij\ell}} \prod_{i,j,\ell} \mathcal{F}(V_{ij\ell})_f .$$

Fixons i, j et ℓ . On a

$$\mathcal{F}(U_i)_f = A_f \otimes_A \mathcal{F}(U_i) = (A_f \otimes_A A_i) \otimes_{A_i} \mathcal{F}(U_i) = \mathcal{F}(U'_i)$$

car $U'_i = \operatorname{Spec} (A_f \otimes_A A_i)$ et car $\mathcal{F}|_{U_i}$ est quasi-cohérent. On a de même

$$\mathcal{F}(V_{ij\ell})_f = A_f \otimes_A \mathcal{F}(V_{ij\ell}) = (A_f \otimes_A B_{ij\ell}) \otimes_{B_{ij\ell}} \mathcal{F}(V_{ij\ell}) = \mathcal{F}(V'_{ij\ell}).$$

La suite exacte ci-dessus se récrit donc

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(Y)_f \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U'_i) \xrightarrow{(s_i)_i \mapsto (s_i|_{V'_{ij\ell}} - s_j|_{V'_{ij\ell}})_{ij\ell}} \prod_{i,j,\ell} \mathcal{F}(V'_{ij\ell}).$$

Les U'_i forment un recouvrement ouvert de Y' , et les $V'_{ij\ell}$ forment pour tout i un recouvrement ouvert de U_i . En utilisant une fois encore le fait que $\mathcal{F}$ faisceau, on déduit de ce qui précède que la flèche naturelle de $\mathcal{F}(Y)_f$ vers $\mathcal{F}(Y') = \mathcal{F}(Y \times_X D(f)) = \psi_* \mathcal{F}(D(f))$ est un isomorphisme. Comme les $D(f)$ forment une base d'ouverts de X , le morphisme naturel de $\mathcal{O}_X$ -modules $\widehat{A\mathcal{F}(Y)} = \psi_* \widehat{\mathcal{F}(X)} \rightarrow \psi_* \mathcal{F}$ est un isomorphisme, et $\psi_* \mathcal{F}$ est quasi-cohérent.

(5.3.13.2) Un contre-exemple. Dans le raisonnement suivi ci-dessus, l'hypothèse (*) joue un rôle crucial : elle permet de décrire le module des sections globales du faisceau $\mathcal{F}$ par une suite exacte mettant en jeu des produits *finis* de modules, produits qui sont donc des sommes directes, et commutent dès lors au produit tensoriel. Nous allons maintenant donner un exemple simple de situation où (*) est prise en défaut, et où il existe un faisceau quasi-cohérent dont l'image directe n'est pas quasi-cohérente.

Soit T la somme disjointe de copies de $\text{Spec } \mathbb{Z}$ paramétrée par $\mathbb{N}$, et soit ψ l'unique morphisme de T vers $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Le schéma T n'est manifestement pas quasi-compact, et ne peut donc être réunion finie d'ouverts affines ; en conséquence, l'hypothèse (*) n'est pas vérifiée. Nous allons montrer que $\psi_* \mathcal{O}_T$ n'est pas quasi-cohérent.

Pour tout ouvert U de $\text{Spec } \mathbb{Z}$, l'ouvert $\psi^{-1}(U)$ est somme disjointe de copies de U paramétrées par $\mathbb{N}$, et l'on a donc

$$\psi_* \mathcal{O}_T(U) = \mathcal{O}_T(\psi^{-1}(U)) = (\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}(U))^{\mathbb{N}}.$$

Ainsi, $\psi_* \mathcal{O}_T = \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}$, dont on a vu au 5.3.6.5 qu'il n'est pas quasi-cohérent.

(5.3.13.3) Les résultats de 5.3.13.1 (qui concernait le cas d'un schéma de base affine) peuvent se globaliser comme suit. Soit $\psi : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas et soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent. Supposons que tout point de X admette un voisinage ouvert affine U tel que $\psi^{-1}(U)$ satisfasse (*) ; en vertu du caractère local de la quasi-cohérence, le $\mathcal{O}_X$ -module $\psi_* \mathcal{F}$ est alors quasi-cohérent.

Faisceaux quasi-cohérents d'idéaux et fermés

(5.3.14) Soit X un schéma et soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau quasi-cohérent d'idéaux. On note $V(\mathcal{I})$ le sous-ensemble de X constitué des points x possédant la propriété suivante : pour tout voisinage ouvert U de x et toute fonction f appartenant à $\mathcal{I}(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ on a $f(x) = 0$.

(5.3.14.1) Supposons que X est le spectre d'un anneau A ; le faisceau $\mathcal{I}$ est alors égal à $\tilde{I}$ pour un certain idéal I de A . Nous allons montrer que $V(\mathcal{I})$ est égal au fermé $V(I)$.

Comme $I = \mathcal{I}(X)$ on a par définition $V(\mathcal{I}) \subset V(I)$. Réciproquement, soit $x \in V(I)$ et soit U et f comme dans 5.3.14 ; il s'agit de montrer que $f(x) = 0$. Quitte à restreindre U on peut le supposer de la forme $D(g)$ avec $g(x) \neq 0$. Dans ce cas $f \in \tilde{I}(D(g)) = I_g$, ce qui veut dire que f s'écrit a/g^n avec $a \in I$ et $n \geq 0$. Comme $a \in I$ et $x \in V(I)$ on a $a(x) = 0$ et $f(x) = 0$, ce qu'on souhaitait.

(5.3.14.2) On ne suppose plus X affine. Il découle du 5.3.14.1 ci-dessus que $V(\mathcal{I}) \cap U$ est égal au fermé $V(\mathcal{I}(U))$ de U pour tout ouvert affine U de X . Comme être fermé est une propriété locale, $V(\mathcal{I})$ est un fermé de X .

(5.3.14.3) On peut également caractériser $V(\mathcal{I})$ comme le *support* du $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$, c'est-à-dire comme l'ensemble des points x de X tel que la fibre $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x$ soit *non nulle*.

En effet, soit $x \in X$. La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \rightarrow 0$$

induit une suite exacte de $\mathcal{O}_{X,x}$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_x \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x \rightarrow 0.$$

La fibre $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x$ s'identifie donc à $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x$. Elle est nulle si et seulement si il existe un élément $f \in \mathcal{I}_x$ qui n'appartient pas à l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, c'est-à-dire une section f de $\mathcal{I}$ définie au voisinage de x et telle que $f(x) \neq 0$. Autrement dit,

$$(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x = \{0\} \iff x \notin V(\mathcal{I}),$$

comme annoncé.

(5.3.14.4) Remarque. Notons j l'inclusion $V(\mathcal{I}) \hookrightarrow X$. Par ce qui précède, $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})|_{X \setminus V(\mathcal{I})}$ est nul. Le lecteur est invité à démontrer que cela équivaut à dire que l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \rightarrow j_*j^{-1}\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$$

est un isomorphisme.

(5.3.15) Nous nous proposons maintenant de démontrer que réciproquement, tout fermé d'un schéma X est de la forme $V(\mathcal{I})$ pour un certain faisceau d'idéaux quasi-cohérent $\mathcal{I}$ sur X . Pour cela, il est nécessaire de faire une petite digression et d'introduire la notion de schéma *réduit*.

(5.3.16) Lemme-définition. Soit X un schéma. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit ;
- ii) pour tout ouvert U de X , l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit ;
- iii) il existe un recouvrement (U_i) de X par des ouverts affines tels que $\mathcal{O}_X(U_i)$ soit réduit pour tout i .

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que X est réduit.

Démonstration. Supposons que i) est vraie, et soit U un ouvert de X . Soit f un élément nilpotent de $\mathcal{O}_X(U)$. Pour tout $x \in U$, le germe de f en x est nilpotent et donc nul d'après l'hypothèse i). Ainsi, f est nulle, et ii) est vraie.

Il est clair que ii) entraîne iii). Supposons maintenant que iii) est vraie, et soit $x \in X$. Il existe i tel que $x \in U_i$. Par hypothèse, U_i s'écrit $\text{Spec } A$ pour un certain anneau réduit A . L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U_i,x}$ est de la forme $A_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A ; il est en conséquence réduit d'après le lemme 2.7.2.3. $\square$

(5.3.17) Revenons maintenant au problème qui nous intéresse. On se donne un schéma X et un fermé F de X . Soit $\mathcal{J}(F)$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ défini par la formule

$$U \mapsto \{f \in \mathcal{O}_X(U), f(x) = 0 \ \forall x \in F \cap U\}.$$

Nous allons démontrer que $\mathcal{J}(F)$ est quasi-cohérent et que $F = V(\mathcal{J}(F))$. Ces deux propriétés étant locales, on peut supposer que X est affine; c'est donc le spectre d'un anneau A , et $F = V(I)$ pour un certain idéal I de A que l'on peut choisir radical.

(5.3.17.1) Nous allons montrer que $\mathcal{J}(F) = \tilde{I}$, ce qui assurera la quasi-cohérence de $\mathcal{J}(F)$. En vertu de 5.3.14.1, on a $V(\tilde{I}) = V(I) = F$, ce qui montre que $\tilde{I} \subset \mathcal{J}(F)$; nous allons établir l'inclusion réciproque.

Soit donc un ouvert U de X et f un élément de $\mathcal{J}(F)(U)$; il s'agit de vérifier que $f \in \tilde{I}(U)$. On peut s'en assurer localement, et donc supposer que U est de la forme $D(g)$ pour un certain $g \in A$. La fonction f s'annule alors par hypothèse en tout point du fermé $F \cap D(g)$ de $D(g) = \text{Spec } A_g$, qui n'est autre que $V(I \cdot A_g) = V(I_g)$.

Puisque $V(I_g)$ s'identifie à $\text{Spec } A_g/I_g$, l'image $\bar{f}$ de f dans A_g/I_g s'annule en tout point de $\text{Spec } A_g/I_g$, ce qui veut dire qu'elle est nilpotente. Mais comme I est radical, A/I est réduit, et $\text{Spec } A/I$ est donc un schéma réduit; en conséquence, $A_g/I_g = \mathcal{O}_{\text{Spec } A/I}(D(\bar{g}))$ est réduit, et son élément nilpotent $\bar{f}$ est dès lors nul. Il s'ensuit $f \in I_g = \tilde{I}(D(g))$, ce qu'on souhaitait.

(5.3.17.2) On a donc $\mathcal{J}(F) = \tilde{I}$, et partant $V(\mathcal{J}(F)) = V(\tilde{I})$. Mais d'après 5.3.14.1, ce dernier est égal à $V(I) = F$, ce qui achève la démonstration.

(5.3.17.3) *Remarque.* Il résulte immédiatement des définitions que si $\mathcal{J}$ est un faisceau d'idéaux quasi-cohérent tel que $V(\mathcal{J}) = F$ alors $\mathcal{J}$ est contenu dans $\mathcal{J}(F)$; autrement dit, $\mathcal{J}(F)$ est le plus grand faisceau quasi-cohérent d'idéaux définissant F .

5.4 Morphismes affines

Spectre d'une algèbre quasi-cohérente et morphismes affines

(5.4.1) Soit X un schéma. Une $\mathcal{O}_X$ -algèbre $\mathcal{A}$ est dite quasi-cohérente si le $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{A}$ est quasi-cohérent. Donnons quelques exemples.

(5.4.1.1) Si $\mathcal{J}$ est un faisceau quasi-cohérent sur X , le quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ est une $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente.

(5.4.1.2) Supposons que X est le spectre d'un anneau A . Si B est une A -algèbre, le faisceau quasi-cohérent $\tilde{B}$ hérite d'une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$ -algèbre. Il découle de 5.3.5.3 que $B \mapsto \tilde{B}$ induit une équivalence entre la catégorie

des A -algèbres et celle des $\mathcal{O}_X$ -algèbres quasi-cohérentes, dont $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}(X)$ est un quasi-inverse.

(5.4.2) Le spectre d'une algèbre quasi-cohérente. Le but de ce qui suit est de donner une variante globale (ou relative, ou faisceautique, comme on voudra) du foncteur $A \mapsto \text{Spec } A$. On fixe un schéma X , et une $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}$.

(5.4.2.1) Pour tout ouvert affine U de X , on pose $Y_U = \text{Spec } \mathcal{A}(U)$; c'est un schéma affine. Comme $\mathcal{A}(U)$ est une $\mathcal{O}_X(U)$ -algèbre, le schéma Y_U est fourni avec un morphisme naturel $Y_U \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_X(U) = U \hookrightarrow X$.

(5.4.2.2) Soient maintenant U et V deux ouverts affines de X tels que V soit contenu dans U . Comme la $\mathcal{O}_X$ -algèbre $\mathcal{A}$ est quasi-cohérente, on a

$$\mathcal{A}(V) = \mathcal{O}_X(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{A}(U)$$

et donc $Y_V = Y_U \times_U V$. Il existe par conséquent une immersion ouverte naturelle ι_{VU} de Y_V dans Y_U , laquelle est un X -morphisme.

(5.4.2.3) Le diagramme constitué des Y_U et des immersions ι_{VU} est du type décrit au 5.2.2.2; on peut donc recoller les Y_U le long des ι_{VU} ; on obtient un X -schéma que l'on appelle le *spectre de la $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}$* et que l'on note $\text{Spec } \mathcal{A}$; nous identifierons chacun des Y_U à un ouvert de $\text{Spec } \mathcal{A}$. Soit π le morphisme $\text{Spec } \mathcal{A} \rightarrow X$.

Soit U un ouvert affine de X . On a l'égalité $\pi^{-1}(U) = Y_U$. En effet, il est clair que $Y_U \subset \pi^{-1}(U)$. Réciproquement, soit $x \in \pi^{-1}(U)$. Le point x appartient à Y_V pour un certain V ; par hypothèse, l'image v de x sur V appartient à U . Soit U' un voisinage ouvert affine de v dans $U \cap V$; comme v appartient à U' , le point x appartient à $U' \times_V Y_V = Y_{U'} = U' \times_U Y_U$; ainsi, $x \in Y_U$.

On a donc une identification naturelle

$$\pi^{-1}(U) = \text{Spec } \mathcal{A} \times_X U \simeq \text{Spec } \mathcal{A}(U),$$

modulo laquelle le morphisme $\pi^{-1}(U) \rightarrow U = \text{Spec } \mathcal{O}_X(U)$ est induit par la flèche structurale $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{A}(U)$. Il en résulte un isomorphisme

$$\pi_*(\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)}) \simeq \widetilde{(\mathcal{A}(U))} \simeq \mathcal{A}|_U.$$

La formation de ces isomorphismes commute aux restrictions, et elle induit donc (en vertu du fait que $\underline{\text{Isom}}(\pi_*\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{A}}, \mathcal{A})$ est un faisceau) un isomorphisme naturel $\pi_*\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{A}} \simeq \mathcal{A}$.

(5.4.3) Exemples et premières propriétés.

(5.4.3.1) Un exemple trivial. Soit A un anneau et soit B une A -algèbre. Par construction, le A -schéma $\text{Spec } \tilde{B}$ s'identifie à $\text{Spec } B$.

(5.4.3.2) Soit X un schéma et soit $\mathcal{A}$ le faisceau sur X associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)[T_1, \dots, T_n]$. C'est une $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente (en tant que somme directe dénombrable de copies de $\mathcal{O}_X$). Il découle immédiatement des définitions que le X -schéma $\text{Spec } \mathcal{A}$ s'identifie à $\mathbb{A}_X^n$.

(5.4.3.3) Soit X un schéma. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux $\mathcal{O}_X$ -algèbres quasi-cohérentes, tout morphisme $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induit un X -morphisme $\text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$

(le définir au-dessus des ouverts affines de X par functorialité contravariante du spectre classique, et recoller).

La flèche $\mathcal{A} \mapsto \text{Spec } \mathcal{A}$ apparaît ainsi de manière naturelle comme un foncteur contravariant de la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -algèbres quasi-cohérentes vers celle des X -schémas.

(5.4.3.4) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{O}_X$ -algèbres quasi-cohérentes et soient p et q les morphismes respectifs de $\text{Spec } \mathcal{A}$ et $\text{Spec } \mathcal{B}$ vers X . Soit λ l'application naturelle

$$\lambda: \text{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-Alg}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Hom}_X(\text{Spec } \mathcal{B}, \text{Spec } \mathcal{A})$$

définie au 5.4.3.3 ci-dessus. Soit $\varphi: \text{Spec } \mathcal{B} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$ un X -morphisme. Il induit un morphisme $\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{A}} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{B}}$ puis, par application de p_* , un morphisme

$$\mathcal{A} \simeq p_* \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{A}} \rightarrow p_* \circ \varphi_* \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{B}} = q_* \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{B}} \simeq \mathcal{B}.$$

On obtient ainsi une application μ de $\text{Hom}_X(\text{Spec } \mathcal{B}, \text{Spec } \mathcal{A})$ vers $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-Alg}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, et l'on vérifie aisément que λ et μ sont des bijections réciproques l'une de l'autre (c'est une propriété locale sur X , ce qui permet de se ramener au cas où tout le monde est affine, dans lequel c'est une reformulation de 5.1.20).

(5.4.4) Soit $\pi: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas.

(5.4.4.1) Soit U un ouvert affine de X ; on dispose d'un morphisme naturel $\pi^{-1}(U) \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(U))$ et pour tout ouvert affine V de U , d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi^{-1}(V) & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(V)) & \xrightarrow{\quad} & V \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow \alpha & \uparrow \\
 & & & \text{Spec } \mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(U)) \times_U V & \\
 & & \swarrow & & \downarrow \\
 \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(U)) & \longrightarrow & U
 \end{array}$$

dans lequel la flèche α est un isomorphisme dès que la $\mathcal{O}_X$ -algèbre $\pi_* \mathcal{O}_Y$ est quasi-cohérente. *Sous cette dernière hypothèse*, on dispose donc d'un diagramme

commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi^{-1}(V) & \longrightarrow & \operatorname{Spec} \pi_* \mathcal{O}_Y \times_X V & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & \operatorname{Spec} \pi_* \mathcal{O}_Y \times_X U & \longrightarrow & U
 \end{array}$$

Par recollement de ces diagrammes pour (U, V) variables, on obtient un morphisme de X -schémas $Y \rightarrow \operatorname{Spec} \pi_* \mathcal{O}_Y$.

(5.4.4.2) Supposons que $Y = \operatorname{Spec} \mathcal{A}$ pour une certaine $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}$. Dans ce cas $\pi_* \mathcal{O}_Y$ est quasi-cohérente et s'identifie plus précisément à $\mathcal{A}$ (5.4.2.3) ; la construction du 5.4.4.1 ci-dessus fournit alors un morphisme de X -schémas $\operatorname{Spec} \mathcal{A} \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{A}$, dont on vérifie aussitôt que c'est l'identité.

(5.4.5) Proposition-définition. Soit $\pi: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) La $\mathcal{O}_X$ -algèbre $\pi_* \mathcal{O}_Y$ est quasi-cohérente, et $Y \rightarrow \operatorname{Spec} \pi_* \mathcal{O}_Y$ est un isomorphisme.
- ii) Il existe une $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}$ et un X -isomorphisme

$$Y \simeq \operatorname{Spec} \mathcal{A}.$$

- iii) Pour tout ouvert affine U de X , le schéma $\pi^{-1}(U)$ est affine.
- iv) Il existe un recouvrement (U_i) de X par des ouverts affines tels que $\pi^{-1}(U_i)$ soit un schéma affine pour tout i .

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que π est affine, ou que Y est relativement affine sur X .

Démonstration. Il est clair que i) $\Rightarrow$ ii), et ii) $\Rightarrow$ i) d'après 5.4.4.2. Il découle de la construction même de $\operatorname{Spec} \mathcal{A}$ que ii) $\Rightarrow$ iii) (on l'a déjà signalé en 5.4.2.3), et iii) $\Rightarrow$ iv) est évident.

Supposons maintenant que iv) est vraie, et montrons que les conditions équivalentes i) et ii) sont vérifiées. Elles sont de nature locale sur X (c'est l'énoncé i) qui le montre) ; il suffit par conséquent de démontrer qu'elles sont vraies sur chaque U_i . Fixons donc i . Par hypothèse, U_i et $\pi^{-1}(U_i)$ sont affines ; il s'ensuit, en vertu de 5.4.3.1, que $\pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ satisfait ii) (et partant i)), ce qui achève la démonstration. $\square$

(5.4.6) Commentaires. L'aspect le plus spectaculaire de la proposition précédente est l'équivalence entre iii) et iv) : s'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines dont l'image réciproque par π est affine, alors $\pi^{-1}(U)$ est affine pour *tout* ouvert affine U de X .

Le lecteur sera peut-être étonné qu'un résultat aussi fort ait une preuve aussi courte et d'apparence très formelle. Mais lorsqu'on invoque le caractère local de i), on invoque en particulier le caractère local de la quasi-cohérence ; et ce dernier est lui-même fondé sur le théorème 5.3.9 dont la démonstration met en jeu des arguments non triviaux, à base de calcul de fractions dans les modules localisés. C'est donc là qu'il se «passe vraiment quelque chose».

(5.4.7) On peut reformuler 5.4.2.3, 5.4.3.3 et 5.4.3.4 en disant que pour tout schéma X , le foncteur $\mathcal{A} \mapsto \text{Spec } \mathcal{A}$ établit une anti-équivalence entre la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -algèbres quasi-cohérentes et celle des X -schémas relativement affines, dont $(\varphi: Y \rightarrow X) \mapsto \varphi_* \mathcal{O}_Y$ est un quasi-inverse.

(5.4.8) Stabilité du caractère affine par composition et changement de base.

(5.4.8.1) Soient $\varphi: Z \rightarrow Y$ et $\psi: Y \rightarrow X$ deux morphismes affines. La composée $\psi \circ \varphi$ est alors affine : c'est immédiat en utilisant la condition équivalente iii) de la proposition 5.4.5 ci-dessus.

(5.4.8.2) Soit X un schéma. Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme affine, et soit $\psi: Z \rightarrow X$ un morphisme. La projection $\pi: Y \times_X Z \rightarrow Z$ est alors affine. Plus précisément si $Y = \text{Spec } \mathcal{A}$ pour une certaine $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente $\mathcal{B}$, le Z -schéma $Y \times_X Z$ s'identifie alors à $\text{Spec } \psi^* \mathcal{B}$.

En effet, la question est locale sur Z , et *a fortiori* sur X . On peut donc supposer tout d'abord X affine, puis Z affine ; comme φ est affine, Y est affine. Soient A, B et C les anneaux correspondant respectivement aux schémas affines X, Y et Z . On a alors $\mathcal{B} = \widetilde{B}$, et

$$Y \times_X Z = \text{Spec } (B \otimes_A C) = \text{Spec } \widetilde{B \otimes_A C} = \text{Spec } \psi^* \widetilde{B} = \text{Spec } \psi^* \mathcal{B}.$$

Les immersions fermées

Nous allons maintenant présenter une première classe absolument fondamentale de morphismes affines : les *immersions fermées*.

(5.4.9) Soit X un schéma et soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) le morphisme φ est affine et le morphisme structural $\mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Y$ est surjectif ;
- ii) il existe un faisceau quasi-cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$ sur X tel que le X -schéma Y soit isomorphe à $\text{Spec } \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$.

En effet si i) est vraie, le noyau $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Y$ est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux et $\varphi_* \mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$, d'où ii) puisque $Y = \text{Spec } \varphi_* \mathcal{O}_Y$; et si ii) est vraie on a $\varphi_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$, d'où i).

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que φ est une *immersion fermée*. Notons que l'idéal $\mathcal{I}$ de ii) est alors uniquement déterminé : il est nécessairement égal au noyau de $\mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$. Nous dirons que $\mathcal{I}$ est le *faisceau d'idéaux associé à φ* , et inversement que φ est l'*immersion fermée associée à $\mathcal{I}$* .

(5.4.10) Exemples et premières propriétés.

(5.4.10.1) Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas et soit (U_i) un recouvrement ouvert de X . On déduit de la caractérisation d'une immersion fermée par la propriété i) ci-dessus que φ est une immersion fermée si et seulement si $\varphi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ est une immersion fermée pour tout i .

(5.4.10.2) Soit A un anneau. La caractérisation des immersions fermées par la propriété ii) ci-dessus assure qu'un morphisme $\varphi: Y \rightarrow \operatorname{Spec} A$ est une immersion fermée si et seulement si le A -schéma Y est de la forme $\operatorname{Spec} A/I$ pour un certain idéal I de A ; le faisceau $\mathcal{I}$ associé à φ est alors égal à $\tilde{I}$. On voit que dans ce cas, $Y \rightarrow \operatorname{Spec} A$ induit un homéomorphisme entre Y et le fermé $V(I) = V(\mathcal{I})$ de $\operatorname{Spec} A$.

(5.4.10.3) Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ une immersion fermée et soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ le faisceau d'idéaux associés. Le morphisme φ induit un homéomorphisme $Y \simeq V(\mathcal{I})$: cette assertion est en effet locale, ce qui permet de se ramener au cas affine traité au 5.4.10.2 ci-dessus.

(5.4.10.4) Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ une immersion fermée et soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ le faisceau d'idéaux associés. Le morphisme naturel $\varphi^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{O}_Y$ est alors un isomorphisme. Pour le voir, on raisonne localement sur X , ce qui permet de se ramener au cas affine. Le caractère bijectif de la flèche étudiée se vérifie alors fibres à fibres, et revient à l'assertion suivante d'algèbre commutative: soit A un anneau, soit I un idéal de A et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A contenant I ; la flèche canonique $A_{\mathfrak{p}}/IA_{\mathfrak{p}} \rightarrow (A/I)_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme.

(5.4.10.5) Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas et soit (U_i) un recouvrement de X par des ouverts affines. Il découle de 5.4.10.1 et 5.4.10.2 que pour que φ soit une immersion fermée, il faut et il suffit que pour tout i , le U_i -schéma $\varphi^{-1}(U_i)$ soit de la forme $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(U_i)/I_i$ pour un certain idéal I_i de $\mathcal{O}_X(U_i)$; et que si c'est le cas alors pour *tout* ouvert affine U de X , le U -schéma $\varphi^{-1}(U)$ est de la forme $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(U)/I$ pour un certain idéal I de $\mathcal{O}_X(U)$. Le lecteur s'assurera que ce passage des seuls ouverts d'un recouvrement affine fixé à *tous* les ouverts affines repose *in fine* là encore sur le caractère local de la quasi-cohérence (théorème 5.3.9).

(5.4.11) **Propriété universelle d'une immersion fermée.** Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ une immersion fermée, et soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ le faisceau d'idéaux correspondants. Le faisceau $\mathcal{I}$ est inclus dans le (et même égal au) noyau de $\mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_Y$.

(5.4.11.1) Soit Z un schéma et soit $\psi: Z \rightarrow X$ un morphisme tel que $\mathcal{I}$ soit contenu dans le noyau de $\mathcal{O}_X \rightarrow \psi_*\mathcal{O}_Z$. Il existe alors un unique morphisme $\chi: Z \rightarrow Y$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \chi \searrow & \psi \searrow & \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

commute. En effet, comme $U \mapsto \operatorname{Hom}(U, Y)$ est un faisceau sur Z , on peut raisonner localement, et donc supposer X et Z affines; soient A et B les anneaux correspondants. Comme φ est l'immersion fermée associée à $\mathcal{I}$, le A -schéma Y est égal à $\operatorname{Spec} A/I$, où I est l'idéal $\mathcal{I}(X)$ de A . Notre hypothèse sur ψ

signifie simplement que $I \subset \text{Ker}(A \rightarrow B)$, et le résultat voulu est une simple reformulation du fait que $A \rightarrow B$ se factorise alors de manière unique par A/I .

(5.4.11.2) On peut résumer conceptuellement ce qui précède en disant que (Y, φ) représente le foncteur

$$Z \mapsto \{\psi \in \text{Hom}(Z, X), \mathcal{I} \subset \text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_Z)\}.$$

(5.4.12) Bon comportement des immersions fermées par composition et changement de base.

(5.4.12.1) Soient $\psi: Z \rightarrow Y$ et $\varphi: Y \rightarrow X$ deux immersions fermées. La composée $\varphi \circ \psi$ est alors une immersion fermée : c'est par exemple une conséquence immédiate de 5.4.10.5 et du fait que la composée de deux morphismes d'anneaux surjectifs est encore une surjection.

(5.4.12.2) Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ une immersion fermée induite par un faisceau quasi-cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$ sur X , et soit $\psi: Z \rightarrow X$ un morphisme de schémas.

La flèche $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ induit une flèche $\psi^* \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_Z$ (qui n'a pas de raison d'être injective) ; son image est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_Z$, et il résulte des définitions que $V(\mathcal{J}) = \psi^{-1}(V(\mathcal{I}))$.

Il découle de la description du foncteur représenté par (Y, φ) (cf. 5.4.11.2) que le produit fibré $Y \times_X Z$ représente le foncteur

$$T \mapsto \{\chi \in \text{Hom}(T, Z), \mathcal{I} \subset \text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \psi_* \chi_* \mathcal{O}_T)\}.$$

La condition $\mathcal{I} \subset \text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \psi_* \chi_* \mathcal{O}_T)$ équivaut à dire que la flèche composée $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \psi_* \chi_* \mathcal{O}_T$ est nulle, c'est-à-dire encore par adjonction que la flèche composée $\psi^* \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow \chi_* \mathcal{O}_T$ est nulle ; mais c'est le cas si et seulement si $\mathcal{J} \subset \text{Ker}(\mathcal{O}_Z \rightarrow \chi_* \mathcal{O}_T)$. En conséquence, $Y \times_X Z \rightarrow Z$ est l'immersion fermée associée à $\mathcal{J}$.

On peut donner une deuxième preuve moins yonédésque de cette assertion. Il suffit de se ramener en raisonnant localement au cas où tous les schémas en jeu sont affines, et de remarquer qu'elle est alors une simple reformulation du fait que si A est un anneau, B une A -algèbre et I un idéal de A alors $B \otimes_A A/I \simeq B/IB$.

Mentionnons pour conclure ce paragraphe un cas particulier intéressant : supposons que $\psi: Z \rightarrow X$ se factorise par $Y \rightarrow X$; d'après la propriété universelle d'une immersion fermée assure, cela signifie que $\mathcal{I}$ est contenu dans $\text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_Z)$, et cette factorisation est alors unique.

Comme $\mathcal{I}$ est contenu dans $\text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_Z)$, la flèche $\psi^* \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_Z$ est nulle par adjonction, et $\mathcal{J}$ est dès lors nul. La projection $Y \times_X Z \rightarrow Z$ s'identifiant à l'immersion fermée définie par $\mathcal{J}$, il vient $Y \times_X Z = Z$.

(5.4.13) Produit fibré de deux immersions fermées. Soient $\varphi: Y \rightarrow X$ et $\psi: Z \rightarrow X$ deux immersions fermées, respectivement associées à des faisceaux d'idéaux $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$.

(5.4.13.1) On déduit de la description des foncteurs représentés par (Y, φ) et (Z, ψ) que $Y \times_X Z$ représente le foncteur

$$T \mapsto \{\chi \in \text{Hom}(T, X), \mathcal{I} \subset \text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \chi_* \mathcal{O}_T) \text{ et } \mathcal{J} \subset \text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \chi_* \mathcal{O}_T)\}$$

$$= \{\chi \in \text{Hom}(T, X), \mathcal{I} + \mathcal{J} \subset \text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \chi_* \mathcal{O}_T)\},$$

où la somme $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ est par définition le faisceau cohérent d'idéaux égal à l'image de la flèche canonique $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X$. En conséquence, $Y \times_X Z \rightarrow X$ est l'immersion fermée associée à $\mathcal{I} + \mathcal{J}$.

(5.4.13.2) L'immersion ψ se factorise par φ si et seulement si

$$\mathcal{J} \subset \text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Y) = \text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X / \mathcal{I}) = \mathcal{I}.$$

Si c'est le cas, on déduit de la remarque faite à la fin de 5.4.12.2 que $Z \times_X Y \simeq Z$; il découle alors de *loc. cit.* que $Z \rightarrow Y$ est l'immersion fermée associée au faisceau quasi-cohérent d'idéaux sur Y engendré par $\varphi^* \mathcal{J}$.

(5.4.14) La notion de sous-schéma fermé. Soit X un schéma, soit F un fermé de X et soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau quasi-cohérent d'idéaux tel que $V(\mathcal{I})$ soit égal à F (on sait qu'il en existe au moins un, cf. 5.3.17).

L'immersion fermée $\text{Spec } \mathcal{O}_X / \mathcal{I} \rightarrow X$ induit un homéomorphisme entre $\text{Spec } \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ et F , et permet donc de munir par transport de structure l'espace topologique F d'une structure de schéma; un tel schéma est appelé le *sous-schéma fermé de X défini par $\mathcal{I}$* , et l'on dit que F est son *support*.

On a signalé plus haut (rem. 5.3.14.4) que la restriction de $\mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ à $X \setminus F$ est nulle, et que cela se traduit en disant que $\mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ s'identifie à $i_* i^{-1} \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$, où i est l'inclusion de F dans X . Le faisceau $\mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ provient donc du faisceau d'anneaux $i^{-1} \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$ sur F , et il résulte de 5.4.10.4 que la structure de schéma dont on a muni F est précisément induite par $i^{-1} \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$.

(5.4.15) Soit X un schéma. L'ensemble des (classes d'isomorphie de) sous-schémas fermés de X est en bijection avec l'ensemble des faisceaux-quasi-cohérents d'idéaux sur X . On munit l'ensemble des sous-schémas fermés de X de la relation d'ordre pour laquelle $F \leq G$ si et seulement si $F \hookrightarrow X$ se factorise par $G \hookrightarrow X$. Si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ désignent les faisceaux d'idéaux respectivement associés à F et G , cela revient à demander que $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ (5.4.13.2).

(5.4.15.1) La structure réduite. Si F est un fermé de X , il existe un plus petit sous-schéma fermé F_{red} de X de support F : celui qui est induit par $\mathcal{I}(F)$ (cf. 5.3.17 et sq.). Nous allons montrer que F_{red} est réduit, et que c'est le seul sous-schéma fermé réduit de support F .

Fixons un recouvrement (U_i) de X par des ouverts affines et soit $\mathcal{J}$ un faisceau quasi-cohérent d'idéaux de support F . Le sous-schéma fermé défini par $\mathcal{J}$ est réduit si et seulement si $\mathcal{O}_X(U_i) / \mathcal{J}(U_i)$ est réduit pour tout i , ce qui revient à demander que l'idéal $\mathcal{J}(U_i)$ de $\mathcal{O}_X(U_i)$ soit radical pour tout i ; mais cela signifie précisément que $\mathcal{J} = \mathcal{I}(F)$ (5.3.17.1).

(5.4.15.2) Soit T un schéma et soit $\varphi: T \rightarrow X$ un morphisme. Si φ admet une factorisation (nécessairement unique) par F_{red} alors $\varphi(T) \subset F$.

Faisons maintenant l'hypothèse que $\varphi(T) \subset F$, et supposons de surcroît que T est *réduit*. Nous allons montrer que φ se factorise par F_{red} .

Soit U un ouvert de X et soit $f \in \mathcal{I}(F)(U)$. Comme $\varphi(T) \subset F$, la fonction $\varphi^* f \in \mathcal{O}_T(\varphi^{-1}(U))$ s'annule en tout point de U . Cela implique que sa restriction à tout ouvert affine de $\varphi^{-1}(U)$ est nilpotente, donc nulle *puisque T est*

réduit. Autrement dit, $\varphi^* f = 0$, ce qui revient à dire que l'image de f dans $\varphi_* \mathcal{O}_T$ est nulle; ainsi, $\mathcal{I}(F) \subset \text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_T)$, ce qui garantit que φ se factorise par F_{red} .

En d'autres termes, $(F_{\text{red}}, F_{\text{red}} \hookrightarrow X)$ représente le foncteur covariant de la catégorie des schémas *réduits* vers celle des ensembles qui envoie T sur

$$\{\varphi \in \text{Hom}(T, X), \varphi(T) \subset F\}.$$

(5.4.15.3) On peut appliquer ce qui précède lorsque $F = X$. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal des fonctions s'annulant en tout point de X ; ce sont exactement les fonctions dont la restriction à tout ouvert affine est nilpotente – on vérifie aussitôt que cela vaut encore pour leur restriction à tout ouvert quasi-compact, et nous vous laissons construire un exemple d'une telle fonction qui ne serait pas elle-même nilpotente, sur un schéma non quasi-compact.

Le schéma X_{red} est par définition le sous-schéma fermé défini par $\mathcal{I}$; son espace topologique sous-jacent est X tout entier; on dit que c'est le *schéma réduit associé à X* . Si T est un schéma réduit, tout morphisme de T vers X se factorise canoniquement par X_{red} .

(5.4.16) Soit X un schéma et soit F un fermé de X . On prendra garde qu'en général, il n'existe pas de structure de sous-schéma fermé sur F telle que tout morphisme $T \rightarrow X$ se factorisant *ensemblistement* par F se factorise par la structure en question – la propriété universelle de F_{red} décrite au 5.4.15.2 ne concerne que les schémas *réduits*.

En effet, supposons qu'il existe une telle structure, et soit Y le sous-schéma fermé correspondant. Si Z est un autre sous-schéma fermé de X de support F , l'image de $Z \hookrightarrow X$ est contenue dans F et se factorise donc par Y ; autrement dit, Y est nécessairement *le plus grand sous-schéma fermé* de support F . Or l'ensemble des sous-schémas fermés de support F n'a pas, en général, de plus grand élément; ou, si l'on préfère, l'ensemble des faisceaux quasi-cohérents d'idéaux de lieu des zéros F n'a pas forcément de plus petit élément.

(5.4.16.1) Ainsi, soit p un nombre premier. Un faisceau quasi-cohérent d'idéaux sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$ a pour lieu des zéros le singleton $\{x_p\}$ si et seulement si il est de la forme $\mathcal{I}_n := \widetilde{(p^n)}$ pour un certain $n > 0$; la famille $(\mathcal{I}_n)$ étant strictement décroissante, elle n'a pas de plus petit élément.

(5.4.16.2) Il peut toutefois arriver qu'il existe un plus petit idéal quasi-cohérent de lieu des zéros F . Par exemple, supposons que le fermé F soit également ouvert, et soit G l'ouvert fermé complémentaire. Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$ la fonction telle que $f|_G = 1$ et $f|_F = 0$. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal quasi-cohérent égal à l'image de la flèche $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X, a \mapsto af$. Nous laissons le lecteur vérifier que $\mathcal{I}$ est le plus petit idéal quasi-cohérent de lieu des zéros égal à F , et que la structure de sous-schéma fermé qu'il définit sur F est sa structure d'ouvert, par laquelle se factorise tout morphisme dont l'image ensembliste est contenue dans F .

(5.4.17) Soit X un schéma et soit F un fermé de X . Intuitivement les différentes structures de sous-schéma fermé de support F codent les différentes manières d'envisager F «avec multiplicités» (la structure F_{red} correspondant au cas sans multiplicités); ou, si l'on préfère, les différentes manières d'épaissir F infinitésimalement à l'intérieur de X , la relation $Y \leq Z$ entre deux sous-schémas

fermés de support F pouvant alors s'interpréter comme « Y est moins épais que Z ».

(5.4.18) Exemples. Soit k un corps. Posons $X = \operatorname{Spec} k[S, T]$, et soit F le fermé $V(S)$ de X . Nous allons décrire différentes structures de sous-schéma fermé sur F . Comme X est affine, un faisceau cohérent d'idéaux de X de lieu des zéros F est simplement un idéal I de $k[S, T]$ tel que $V(I) = F$.

(5.4.18.1) La structure réduite. On a $V(S) = F$. L'anneau $k[S, T]/S \simeq k[T]$ est intègre, et *a fortiori* réduit. La structure induite sur F par l'idéal (S) est donc la structure réduite F_{red} .

Remarque. Comme $k[T]$ est principal tout fermé de $F_{\text{red}} \simeq \operatorname{Spec} k[T]$ est de la forme $V(P)$ pour un certain $P \in k[T]$; il en résulte que tout ouvert de F_{red} est de la forme $D(P)$ pour $P \in k[T]$.

Mais un ouvert de F_{red} est simplement un ouvert de F , sans référence à une structure précise de sous-schéma fermé sur F . Par conséquent, tout ouvert de F est de la forme $D(P)$ pour $P \in k[T]$.

(5.4.18.2) Soit I l'idéal (S^2) . On a $V(I) = F$, et I induit donc une structure de schéma F_1 sur F . L'anneau quotient $k[S, T]/S^2$ possède un élément nilpotent d'ordre 2, à savoir $\bar{S}$. La structure correspondante n'est en conséquence pas réduite. Moralement, la droite F a été un peu épaissie pour devenir une «droite double», et ce de façon relativement uniforme : si P est un élément de $k[T]$ on a en effet

$$\mathcal{O}_{F_1}(D(P)) = k[S, T]_{(P)}/S^2 = k[T]_{(P)}[S]/S^2 = \mathcal{O}_{F_{\text{red}}}(D(P))[S]/S^2.$$

On voit notamment que la restriction de $\bar{S}$ à tout ouvert non vide de F_1 est encore nilpotente d'ordre 2.

(5.4.18.3) Composantes immergées. Il peut exister des façons plus subtiles d'épaissir F . Par exemple, soit J l'idéal (S^2, ST) . On a $V(J) = F$, et J induit donc une structure de schéma F_2 sur F . Le quotient $k[S, T]/(S^2, ST)$ n'est pas réduit : la fonction $\bar{S}$ est nilpotente d'ordre 2. Le schéma F_2 est en conséquence un épaississement de F , mais moins «uniforme» que F_1 . On a en effet

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{F_2}(D(T)) &= k[S, T]_{(T)}/(S^2, ST) \\ &= \underbrace{k[T]_{(T)}[S]/(S^2, ST)}_{\text{car } T \text{ est inversible dans } k[T]_{(T)}} = k[T]_{(T)}[S]/S = k[T]_{(T)} = \mathcal{O}_{F_{\text{red}}}(D(T)). \end{aligned}$$

L'ouvert dense $D(T)$ de F_2 est ainsi *réduit* : l'épaississement disparaît dès qu'on retire l'origine, c'est donc elle qui en un sens porte toute la multiplicité de la situation. On dit que l'origine est une *composante immergée* du schéma F_2 .

Remarque. Notez bien que la restriction de la fonction nilpotente non nulle $\bar{S}$ à l'ouvert réduit $D(T)$ de F_2 est nulle : contrairement à ce qu'on pourrait croire naïvement, une fonction sur un schéma peut s'annuler en restriction à un ouvert dense sans être nulle.

(5.4.18.4) Soit J' l'idéal (S^3, S^2T) . On a $V(J') = F$, et J' induit donc une structure de schéma F_3 sur F . La fonction $\bar{S}$ est alors nilpotente d'ordre 3 sur F_3 . Par ailleurs

$$\mathcal{O}_{F_3}(D(T)) = k[S, T]_{(T)}/(S^3, S^2T)$$

$$= \underbrace{k[T]_{(T)}[S]/(S^3, S^2T)}_{\text{car } T \text{ est inversible dans } k[T]_{(T)}} = k[T]_{(T)}[S]/S^2 = \mathcal{O}_{F_1}(D(T)).$$

Ainsi, la restriction de $\bar{S}$ à l'ouvert $D(T)$ de F_3 est désormais nilpotente *d'ordre 2 seulement* (et il en ira de même de sa restriction à n'importe quel ouvert non vide de $D(T)$, d'après 5.4.18.2). Cet exemple combine donc les phénomènes décrits en 5.4.18.2 et 5.4.18.3 : on peut y penser comme à un épaississement global du fermé F , de multiplicité «générique» égale à 2, possédant un surcroît de multiplicité porté par l'origine.

Morphismes finis

(5.4.19) Lemme. *Soit X un schéma et soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *pour tout ouvert affine U de X , le $\mathcal{O}_X(U)$ -module $\mathcal{F}(U)$ est de type fini ;*
- ii) *il existe un recouvrement (U_i) de X par des ouverts affines tels que le $\mathcal{O}_X(U_i)$ -module $\mathcal{F}(U_i)$ soit de type fini pour tout i .*

Démonstration. Il est évident que i) $\Rightarrow$ ii). Supposons que ii) soit vraie, et soit U un ouvert affine de X ; posons $A = \mathcal{O}_X(U)$. Soit $x \in U$; il existe i tel que $x \in U_i$, et il existe donc $f \in A$ tel que $f(x) \neq 0$ et tel que l'ouvert $D(f)$ de U soit contenu dans U_i . On a alors $\mathcal{F}(D(f)) = \mathcal{O}_X(D(f)) \otimes_{\mathcal{O}_X(U_i)} \mathcal{F}(U_i)$ (puisque $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent), et $\mathcal{F}(D(f))$ est donc un A_f -module de type fini, qui est égal à $\mathcal{F}(U)_f$, là encore par quasi-cohérence de $\mathcal{F}$.

Par quasi-compacité de U il existe $f_1, \dots, f_r \in A$ telles que $U = \bigcup D(f_i)$ ou, si l'on préfère, telles que $(f_1, \dots, f_n) = A$, et telles que $\mathcal{F}(U)_{f_i}$ soit un A_{f_i} -module de type fini pour tout i . Le lemme 2.7.3.1 assure alors que $\mathcal{F}(U)$ est un A -module de type fini. $\square$

(5.4.20) Définition. Un morphisme de schéma $\varphi: Y \rightarrow X$ est dit *fini* s'il est affine et si le $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent $\varphi_* \mathcal{O}_Y$ satisfait les conditions équivalentes du lemme 5.4.19. On dira également si c'est le cas que Y est un X -schéma fini.

(5.4.21) Le lemme 5.4.19 (combiné à la proposition 5.4.5) assure que pour tout morphisme de schémas $\varphi: Y \rightarrow X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) φ est fini ;
- ii) pour tout ouvert affine U de X , le schéma $\varphi^{-1}(U)$ est affine et $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$ est une $\mathcal{O}_X(U)$ -algèbre finie ;
- iii) il existe un recouvrement (U_i) de X par des ouverts affines tels que pour tout i , le schéma $\varphi^{-1}(U_i)$ soit affine et $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U_i))$ soit une $\mathcal{O}_X(U_i)$ -algèbre finie.

(5.4.22) Exemples et premières propriétés.

(5.4.22.1) Si A est un anneau et I un idéal de A , la A -algèbre A/I est finie ; il s'ensuit que toute immersion fermée est un morphisme fini.

(5.4.22.2) Soit K un corps de nombres et soit $\mathfrak{O}_K$ l'anneau des entiers de K ; comme $\mathfrak{O}_K$ est une $\mathbb{Z}$ -algèbre finie (en tant que $\mathbb{Z}$ -module, il est libre de rang égal à $[K : \mathbb{Q}]$), le morphisme $\text{Spec } \mathfrak{O}_K \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ est fini.

(5.4.22.3) Soit X un schéma et soit $P = T^n + \sum_{i \leq n-1} a_i T^i$ un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathcal{O}_X(X)$. Le faisceau

$$\mathcal{O}_X[T]/P := U \mapsto \mathcal{O}_X(U)[T] / \left(T^n + \sum_{i \leq n-1} a_i|_U T^i \right)$$

est une $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente, qui comme $\mathcal{O}_X$ -module satisfait visiblement les conditions équivalentes du lemme 5.4.19. En conséquence, $\text{Spec } \mathcal{O}_X[T]/P$ est un X -schéma fini.

(5.4.22.4) La composée de deux morphismes finis est un morphisme fini : c'est une conséquence immédiate de 5.4.21 et du fait que si A est un anneau, si B est une A -algèbre finie et si C est une B -algèbre finie alors C est une A -algèbre finie.

(5.4.22.5) Soit X un schéma, soit Y un X -schéma fini et soit Z un X -schéma. Le produit fibré $Y \times_X Z$ est alors un Z -schéma fini. En effet, en raisonnant localement et en utilisant une fois encore 5.4.21, cette assertion se ramène au fait connu suivant : si A est un anneau, si B est une A -algèbre finie et si C est une A -algèbre alors $C \otimes_A B$ est une C -algèbre finie.

(5.4.23) Proposition. Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme fini. Il est alors fermé, c'est-à-dire que $\varphi(Z)$ est un fermé de X pour tout fermé Z de Y .

Démonstration. Soit Z un fermé de Y . Munissons-le d'une structure quelconque de sous-schéma fermé. La composée $Z \hookrightarrow Y \rightarrow X$ est alors encore un morphisme fini, et notre proposition revient à montrer que son image est fermée. Quitte à remplacer $Y \rightarrow X$ par ce morphisme, on peut donc supposer que $Z = Y$.

Être un fermé étant une propriété locale, on peut supposer que X est affine. On a donc $X = \text{Spec } A$ pour un certain anneau A , et Y est alors le spectre d'une A -algèbre finie B . Soit I le noyau de $A \rightarrow B$ et soit T le spectre de A/I . Le morphisme $\varphi: Y \rightarrow X$ admet une factorisation canonique $Y \rightarrow T \hookrightarrow X$, correspondant à la factorisation $A \rightarrow A/I \hookrightarrow B$ au niveau des anneaux.

Comme $A/I \hookrightarrow B$ est une injection qui fait de B une A/I -algèbre finie, et *a fortiori* entière, le lemme de *going-up* (lemme 2.8.12, cf. notamment la remarque qui précède sa démonstration) assure que $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A/I$ est surjective, c'est-à-dire que $Y \rightarrow T$ est surjective. Puisque $T \hookrightarrow X$ a pour image le fermé $V(I)$, il vient $\varphi(Y) = V(I)$. $\square$

5.5 Morphismes de type fini

Définition, exemples, premières propriétés

(5.5.1) Proposition. Soit A un anneau et soit X un A -schéma possédant la propriété suivante : il existe un recouvrement ouvert (X_i) de X tel que pour tout i le A -schéma X_i soit égal à $\text{Spec } A_i$ pour une certaine A -algèbre de type fini A_i . Sous ces hypothèses, pour tout ouvert affine U de X la A -algèbre $\mathcal{O}_X(U)$ est de type fini.

Démonstration. Soit U un ouvert affine de X et soit B la A -algèbre $\mathcal{O}_X(U)$.

(5.5.1.1) Soit $x \in U$. Il appartient à X_i pour un certain i . Il existe alors $a \in A_i$ tel que l'ouvert $V := D(a)$ de X_i soit contenu dans $U \cap X_i$ et contienne x . On a $\mathcal{O}_X(V) = (A_i)_a = A_i[T]/(aT - 1)$; en conséquence, $\mathcal{O}_X(V)$ est une A -algèbre de type fini.

Il existe $f \in B$ tel que l'ouvert $D(f)$ de U soit contenu dans V et contienne x . Cet ouvert est *a fortiori* égal à l'ouvert $D(f)$ de V , et son algèbre des fonctions est donc égale à $\mathcal{O}_X(V)_f = \mathcal{O}_X(V)[T]/(fT - 1)$; c'est donc encore une A -algèbre de type fini.

Par quasi-compacité de U on en déduit qu'il existe une famille finie $(f_1, \dots, f_n)$ d'éléments de B tels que $U = \bigcup D(f_i)$ et tel que $\mathcal{O}_X(D(f_i)) = B_{f_i}$ soit pour tout i une A -algèbre de type fini.

(5.5.1.2) Puisque $U = \bigcup D(f_i)$ il existe une famille (b_i) d'éléments de B tels que $\sum b_i f_i = 1$. Par ailleurs, il existe par hypothèse pour tout i une famille finie d'éléments de B_{f_i} engendrant celle-ci comme A -algèbre; on les écrit $\beta_{i1}/f_i^{n_{i1}}, \dots, \beta_{ir_i}/f_i^{n_{ir_i}}$ où les β_{ij} appartiennent à B . Soit C la sous- A -algèbre de B engendrée par les b_i , les f_i et les β_{ij} ; nous allons montrer que $B = C$, ce qui achèvera la démonstration.

Soit $b \in B$. Fixons i . Par choix des β_{ij} , on peut écrire l'élément b/f_i de B_{f_i} comme un polynôme à coefficients dans A en les $\beta_{ij}/f_i^{n_j}$; la condition d'égalité entre fractions entraîne alors qu'il existe N tel que $f_i^N b$ soit un polynôme à coefficients dans A en f_i et les β_{ij} ; en particulier, $f_i^N b$ appartient à C , et cela reste vrai si l'on augmente l'exposant N .

Il existe en conséquence N tel que $f_i^m b \in C$ pour tout i dès que $m \geq N$. On a $b = (\sum_{1 \leq i \leq n} b_i f_i)^{nN} b$. Lorsqu'on développe cette expression, on trouve une somme de termes de la forme $b_1^{e_1} \dots b_n^{e_n} f_1^{e_1} \dots f_n^{e_n} b$ avec $\sum e_i = nN$. Dans un tel terme, il existe nécessairement i_0 tel que $e_{i_0} \geq N$. On a alors

$$b_1^{e_1} \dots b_n^{e_n} f_1^{e_1} \dots f_n^{e_n} b = \left(\prod_{i \neq i_0} b_i^{e_i} f_i^{e_i} \right) \cdot b_{i_0}^{e_{i_0}} \cdot (f_{i_0}^{e_{i_0}} b) \in C,$$

et b appartient donc à C . $\square$

(5.5.2) Remarque. La proposition ci-dessus affirme en particulier que si A est un anneau et si U est un ouvert affine de $\text{Spec } A$ alors $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U)$ est une A -algèbre de type fini. Cela n'avait rien d'évident *a priori*, sauf quand U est de la forme $D(f)$ car alors $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U) = A_f = A[T]/(fT - 1)$.

(5.5.3) Proposition. Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas.

A) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) pour tout ouvert affine U de X , le schéma $\varphi^{-1}(U)$ admet un recouvrement ouvert fini par des spectres de $\mathcal{O}_X(U)$ -algèbres de type fini;
- ii) il existe un recouvrement (U_i) de X par des ouverts affines tels que $\varphi^{-1}(U_i)$ admette pour tout i un recouvrement ouvert fini par des spectres de $\mathcal{O}_X(U_i)$ -algèbres de type fini.

B) Si les assertions ci-dessus sont satisfaites alors pour tout ouvert affine U de X et tout ouvert affine V de $\varphi^{-1}(U)$, la $\mathcal{O}_X(U)$ -algèbre $\mathcal{O}_Y(V)$ est de type fini.

Démonstration. Commençons par montrer A). Il est clair que i) $\Rightarrow$ ii). Supposons que ii) est vraie, et montrons i). Soit U un ouvert affine de X . Par quasi-compacité de U , il existe $(f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que les $D(f_j)$ recouvrent U et tels que pour tout j il existe $i(j)$ vérifiant $D(f_j) \subset U_{i(j)} \cap U$. Il suffit pour conclure de démontrer que pour tout j le schéma $\varphi^{-1}(D(f_j))$ admet un recouvrement ouvert fini par des spectres de $\mathcal{O}_X(U)$ -algèbres de type fini.

Fixons j , et écrivons f au lieu de f_j et i au lieu de $i(j)$. Le schéma $\varphi^{-1}(U_i)$ admet un recouvrement ouvert fini (V_α) où chaque V_α est le spectre d'une $\mathcal{O}_X(U_i)$ -algèbre de type fini A_α .

Le schéma $\varphi^{-1}(D(f)) = \varphi^{-1}(U_i) \times_{U_i} D(f)$ est réunion de ses ouverts

$$V_\alpha \times_{U_i} D(f) = \text{Spec } A_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_X(U_i)} \mathcal{O}_X(D(f)).$$

Pour tout α , la $\mathcal{O}_X(D(f))$ -algèbre $A_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_X(U_i)} \mathcal{O}_X(D(f))$ est de type fini ; comme $\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_X(U)[T]/(fT - 1)$, elle est également de type fini sur $\mathcal{O}_X(U)$, ce qui achève la démonstration de A).

L'assertion B) découle quant à elle immédiatement de la proposition 5.5.1, appliquée au schéma $\varphi^{-1}(U)$. $\square$

(5.5.4) Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $\varphi: Y \rightarrow X$ est de type fini s'il satisfait les conditions équivalentes i) et ii) de la proposition 5.5.3 ci-dessus. On dit parfois aussi que Y est de type fini sur X , ou bien est un X -schéma de type fini.

(5.5.5) Exemples et premières propriétés.

(5.5.5.1) Il résulte immédiatement des définitions qu'un morphisme fini est de type fini ; c'est en particulier le cas des immersions fermées.

(5.5.5.2) Si A est un anneau et B une A -algèbre alors $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est de type fini si et seulement si B est de type fini comme A -algèbre : la condition est en effet suffisante par définition, et nécessaire en vertu de l'assertion B) de la proposition 5.5.3.

(5.5.5.3) Pour tout entier n et tout schéma X , le schéma $\mathbb{A}_X^n$ est de type fini sur X . En effet, la propriété est par définition locale sur X , ce qui permet de se ramener au cas où celui-ci est affine, auquel cas c'est immédiat car $\mathbb{A}_A^n$ est égal à $\text{Spec } A[T_1, \dots, T_n]$ pour tout anneau A .

(5.5.5.4) La composée de deux morphismes de type fini est de type fini : on le déduit immédiatement de leur caractérisation *via* la propriété i) de la proposition 5.5.1.

(5.5.5.5) Soit X un schéma, soit Y un X -schéma de type fini et soit Z un X -schéma. Le Z -schéma $Y \times_X Z$ est alors de type fini. En effet, on peut raisonner localement sur Z , et *a fortiori* sur X ; cela autorise à supposer X et Z affines. Dans ce cas, Y possède un recouvrement ouvert affine fini (V_i) tel que $\mathcal{O}_Y(V_i)$ soit une $\mathcal{O}_X(X)$ -algèbre de type fini pour tout i . Le schéma $Y \times_X Z$ est alors réunion de ses ouverts affines $V_i \times_X Z$; pour tout i , la $\mathcal{O}_Z(Z)$ -algèbre $\mathcal{O}_{Y \times_X Z}(V_i \times_X Z)$ est égale à $\mathcal{O}_Y(V_i) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_Z(Z)$ et est donc de type fini, d'où notre assertion.

Schémas de type fini sur un corps

(5.5.6) Soit k un corps, et soit X un k -schéma de type fini.

(5.5.6.1) Par définition, X est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines de la forme $\text{Spec } A$ où A est une k -algèbre de type fini. Une telle A étant noethérienne, son spectre est noethérien (4.3.18 et sq.). Il s'ensuit aisément que l'espace topologique X est lui-même noethérien.

(5.5.6.2) On déduit de l'assertion B) de la proposition 5.5.3, ou directement de la proposition 5.5.1, que si U est un ouvert affine de X alors $\mathcal{O}_X(U)$ est une k -algèbre de type fini. Insistons sur l'importance que U soit *affine* : il existe des contre-exemples lorsqu'il ne l'est pas, même sur $\mathbb{C}$.

(5.5.6.3) Comme X est noethérien, ses ouverts sont tous quasi-compacts et donc encore de type fini sur k d'après 5.5.6.2.

(5.5.6.4) Soit $x \in X$. Son corps résiduel $\kappa(x)$ est une extension finie de k . Le point x est fermé si et seulement si il l'est dans tout ouvert affine le contenant ; on déduit alors de 4.1.21.2 que x est fermé si et seulement si $\kappa(x)$ est une extension finie de k .

(5.5.6.5) Notons une conséquence importante de ce qui précède : si $x \in X$ et si U est un ouvert de X contenant x alors x est fermé dans X si et seulement si il l'est dans U : les deux propriétés équivalent en effet à la finitude de $\kappa(x)$ sur k , puisque U est lui aussi un k -schéma de type fini.

Cette équivalence vous paraît peut-être anodine, mais il n'en est rien. Par exemple, soit S le spectre de $k[[t]]$. L'anneau $k[[t]]$ a deux idéaux premiers : l'idéal nul et l'idéal maximal (t) . En conséquence S comprend deux points : le point générique η et un unique point fermé s . Le point η est ouvert et dense. Il est évidemment fermé dans l'ouvert $\{\eta\}$, mais n'est pas fermé dans S .

(5.5.6.6) Nous proposons au lecteur de montrer en exercice que tout schéma quasi-compact non vide possède un point fermé. Mais ici, on peut voir directement que si $X \neq \emptyset$ il possède un point fermé : en effet, il existe dans ce cas un ouvert affine non vide U de X , lequel possède un point fermé x , qui est également fermé dans X d'après la remarque du 5.5.6.5 ci-dessus.

(5.5.7) Soit L une extension de k . L'ensemble $\text{Hom}_k(\text{Spec } L, X)$ s'identifie à l'ensemble des couples $(x, \iota: \kappa(x) \hookrightarrow L)$ où $x \in X$ et où ι est un k -plongement (cf. 5.1.12 et sq.). Cet ensemble se note aussi $X(L)$; ses éléments sont aussi appelés les L -points de X .

(5.5.7.1) En particulier, $X(k)$ est l'ensemble des couples $(x, \iota: \kappa(x) \hookrightarrow k)$. Mais si $x \in X$ l'ensemble des k -plongements de $\kappa(x)$ dans k est facile à décrire : c'est $\{\text{Id}_k\}$ si $\kappa(x) = k$ et $\emptyset$ sinon. En conséquence, l'ensemble des k -points de X s'identifie à l'ensemble des points schématiques de X de corps résiduel k .

(5.5.7.2) On prendra garde que si L est une extension stricte de k , le lien entre L -point et point schématique est en général plus subtil : un point fermé donné x peut supporter différents L -points de X . Ainsi, supposons que $k = \mathbb{R}$, que $X = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ et que x est le point $V(T^2 + 1)$ (où T est la fonction coordonnée). Le corps $\kappa(x)$ est alors égal à $\mathbb{R}[T]/T^2 + 1$, et il existe deux $\mathbb{R}$ -morphisms

de $\kappa(x)$ dans $\mathbb{C}$, à savoir $T \mapsto i$ et $T \mapsto (-i)$. Le point x est donc le support de deux $\mathbb{C}$ -points distincts de X .

(5.5.7.3) Si le schéma X est affine, on peut l'écrire sous la forme $\text{Spec } k[T_1, \dots, T_n]/(P_1, \dots, P_r)$ pour une certaine famille (P_j) de polynômes en n variables, et l'on a alors

$$X(L) = \text{Hom}_k(\text{Spec } L, X) = \text{Hom}_k(k[T_1, \dots, T_n]/(P_1, \dots, P_r), L) \\ \simeq \{(x_1, \dots, x_n) \in L^n, P_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \forall j\}$$

(ainsi, notre notation $X(L)$ est compatible dans ce cas avec celle introduite en 4.1.21.3). On voit que $X(L)$ est l'ensemble des L -points de la variété algébrique naïve qui correspond à X , ce qui explique le choix de l'expression « L -point» en dépit des ambiguïtés dues à l'autre sens du mot «point» (cf. 5.5.7.2).

(5.5.7.4) On ne suppose plus X affine. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et soit G le groupe $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Le groupe G agit sur $\bar{k}$, donc sur $\text{Spec } \bar{k}$, et donc par composition sur $\text{Hom}_k(\text{Spec } \bar{k}, X) = X(\bar{k})$. Si U est un ouvert affine de X , l'ensemble $U(\bar{k})$ est simplement le sous-ensemble de $X(\bar{k})$ formé des $\bar{k}$ -points dont le point schématique sous-jacent est situé sur U ; il est dès lors stable sous l'action de G .

On déduit alors de 4.1.21.8 que l'ensemble X_0 des points fermés de X s'identifie naturellement à $X(\bar{k})/G$; on retrouve ainsi l'injection de $X(k)$ dans X_0 mentionnée au 5.5.7.1.

(5.5.8) Supposons pour ce paragraphe que k est algébriquement clos; dans ce cas $X(k)$ s'identifie au sous-ensemble X_0 de X , et on le munit de la topologie induite. Rappelons (4.3.8) que si T est un espace topologique, on note $\mathcal{C}(T)$ l'ensemble des parties de T de la forme $\bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i \cap F_i$ où les U_i sont ouverts et les F_i fermés. Les faits suivants se déduisent des résultats correspondants déjà établis dans le cas affine (4.3.6 et sq., 4.3.17 et sq.).

(5.5.8.1) La flèche $C \mapsto C(k) := C \cap X(k)$ établit une bijection entre $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}(X(k))$; si C et D sont deux éléments de $\mathcal{C}(X)$ alors $C \subset D$ si et seulement si $C(k) \subset D(k)$; si $C \in \mathcal{X}$ alors C est un fermé irréductible si et seulement si $C(k)$ est un fermé irréductible de $X(k)$.

(5.5.8.2) L'application $x \mapsto \overline{\{x\}}(k)$ établit une bijection entre X et l'ensemble des fermés irréductibles de $X(k)$; en conséquence, X s'obtient en rajoutant à $X(k)$ (dont tous les points sont fermés) un point générique par fermé irréductible non singleton. En d'autres termes, X est la sobrification de $X(k)$.

(5.5.9) Dimension de Krull du schéma X . On ne suppose plus que k est algébriquement clos. Nous allons montrer que si $X \neq \emptyset$ sa dimension de Krull est finie.

(5.5.9.1) Comme X est noethérien, il possède une décomposition $X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i$ en composantes irréductibles (lemme 4.3.22). Nous laissons le lecteur vérifier que l'on a alors

$$\dim_{\text{Krull}} X = \sup_i \dim_{\text{Krull}} X_i.$$

Il suffit donc de démontrer que la dimension de Krull de chacune des X_i est finie; on s'est ainsi ramené au cas où X est irréductible.

(5.5.9.2) Comme $X_{\text{red}} \hookrightarrow X$ est une immersion fermée elle est de type fini, et X_{red} est donc un k -schéma de type fini; de plus, $X_{\text{red}} \hookrightarrow X$ induit un homéomorphisme entre les espaces topologiques sous-jacents. On peut donc remplacer X par X_{red} et le supposer réduit.

Le schéma irréductible X possède un unique point générique ξ . Soit U un ouvert affine non vide de X . Il est irréductible; comme X est réduit, $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit, et donc intègre. C'est une k -algèbre de type fini, et la dimension de Krull de U est égale au degré de transcendance de $\text{Frac } \mathcal{O}_X(U)$ sur k (th. 2.10.11).

Le point ξ est l'unique point générique de U , et l'on a

$$\text{Frac}(\mathcal{O}_X(U)) = \mathcal{O}_{U,\xi} = \mathcal{O}_{X,\xi}.$$

Le corps $\text{Frac}(\mathcal{O}_X(U))$ s'identifie donc à $\mathcal{O}_{X,\xi}$ et ne dépend en particulier pas de U . On l'appelle le *corps des fonctions* de X . Soit d son degré de transcendance sur k ; nous allons montrer que la dimension de Krull de X est égale à d . Par ce qui précède, nous avons déjà que d est la dimension de Krull de tout ouvert affine non vide de X .

La dimension de Krull de X est majorée par d . En effet, soit

$$F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n$$

une suite de fermés irréductibles de X . Comme F_0 est irréductible, il est non vide et rencontre donc un ouvert affine U de X ; celui-ci rencontre *a fortiori* chacun des F_i .

Pour tout i , l'intersection $F_i \cap U$ est un ouvert non vide de l'espace irréductible F_i , il est donc irréductible et dense dans F_i ; il vient $F_i = \overline{U \cap F_i}$. On en déduit que les ensembles $U \cap F_i$ sont deux à deux distincts, puisque les F_i le sont. La suite

$$U \cap F_0 \subsetneq U \cap F_1 \subsetneq \dots \subsetneq U \cap F_n$$

est ainsi une chaîne strictement croissante de fermés irréductibles de U ; comme celui-ci est de dimension de Krull égale à d , on a $n \leq d$, et $\dim_{\text{Krull}} X \leq d$.

La dimension de Krull de X est minorée par d . Soit U un ouvert affine non vide de X . Il est de dimension de Krull d ; en conséquence, il existe une chaîne strictement croissante

$$G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \dots \subsetneq G_d$$

de fermés irréductibles de U . Pour tout i , le fermé $\overline{G_i}$ de X est irréductible, et son intersection avec U est égale à G_i . On en déduit que les fermés $\overline{G_i}$ sont deux à deux distincts, puisque les G_i le sont. La suite

$$\overline{G_0} \subsetneq \overline{G_1} \subsetneq \dots \subsetneq \overline{G_d}$$

est ainsi une chaîne strictement croissante de fermés irréductibles de X ; on a donc $\dim_{\text{Krull}} X \geq d$, ce qui termine la preuve.

(5.5.9.3) Remarque. Si U est un ouvert non vide quelconque de X on a l'égalité $\mathcal{O}_{U,\xi} = \mathcal{O}_{X,\xi}$; par ce qui précède, il s'ensuit que $\dim_{\text{Krull}} U = d$: la dimension de Krull de tout ouvert non vide de X coïncide avec celle de X .

Une fois encore, cette remarque n'est pas anodine. Pour le voir, considérons le spectre S de $k[[t]]$ que nous avons décrit au 5.5.6.5; soit s son point fermé et soit η son point générique. Les seuls fermés irréductibles de S sont $\{s\}$ et S , et l'on a évidemment $\{s\} \subsetneq S$; en conséquence, la dimension de Krull de S est 1, mais celle de son ouvert dense $\{\eta\}$ est égale à 0.

5.6 Le foncteur des points d'un schéma, ou la revanche du point de vue ensembliste

(5.6.1) Nous avons jusqu'à maintenant considéré les schémas comme des espaces localement annelés. Cette approche offre l'avantage de décalquer, dans une certaine mesure, l'intuition géométrique classique : elle permet de parler d'ouverts et de fermés, d'évaluer les fonctions... Toutefois, elle présente en regard des inconvénients assez lourds : on doit accepter que le corps résiduel varie avec le point considéré, qu'une fonction puisse s'annuler ponctuellement partout sans être pour autant nulle, que l'espace sous-jacent au produit fibré ne soit pas le produit fibré des espaces sous-jacents, etc.

Mais on peut penser à un schéma autrement : comme n'importe quel objet de n'importe quelle catégorie, il est en vertu du lemme de Yoneda entièrement déterminé par le foncteur qu'il représente. Et si tautologique que soit ce constat, nous allons voir sur plusieurs exemples qu'il peut parfois présenter un côté rafraîchissant : il permet en effet dans un certain nombre de cas de revenir en un sens à la définition première de la géométrie algébrique, à savoir l'étude des *ensembles* de solutions d'équations polynomiales, et des *applications* polynomiales entre iceux.

Premiers exemples

(5.6.2) Soit S un schéma ; dans ce qui suit, nous allons travailler dans la catégorie $S\text{-Sch}$ des S -schémas (qui est celle des schémas tout courts lorsque S est égal à $\text{Spec } \mathbb{Z}$). Soit X un S -schéma. Pour tout S -schéma T , nous noterons $X(T)$ l'ensemble $\text{Hom}_S(T, X)$, et nous écrirons souvent par abus $X(A)$ plutôt que $X(\text{Spec } A)$; notons que ces conventions sont compatibles avec la notation $X(L)$ introduite plus haut (5.5.7) En d'autres termes, $T \mapsto X(T)$ est le foncteur contravariant de $S\text{-Sch}$ dans Ens représenté par X . On dit parfois que $X(T)$ est l'ensemble des T -points (ou des A -points si $X = \text{Spec } A$) du T -schéma X .

(5.6.2.1) Le lemme de Yoneda assure que X est entièrement déterminé par $X \mapsto X(T)$, et que se donner un morphisme $Y \rightarrow X$ dans $S\text{-Sch}$ revient à se donner un morphisme entre les foncteurs $T \mapsto Y(T)$ et $T \mapsto X(T)$. Il n'y a donc aucun inconvénient à identifier, si on le juge utile, un schéma X au foncteur $T \mapsto X(T)$, ce qui justifie *a posteriori* la notation $X(T)$.

(5.6.2.2) Soit X un S -schéma. Si T est un S -schéma il est recouvert par des ouverts affines, et $U \mapsto \text{Hom}_S(U, X)$ est un faisceau sur X . Il s'ensuit que le *foncteur* X est entièrement déterminé par sa restriction à la catégorie $S\text{-Aff}$ des S -schémas qui sont affines (dans l'absolu, pas relativement à S).

Pour la même raison, si Y est un X -schéma, tout morphisme entre les foncteurs $Y|_{S\text{-Aff}}$ et $X|_{S\text{-Aff}}$ s'étend d'une unique manière en un morphisme de foncteurs de Y vers X .

Il n'y a donc aucun inconvénient, si l'on préfère travailler avec des schémas affines, à se contenter de voir un S -schéma X comme un foncteur contravariant de $S\text{-Aff}$ dans Ens .

(5.6.2.3) Soient X et S' deux S -schémas, et soit T un S' -schéma, que l'on peut voir comme un S -schéma par composition avec $S' \rightarrow S$. Nous vous laissons vérifier qu'il existe une bijection naturelle

$$X(T) \simeq (X \times_S S')(T)$$

(à gauche, X est vu comme foncteur de S -Sch vers Ens ; à droite, $X \times_S S'$ est vu comme foncteur de S' -Sch vers Ens). Remarquez qu'il s'agit simplement d'une déclinaison de l'énoncé 1.5.7.2, dont nous vous avons déjà proposé la preuve en exercice.

(5.6.3) Un exemple. Soit A un anneau et soit $(P_j)_{j \in J}$ une famille de polynômes appartenant à $A[U_1, \dots, U_n]$. Posons

$$X = \text{Spec } A[U_1, \dots, U_n]/(P_j)_j.$$

Soit T un A -schéma. L'ensemble $X(T)$ est égal à $\text{Hom}_A(T, X)$, c'est-à-dire à $\text{Hom}_A(A[U_1, \dots, U_n]/(P_j)_j, \mathcal{O}_T(T))$. Or cet ensemble est lui-même en bijection naturelle, *via* la flèche $\varphi \mapsto (\varphi(\overline{U}_1), \dots, \varphi(\overline{U}_n))$, avec l'ensemble des n -uplets $(t_1, \dots, t_n)$ de $\mathcal{O}_T(T)^n$ tels que $P_j(t_1, \dots, t_n) = 0$ pour tout j . On dispose donc d'une bijection fonctorielle en T

$$X(T) \simeq \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{O}_T(T)^n \text{ t.q. } P_j(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall j\},$$

qui envoie un morphisme ψ sur $(\psi^*\overline{U}_1, \dots, \psi^*\overline{U}_n)$. Le foncteur X est donc tout simplement le foncteur «ensemble des n -uplets solutions du système d'équations polynomiales $(P_j)_j$ » : c'est le retour annoncé du point de vue naïf ou ensembliste sur la géométrie algébrique.

(5.6.3.1) Un cas particulier. Supposons que $n = 1$ et que la famille des P_j est vide (une variable, pas d'équations). On a alors $X = \mathbb{A}_A^1$, et l'on dispose par ce qui précède pour tout A -schéma T d'une bijection $\text{Hom}_A(T, \mathbb{A}_A^1) \simeq \mathcal{O}_T(T)$, fonctorielle en T , qui envoie un morphisme ψ sur $\psi^*\overline{U}$ (où U est ici la fonction coordonnée sur $\mathbb{A}_A^1$). On a donc une bonne raison supplémentaire de penser à $\mathcal{O}_T(T)$ comme à l'anneau des fonctions sur T : les éléments de $\mathcal{O}_T(T)$ «sont» exactement les A -morphisms de T vers la droite affine.

(5.6.3.2) Revenons au cadre général décrit au 5.6.3, et soit f appartenant à $A[U_1, \dots, U_n]$; nous allons décrire fonctoriellement l'ouvert $X' := D(\bar{f})$ de X . Comme $(A[U_1, \dots, U_n]/(P_j)_j)_{\bar{f}} = A[U_1, \dots, U_n, V]/((P_j)_j, Vf - 1)$, on déduit de ce qui précède que l'on a pour tout A -schéma T une bijection naturelle entre $X'(T)$ et

$$\{(t_1, \dots, t_n, s) \in \mathcal{O}_T(T)^n \text{ t.q. } P_j(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall j \text{ et } f(t_1, \dots, t_n)s = 1\}.$$

La condition $f(t_1, \dots, t_n)s = 1$ peut se récrire « $f(t_1, \dots, t_n)$ est inversible et s est son inverse», d'où une bijection naturelle entre $X'(T)$ et

$$\{(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{O}_T(T)^n \text{ t.q. } P_j(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall j \text{ et } f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{O}_T(T)^\times\}.$$

Attention donc : du point de vue fonctoriel, la condition « $f \neq 0$ » se traduit par « f inversible». Observez d'ailleurs à ce propos que la condition d'être non nulle n'est de toutes façons pas fonctorielle : un morphisme d'anneaux peut avoir un noyau non trivial !

(5.6.3.3) Donnons-nous maintenant une famille $(Q_\ell)_{\ell \in \Lambda}$ de polynômes appartenant à $A[V_1, \dots, V_m]$, et posons

$$Y = \text{Spec } A[V_1, \dots, V_m]/(Q_\ell)_\ell.$$

Le foncteur Y est égal en vertu de ce qui précède à

$$T \mapsto \{(s_1, \dots, s_m) \in \mathcal{O}_T(T)^m \text{ t.q. } Q_\ell(s_1, \dots, s_m) = 0 \ \forall \ell\}.$$

Soit $\psi: Y \rightarrow X$ un morphisme de A -schémas; nous allons décrire le morphisme correspondants entre les foncteurs Y et X . Le morphisme ψ est un élément de $X(Y)$, et correspond dès lors par ce qui précède à un n -uplet $(g_1, \dots, g_n)$ d'éléments de $A[V_1, \dots, V_m]/(Q_\ell)_\ell$ tels que $P_j(g_1, \dots, g_n) = 0$. Pour tout i , choisissons un polynôme $G_i \in A[V_1, \dots, V_m]$ relevant g_i .

En reprenant l'ensemble des constructions, on voit aisément que le morphisme induit par ψ entre les foncteurs Y et X est donné par la formule

$$(s_1, \dots, s_m) \mapsto (G_1(s_1, \dots, s_m), \dots, G_n(s_1, \dots, s_m)).$$

Notez que tout est consistant : cette application ne dépend bien que des g_i et pas du choix des G_i (parce que le m -uplet $(s_1, \dots, s_m)$ appartient à $Y(T)$), et le n -uplet de droite appartient bien à $X(T)$ (parce que chaque P_j s'annule en $(g_1, \dots, g_n)$).

Ainsi, lorsqu'on considère un morphisme entre les A -schémas Y et X comme un morphisme entre les foncteurs correspondants, on obtient une *application polynomiale* : là encore, on retombe sur la géométrie algébrique naïve ou ensembliste.

Traduction schématique d'énoncés naïfs

(5.6.4) Bien que le but de la théorie des schémas soit de simplifier la vie des géomètres algébristes, on peut avoir à première vue l'impression qu'elle la complique singulièrement. Pour se convaincre qu'il n'en est rien, il est important de bien comprendre que les énoncés « naïfs » se transposent aisément, et le plus souvent de façon automatique, dans ce nouveau contexte. Nous allons illustrer ce propos par un exemple.

(5.6.5) Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2. Nous allons partir d'un énoncé de géométrie algébrique classique sur le corps k , qui traduit le fait qu'on peut paramétrer le « cercle » sur k en faisant tourner une droite non verticale de pente t autour de $(-1, 0)$ et en considérant son deuxième point d'intersection avec le cercle : les *applications polynomiales*

$$t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \text{ et } (x, y) \mapsto \frac{y}{x+1}$$

établissent un isomorphisme algébrique entre

$$\{t \in k, 1+t^2 \neq 0\} \text{ et } \{(x, y) \in k^2, x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x+1 \neq 0\}.$$

Nous allons donner deux traductions de ce fait dans le langage des schémas, la première en termes d'espaces annelés et la seconde en termes de foncteurs des points, restreints aux schémas affines pour simplifier (5.6.2.2).

(5.6.5.1) *La première traduction.* Posons

$$A = (k[x, y]/(x^2 + y^2 - 1))_{x+1} \text{ et } B = \text{Spec } k[t]_{t^2+1}.$$

On dispose de deux morphismes de k -algèbres

$$A \rightarrow B, \quad x \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}, y \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$$

et

$$B \rightarrow A, \quad t \mapsto \frac{y}{x+1}$$

qui sont des bijections réciproques l'une de l'autre, et qui induisent donc deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre $\text{Spec } B$ et $\text{Spec } A$.

(5.6.5.2) *La seconde traduction.* Les foncteurs

$$Y: R \mapsto \{t \in R, 1+t^2 \in R^\times\}$$

$$\text{et } X: R \mapsto \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 = 1, (x+1) \in R^\times\}$$

de $k\text{-Alg}$ dans Ens sont représentables par des k -schémas (affines), et les formules

$$t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \text{ et } (x, y) \mapsto \frac{y}{x+1}$$

définissent deux isomorphismes de foncteurs réciproques l'un de l'autre entre Y et X .

On remarque que cette traduction fonctorielle est plus élémentaire que la précédente, dans la mesure où elle est un décalque presque direct des énoncés naïfs (pensez toutefois à remplacer partout « $\neq 0$ » par «inversible»), sans la contorsion psychologique consistant à passer par les morphismes d'algèbres en changeant le sens des flèches.

Schémas en groupes

(5.6.6) La notion d'objet en groupes dans une catégorie. Un groupe est un ensemble G muni d'une application de $G \times G$ vers G qui est associative, possède un élément neutre (nécessairement unique), et pour laquelle tout élément admet un symétrique.

(5.6.6.1) *Un petit jeu un peu loufoque.* Nous allons traduire ce qui précède en termes purement catégoriques, en nous interdisant de faire référence aux éléments. Un groupe est donc un ensemble G muni des données supplémentaires suivantes.

- Un morphisme (d'ensembles!) $\mu: G \times G \rightarrow G$ tel que les flèches composées

$$G \times G \times G \xrightarrow{(\mu \circ \text{pr}_{12}, \text{pr}_3)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

et

$$G \times G \times G \xrightarrow{(\text{pr}_1, \mu \circ \text{pr}_{23})} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

coïncident.

• Un morphisme $e: \mathfrak{f} \rightarrow G$, où $\mathfrak{f}$ est l'objet final de $\mathbf{Ens}$ (c'est-à-dire «le» singleton) tel que les applications composées

$$G \xrightarrow{(e \circ \pi, \text{Id}_G)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

et

$$G \xrightarrow{(\text{Id}_G, e \circ \pi)} G \times G \xrightarrow{\mu} G,$$

où π est l'unique morphisme de G vers $\mathfrak{f}$, soient toutes deux égales à Id_G .

• Un morphisme $i: G \rightarrow G$ tel que les applications composées

$$G \xrightarrow{(i, \text{Id}_G)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

et

$$G \xrightarrow{(\text{Id}_G, i)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

soient toutes deux égales à $e \circ \pi$.

(5.6.6.2) *Première définition d'un objet en groupes.* Soit maintenant $\mathbf{C}$ une catégorie. On suppose que $\mathbf{C}$ a un objet final et que le produit cartésien de deux objets existe toujours dans $\mathbf{C}$ (on peut de manière équivalente requérir que les produits cartésiens de familles finies d'objets de $\mathbf{C}$ existent dans $\mathbf{C}$, l'objet final étant alors le produit vide). Soit $\mathfrak{f}$ l'objet final de $\mathbf{C}$. Un *objet en groupes* dans la catégorie $\mathbf{C}$ est un objet G de $\mathbf{C}$ muni d'un morphisme $\mu: G \times G \rightarrow G$, d'un morphisme $e: \mathfrak{f} \rightarrow G$, et d'un morphisme $i: G \rightarrow G$ tels que les axiomes catégoriques du 5.6.6.1 soient satisfaits *verbatim*.

(5.6.6.3) *Seconde définition d'un objet en groupes.* Il résulte immédiatement du lemme de Yoneda qu'un objet en groupes de $\mathbf{C}$ est la donnée d'un objet G de $\mathbf{C}$ et, pour tout objet T de $\mathbf{C}$, d'une structure de groupe fonctorielle en T sur $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(T, G)$; ou, si l'on préfère, d'un objet G de $\mathbf{C}$ et d'une factorisation de $T \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T, G)$ *via* le foncteur d'oubli de $\mathbf{Gp}$ dans $\mathbf{Ens}$.

(5.6.6.4) *Exercice.* Montrez qu'un groupe en groupes est un groupe abélien.

(5.6.7) Soit S un schéma. Il y a d'après ce qui précède deux manières de se donner une structure de S -schémas en groupes sur un S -schéma G : on peut ou bien se donner pour tout S -schéma T une structure de groupe fonctorielle en T sur $G(T)$, ou bien se donner trois morphismes de S -schémas

$$\mu: G \times G \rightarrow G, \quad e: S \rightarrow G \quad \text{et} \quad i: G \rightarrow G$$

satisfaisant les axiomes requis. En général, la première méthode est nettement plus simple ; nous allons l'illustrer dans un instant par un exemple.

Avant cela, faisons une remarque. Supposons que S et G soient affines, disons $S = \text{Spec } A$ et $G = \text{Spec } B$. Se donner un triplet (μ, e, i) comme ci-dessus revient alors à se donner un triplet de morphismes de A -algèbres

$$\lambda: B \rightarrow B \otimes_A B, \quad \varepsilon: A \rightarrow B \quad \text{et} \quad j: B \rightarrow B$$

satisfaisant les axiomes «duaux» de ceux imposés à (μ, e, i) , que nous vous laissons expliciter ; on dit qu'un tel triplet $(\lambda, \varepsilon, j)$ fait de B une A -algèbre de Hopf.

(5.6.8) Exemple de schéma en groupes : le groupe multiplicatif sur $\mathbb{Z}$. Soit $\mathbb{G}_m$ le $\mathbb{Z}$ -schéma $\text{Spec } \mathbb{Z}[U, U^{-1}]$. Nous allons le munir d'une structure de $\mathbb{Z}$ -schéma en groupes, que nous allons définir de deux façons différentes.

(5.6.8.1) Définition fonctorielle. Soit T un schéma (ou un $\mathbb{Z}$ -schéma, c'est la même chose). On déduit de 5.6.3.2 que $\psi \mapsto \psi^*U$ établit une bijection fonctorielle en T entre $\mathbb{G}_m(T)$ et $\mathcal{O}_T(T)^\times$. On voit donc immédiatement que $\mathbb{G}_m(T)$ hérite d'une structure de groupe fonctorielle en T , qui fait de $\mathbb{G}_m$ un $\mathbb{Z}$ -schéma en groupes appelé pour des raisons évidentes le *groupe multiplicatif* (sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$).

(5.6.8.2) Définition par une structure d'algèbre de Hopf. Soit λ le morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[U, U^{-1}]^{-1}$ dans $\mathbb{Z}[V, V^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[W, W^{-1}] = \mathbb{Z}[V, W, V^{-1}, W^{-1}]$ qui envoie U sur VW ; soit ε le morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[U, U^{-1}]$ vers $\mathbb{Z}$ qui envoie U sur 1, et soit j le morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[U, U^{-1}]$ dans lui-même qui échange U et U^{-1} .

Nous vous laissons vérifier que $(\lambda, \varepsilon, j)$ satisfait les axiomes des algèbres de Hopf, et que la structure de schéma en groupes que ce triplet induit dès lors sur $\mathbb{G}_m$ est la même que celle définie *supra*.

(5.6.8.3) Vous observez donc sur cet exemple le phénomène que nous avons annoncé : la définition d'une structure de schémas en groupes *via* le foncteur des points est en général la plus naturelle.

Chapitre 6

Schémas projectifs

6.1 Le schéma $\text{Proj } B$

Un peu d'algèbre graduée

(6.1.1) Définition. Un *anneau gradué* est un anneau B muni d'une décomposition en somme directe de groupes abéliens $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ telle que $1 \in B_0$ et telle que $B_n \cdot B_m \subset B_{n+m}$ pour tout (m, n) . On dit que B est gradué *en degrés positifs* si $B_n = \{0\}$ pour tout $n < 0$ (ce sera le plus souvent le cas ici).

(6.1.1.1) Tout anneau (usuel) A peut être vu comme un anneau gradué en posant $A_0 = A$ et $A_n = 0$ si $n \neq 0$.

(6.1.1.2) Soit $B = \bigoplus B_n$ un anneau gradué. Nous dirons que le sommande B_n est l'ensemble des *éléments homogènes de degré n* de B (notez que le degré d'un élément homogène non nul est uniquement déterminé, et que 0 est homogène de tout degré).

Il résulte immédiatement des définitions que B_0 est un sous-anneau de B , et que chaque B_n est un sous- B_0 -module de B .

(6.1.1.3) Si A est un anneau (usuel), une *A -algèbre graduée* est un anneau gradué B muni d'un morphisme de A dans B_0 .

(6.1.1.4) Exemple. Si A est un anneau et $n \in \mathbb{N}$ alors $A[T_0, \dots, T_n]$ a une structure naturelle de A -algèbre graduée en degrés positifs : pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble de ses éléments homogènes de degré d est le A -module engendré par les $\prod T_i^{e_i}$ avec $\sum e_i = d$.

(6.1.1.5) Soit $B = \bigoplus B_n$ un anneau gradué. Si I est un idéal de B , on vérifie immédiatement que les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $I = \bigoplus (I \cap B_n)$;
- ii) l'idéal I possède une famille génératrice constituée d'éléments homogènes ;
- iii) pour tout $b \in B$, on a $b \in I$ si et seulement si c'est le cas de chacune de ses composantes homogènes.

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que I est *homogène*. La décomposition

$$B/I = \bigoplus B_n / (I \cap B_n)$$

fait alors de B/I un anneau gradué ; si B est gradué en degrés positifs, il en va de même de I .

(6.1.1.6) Soit B un anneau gradué et soit I un idéal homogène de B . Nous vous invitons à vérifier que I est premier si et seulement si $I \neq B$ et

$$(ab \in I) \Rightarrow a \in I \text{ ou } b \in I$$

pour tout couple (a, b) d'éléments *homogènes* de B .

(6.1.1.7) Soit $B = \bigoplus B_n$ un anneau gradué et soit S une partie multiplicative de B constituée d'éléments homogènes. L'anneau $S^{-1}B$ hérite alors d'une graduation naturelle, pour laquelle $(S^{-1}B)_n$ est l'ensemble des éléments pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{s}$ avec $a \in B_{m+n}$ et $s \in S \cap B_m$ pour un certain m . Notez que même si B est gradué en degrés positifs ce n'est pas forcément le cas de $S^{-1}B$; ainsi, si $0 \notin S$ et si s est un élément de S de degré $m > 0$ alors $\frac{1}{s}$ est un élément non nul et homogène de degré $(-m)$ de $S^{-1}B$.

(6.1.1.8) Soit A un anneau, soit B une A -algèbre graduée et soit C une A -algèbre. La décomposition $B = \bigoplus B_n$ induit une décomposition

$$C \otimes_A B = \bigoplus (C \otimes_A B_n)$$

qui fait de $C \otimes_A B$ une C -algèbre graduée.

(6.1.2) Soient B et C deux anneaux gradués et soit d un entier. Un morphisme $\varphi: B \rightarrow C$ est dit *homogène de degré d* si $\varphi(B_n) \subset C_{nd}$ pour tout n . Si B a une structure d'algèbre graduée sur un certain anneau A , un tel morphisme fait de C une A -algèbre graduée.

Remarquons que le degré d'un morphisme homogène n'est pas bien défini en général : par exemple si $B = B_0$ alors tout morphisme d'anneaux $\varphi: B \rightarrow C$ tel que $\varphi(B) \subset C_0$ est homogène de degré d pour tout d .

(6.1.2.1) La composée d'un morphisme homogène de degré d et d'un morphisme homogène de degré d' est un morphisme homogène de degré dd' .

(6.1.2.2) Un *isomorphisme d'anneaux gradués* φ de B vers C est un isomorphisme d'anneaux tel que $\varphi(B_n) = C_n$ pour tout n ; un tel φ est homogène de degré 1, et sa réciproque est aussi un isomorphisme d'anneaux gradués.

(6.1.3) Exemples de morphismes homogènes.

(6.1.3.1) Soit A un anneau, et soient d, n et m trois entiers. Soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille de polynômes homogènes de degré d appartenant à $A[T_0, \dots, T_m]$. L'unique morphisme de A -algèbres de $A[S_0, \dots, S_n]$ dans $A[T_0, \dots, T_m]$ qui envoie S_i sur P_i pour tout i est homogène de degré d .

(6.1.3.2) Soit B un anneau gradué et soit I un idéal homogène de B . Le morphisme quotient $B \rightarrow B/I$ est homogène de degré 1.

(6.1.3.3) Soit B un anneau gradué et soit S une partie multiplicative de B constituée d'éléments homogènes. La flèche naturelle $B \rightarrow S^{-1}B$ est homogène de degré 1.

(6.1.3.4) Soit A un anneau, soit B une A -algèbre graduée et soit C une A -algèbre. Le morphisme naturel de A -algèbres $B \rightarrow C \otimes_A B$ est alors homogène de degré 1.

La notion de spectre homogène

Notre but est d'associer à un anneau gradué en degrés positifs B un schéma $\text{Proj } B$, par une construction analogue à celle du spectre mais un peu plus compliquée. Pour des raisons techniques nous aurons besoin d'une construction auxiliaire, le *spectre homogène* d'un anneau gradué (sans hypothèse de positivité sur les degrés).

(6.1.4) Définition. Soit B un anneau gradué. On appelle *spectre homogène* de B , et l'on note $\text{Sph } B$, le sous-ensemble de $\text{Spec } B$ constitué des idéaux premiers *homogènes*; on le considère comme muni de la topologie induite par celle de $\text{Spec } B$.

(6.1.5) Soit B un anneau gradué.

(6.1.5.1) Soit f un élément de B ; pour tout i , soit f_i la composante homogène de degré i de f . Soit $x \in \text{Sph } B$. Par définition d'un idéal premier homogène, on a $f(x) = 0$ si et seulement si $f_i(x) = 0$ pour tout i .

(6.1.5.2) Les deux faits suivants en résultent immédiatement de 6.1.5.1 :

- les parties de $\text{Sph } B$ de la forme $D(f) \cap \text{Sph } B$, où f est un élément homogène de B , forment une base de la topologie de $\text{Sph } B$;
- tout fermé de $\text{Sph } B$ est de la forme $V(E) \cap \text{Sph } B$ où E est un ensemble d'éléments homogènes de B ; remarquons que si I désigne l'idéal (homogène) engendré par E alors $V(E) \cap \text{Sph } B = V(I) \cap \text{Sph } B$.

Si l'on se donne f , E ou I comme ci-dessus et s'il est clair que nous sommes en train de travailler dans $\text{Sph } B$, nous écrirons simplement $D(f)$, $V(E)$ ou $V(I)$ plutôt que $D(f) \cap \text{Sph } B$, $V(E) \cap \text{Sph } B$ ou $V(I) \cap \text{Sph } B$.

(6.1.6) Un faisceau d'anneaux sur le spectre homogène. Soit B un anneau gradué.

(6.1.6.1) Pour tout ouvert U de $\text{Sph } B$, soit $S^{\text{hom}}(U)$ la partie multiplicative de B constituée des éléments homogènes g tels que $U \subset D(g)$. On munit l'espace topologique $\text{Sph } B$ du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\text{Sph } B}$ associé au préfaisceau $\mathcal{O}_{\text{Sph } B}^{\text{pref}} := U \mapsto U \mapsto (S^{\text{hom}}(U)^{-1}B)_0$.

(6.1.6.2) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier homogène de B et soit Σ l'ensemble des éléments homogènes de B n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$; c'est une partie multiplicative de B . Par définition, Σ est la réunion des $S^{\text{hom}}(U)$ où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de $\mathfrak{p}$ dans $\text{Sph } B$. Il s'ensuit (à l'aide de 2.5.7.4) que $\mathcal{O}_{\text{Sph } B, \mathfrak{p}}^{\text{pref}}$ s'identifie à $(\Sigma^{-1}B)_0$. L'anneau $\mathcal{O}_{\text{Sph } B, \mathfrak{p}}$ s'identifie donc lui aussi à $(\Sigma^{-1}B)_0$, qui est un anneau local dont l'idéal maximal est l'ensemble des éléments de la forme a/s où $a \in \mathfrak{p}_n$ et $s \in \Sigma_n$. Par conséquent, $\text{Sph } B$ est un espace localement annelé.

(6.1.6.3) Remarque. Si f est un élément homogène de B , on prendra garde que f ne peut pas en général s'interpréter comme une section globale de $\mathcal{O}_{\text{Sph } B}$, sauf si elle appartient à B_0 ; cela n'empêche pas les notations $D(f)$ et $V(f)$ de désigner respectivement un ouvert et un fermé de $\text{Sph } B$ et les formules usuelles comme $D(fg) = D(f) \cap D(g)$ d'être satisfaites (lorsqu'on emploie ces notations, on repense subrepticement à $\text{Sph } B$ comme à une partie de $\text{Spec } B$).

(6.1.7) Soit d un entier *non nul* et soit $\varphi: B \rightarrow C$ un morphisme homogène de degré d entre anneaux gradués. Pour tout idéal premier homogène $\mathfrak{q}$ de C , l'idéal premier $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ de B est homogène. En effet, soit b un élément de B dont on note b_n la composante homogène de degré n pour tout n . On a $b = \sum b_n$ et $\varphi(b) = \sum \varphi(b_n)$. Par hypothèse sur φ , l'élément $\varphi(b_n)$ de C est pour tout entier n homogène de degré dn . Comme d est non nul, les entiers dn sont (pour n variable) deux à deux distincts, si bien que les $\varphi(b_n)$ sont les composantes homogènes de $\varphi(b)$. Puisque l'idéal $\mathfrak{q}$ est homogène, il en résulte que $\varphi(b)$ appartient à $\mathfrak{q}$ si et seulement si $\varphi(b_n)$ appartient à $\mathfrak{q}$ pour tout n . Autrement dit, b appartient à $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ si et seulement si b_n appartient à $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, et l'idéal premier $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ est par conséquent homogène.

L'application continue $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B$ définie par φ induit dès lors par restriction une application continue $\psi: \text{Sph } C \rightarrow \text{Sph } B$.

Soit U un ouvert de $\text{Sph } B$ et soit g un élément homogène de B tel que U soit contenu dans $D(g)$. On a alors l'inclusion $\psi^{-1}(U) \subset D(\varphi(g))$; autrement dit, le morphisme φ envoie $S^{\text{hom}}(U)$ dans $S^{\text{hom}}(\psi^{-1}(U))$, et induit en conséquence un morphisme de $S^{\text{hom}}(U)^{-1}B$ vers $S^{\text{hom}}(\psi^{-1}(U))^{-1}C$, puis par restriction une flèche de $(S^{\text{hom}}(U)^{-1}B)_0$ vers $(S^{\text{hom}}(\psi^{-1}(U))^{-1}C)_0$, c'est-à-dire de $\mathcal{O}_{\text{Sph } B}^{\text{pref}}(U)$ vers $\mathcal{O}_{\text{Sph } C}^{\text{pref}}(\psi^{-1}(U))$. On vérifie immédiatement que cette construction est fonctorielle en U , c'est-à-dire qu'elle définit un morphisme de préfaisceaux $\mathcal{O}_{\text{Sph } B}^{\text{pref}} \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_{\text{Sph } C}^{\text{pref}}$; en le composant avec la flèche naturelle $\psi_* \mathcal{O}_{\text{Sph } C}^{\text{pref}} \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_{\text{Sph } C}$ et en utilisant la propriété universelle du faisceautisé, on en déduit un morphisme $\mathcal{O}_{\text{Sph } B} \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_{\text{Sph } C}$; autrement dit, l'application continue ψ est sous-jacente à un morphisme d'espaces annelés de $(\text{Sph } C, \mathcal{O}_{\text{Sph } C})$ vers $(\text{Sph } B, \mathcal{O}_{\text{Sph } B})$, que l'on note encore ψ .

Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier homogène de C et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier homogène $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Soit S (resp. T) l'ensemble des éléments homogènes de B (resp. C) n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{q}$). Il résulte de la construction de ψ que le morphisme $\mathcal{O}_{\text{Sph } B, \mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Sph } B, \mathfrak{q}}$ induit par ψ au niveau des fibres est simplement la flèche naturelle de $(S^{-1}B)_0$ vers $(T^{-1}C)_0$, qui est locale. Par conséquent, ψ est un morphisme d'espaces *localement* annelés.

(6.1.8) Soit Grad la catégorie dont les objets sont les anneaux gradués et les flèches les morphismes homogènes de degré non nul. En utilisant 6.1.6 et 6.1.7 on fait de Sph un foncteur contravariant de Grad vers EspLocAnn .

En voyant un anneau (commutatif unitaire) comme trivialement gradué, on fait de Ann une sous-catégorie pleine de Grad . Il découle immédiatement de nos constructions que la restriction de Sph à Ann coïncide avec Spec .

Les faits suivants résultent facilement de nos constructions (ils se démontrent comme leurs analogues schématiques).

(6.1.8.1) Soit B un anneau gradué et soit f un élément homogène de B . Le morphisme d'espaces annelés $\text{Sph } B_f \rightarrow \text{Sph } B$ induit par le morphisme $B \rightarrow B_f$ (qui est homogène de degré 1) est une immersion ouverte identifiant $\text{Sph } B_f$ à $D(f)$.

(6.1.8.2) Soit B un anneau gradué et soit I un idéal homogène de B . Le morphisme $B \rightarrow B/I$ (qui est homogène de degré 1) induit une application continue d'espaces annelés $\text{Sph } B/I \rightarrow \text{Sph } B$ qui identifie *topologiquement* $\text{Sph } B/I$ au fermé $V(I)$ de $\text{Sph } B$.

(6.1.9) Lemme. Soit B un anneau gradué possédant un élément f inversible homogène de degré non nul. Soit Σ une partie multiplicative de B constituée d'éléments homogènes et contenant $f^{\mathbb{Z}}$, et soit Σ_0 la partie multiplicative $\Sigma \cap B_0$ de B_0 . L'inclusion de B_0 dans B induit un isomorphisme

$$\Sigma_0^{-1}B_0 \simeq (\Sigma^{-1}B)_0.$$

Démonstration. Remarquons pour commencer que quitte à remplacer f par f^{-1} , on peut supposer que f appartient à B_r pour un certain $r > 0$. Il est immédiat que la flèche $B_0 \rightarrow (\Sigma^{-1}B)_0$ envoie chaque élément de Σ_0 sur un inversible du but ; elle induit donc un morphisme $\Sigma_0^{-1}B_0 \rightarrow (\Sigma^{-1}B)_0$.

Le morphisme $\Sigma_0^{-1}B_0 \rightarrow (\Sigma^{-1}B)_0$ est injectif. Soient b un élément de B_0 et σ un élément de Σ_0 tels que b/σ soit nul en tant qu'élément de $(\Sigma^{-1}B)_0$. Dans ce cas, $b/1$ est encore nul dans $(\Sigma^{-1}B)_0 \subset \Sigma^{-1}B$, ce qui veut dire qu'il existe $\tau \in \Sigma$ tel que $\tau b = 0$ dans B . Puisque Σ est constitué d'éléments homogènes, τ appartient à B_n pour un certain n . Puisque $f^{\mathbb{Z}} \subset \Sigma$ le produit $\pi := \tau^r f^{-n}$ appartient à Σ_0 , et $\pi b = 0$ dans $B_0 \subset B$ (on utilise ici le fait que $r \geq 1$). Par conséquent, $b/1$ est nul en tant qu'élément de $\Sigma_0^{-1}B_0$, et b/σ est donc également nul dans $\Sigma_0^{-1}B_0$, d'où l'injectivité.

Le morphisme $\Sigma_0^{-1}B_0 \rightarrow (\Sigma^{-1}B)_0$ est surjectif. Soit $n \in \mathbb{Z}$, soit b un élément de B_n et soit σ un élément de Σ homogène de degré n . Dans l'anneau $\Sigma^{-1}B$, on peut écrire :

$$\frac{b}{\sigma} = \frac{b\sigma^{r-1}f^{-n}}{\sigma^r f^{-n}} = \frac{\beta}{\tau}$$

où $\beta = b\sigma^{r-1}f^{-n}$ et $\tau = \sigma^r f^{-n}$ (notons que σ^{r-1} est bien défini car $r \geq 1$). Par conséquent, b/σ est l'image de l'élément β/τ de $\Sigma_0^{-1}B_0$, d'où la surjectivité. $\square$

(6.1.10) Proposition. Soit B un anneau gradué possédant un élément inversible homogène de degré non nul. Le morphisme naturel $\text{Sph } B \rightarrow \text{Spec } B_0$ induit par l'inclusion $B_0 \hookrightarrow B$ est un isomorphisme d'espaces localement annelés ; en particulier, $\text{Sph } B$ est un schéma affine.

Démonstration. Par hypothèse, B possède un élément inversible f qui est homogène de degré non nul. Quitte à remplacer f par f^{-1} , on peut supposer que f appartient à B_r pour un certain $r > 0$. On note π le morphisme étudié de $\text{Sph } B$ vers $\text{Spec } B_0$.

(6.1.10.1) L'application π est injective. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier homogène de B ; pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons $\mathfrak{p}_n$ l'intersection $\mathfrak{p} \cap B_n$. Pour établir l'injectivité de l'application étudiée, il suffit de vérifier que $\mathfrak{p}$ peut être reconstitué à partir de $\mathfrak{p}_0$, c'est-à-dire encore que chacun des $\mathfrak{p}_n$ peut être reconstitué à partir de $\mathfrak{p}_0$. Fixons n et soit $b \in \mathfrak{p}_n$. Comme $r > 0$, l'élément b de B_n appartient à $\mathfrak{p}$ si et seulement si b^r appartient à $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire encore si et seulement si $b^r f^{-n}$ appartient à $\mathfrak{p}$ (puisque f est inversible). En remarquant que $b^r f^{-n} \in B_0$, on voit finalement que

$$\mathfrak{p}_n = \{b \in B_n, b^r f^{-n} \in \mathfrak{p}_0\}.$$

On peut donc bien reconstituer $\mathfrak{p}_n$ à partir de $\mathfrak{p}_0$.

(6.1.10.2) L'application π est surjective. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B_0 ; nous allons construire un idéal premier homogène $\mathfrak{p}$ de B tel que $\mathfrak{p} \cap B_0$ coïncide

avec $\mathfrak{q}$. Pour ce faire, on s'inspire de la formule exhibée lors de la preuve de l'injectivité au 6.1.10.1 ci-dessus. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose donc

$$\mathfrak{p}_n = \{b \in B_n, b^r f^{-n} \in \mathfrak{q}\}.$$

Notons que comme $r > 0$ et comme $\mathfrak{q}$ est premier, on a $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}$. Il suffit dès lors de prouver que $\mathfrak{p} := \sum \mathfrak{p}_n$ est un idéal premier homogène de B ; il suffit même de s'assurer simplement que c'est un idéal premier de B , car l'homogénéité sera alors tautologique par la définition même de $\mathfrak{p}$.

Fixons $n \in \mathbb{Z}$. Il est clair que $0 \in \mathfrak{p}_n$. Soient maintenant b et c deux éléments de $\mathfrak{p}_n$. Par définition de ce dernier $b^r f^{-n}$ et $c^r f^{-n}$ appartiennent tous deux à $\mathfrak{q}$. On en déduit (en développant le binôme et en utilisant le fait que $\mathfrak{q}$ est un idéal de B_0) que $(b-c)^{2r} f^{-2n}$ appartient à $\mathfrak{q}$; puisque celui-ci est premier, $(b-c)^r f^{-n}$ appartient à $\mathfrak{q}$, et $b-c$ appartient de ce fait à $\mathfrak{p}_n$. En conséquence, $\mathfrak{p}_n$ est un sous-groupe de B , et $\mathfrak{p}$ est dès lors lui-même un sous-groupe de B .

Soient n et m deux éléments de $\mathbb{Z}$, soit $b \in \mathfrak{p}_n$ et soit $c \in B_m$. Par définition de $\mathfrak{p}_n$, le produit $b^r f^{-n}$ appartient à $\mathfrak{q}$. Puisque ce dernier est un idéal de B_0 , le produit $c^r b^m f^{-n} f^{-m}$ appartient encore à $\mathfrak{q}$, si bien que cb appartient à $\mathfrak{p}_{n+m}$. En conséquence $\mathfrak{p}$ est stable par multiplication externe, et c'est donc bien un idéal de B .

Vérifions enfin que $\mathfrak{p}$ est premier. Puisque $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}$, l'idéal $\mathfrak{p}$ ne contient pas 1 et il est dès lors strict. Soient n et m deux éléments de $\mathbb{Z}$ et soit $(b, c) \in B_n \times B_m$ tel que $bc \in \mathfrak{p}_{n+m}$. Par définition, cela signifie que $(bc)^r f^{-n-m} = b^r f^{-n} c^r f^{-m}$ appartient à $\mathfrak{q}$. Puisque $\mathfrak{q}$ est premier, $b^r f^{-n} \in \mathfrak{q}$ ou $c^r f^{-m} \in \mathfrak{q}$. Autrement dit, $b \in \mathfrak{p}_n$ ou $c \in \mathfrak{p}_m$, ce qui entraîne que $\mathfrak{p}$ est premier (6.1.1.6).

(6.1.10.3) *L'application π est un homéomorphisme.* Comme elle est continue et bijective, il suffit de s'assurer qu'elle est ouverte. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et soit g un élément de B_n . Soit x un point de $\text{Sph } B$ et soit y son image sur $\text{Spec } B_0$. On a $x \in D(g)$ si et seulement si $g(x) \neq 0$, ce qui revient à demander (puisque f est inversible) que $h := g^r f^{-n}$ ne s'annule pas en x , soit encore que h ne s'annule pas en y (remarquons que $h \in B_0$). Par conséquent, l'image de l'ouvert $D(g)$ de $\text{Sph } B$ sur $\text{Spec } B_0$ est égale à $D(h)$, et l'application étudiée est bien ouverte.

(6.1.10.4) *Le morphisme $\mathcal{O}_{\text{Spec } B_0} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\text{Sph } B}$ est un isomorphisme.* Ce morphisme est par définition induit par une flèche $\mathcal{O}_{\text{Spec } B_0}^{\text{pref}} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\text{Sph } B}^{\text{pref}}$. Or puisque π est un homéomorphisme, $\pi_* \mathcal{O}_{\text{Sph } B}$ s'identifie au faisceau-torsionné de $\pi_* \mathcal{O}_{\text{Sph } B}^{\text{pref}}$; il suffit dès lors de s'assurer que $\mathcal{O}_{\text{Spec } B_0}^{\text{pref}} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\text{Sph } B}^{\text{pref}}$ est un isomorphisme.

Pour tout ouvert V de $\text{Spec } B_0$ nous noterons $S(V)$ la partie multiplicative de B_0 constituée des éléments g tels que $V \subset D(g)$.

Soit V un ouvert de $\text{Spec } B_0$. Si $g \in B_0$ et si $x \in \text{Sph } B$ on a par définition même de π l'équivalence $g(x) \neq 0 \iff g(\pi(x)) \neq 0$ (dans le membre de gauche g est vu comme appartenant à B ; dans le membre de droite, il est vu comme appartenant à B_0). En appliquant ceci lorsque x parcourt $\pi^{-1}(V)$, il vient $S(V) = S^{\text{hom}}(\pi^{-1}(V))_0$. Il résulte alors du lemme 6.1.9 que $(S^{\text{hom}}(\pi^{-1}(V))^{-1}B)_0$ s'identifie canoniquement à $S(V)^{-1}B_0$ (notons que $f^{\mathbb{Z}} \subset S^{\text{hom}}(\pi^{-1}(V))$ par définition). Autrement dit, le morphisme $\mathcal{O}_{\text{Spec } B_0}^{\text{pref}}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } B}^{\text{pref}}(\pi^{-1}(V))$ est bijectif, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Définition de $\text{Proj } B$

Nous allons maintenant pouvoir définir le schéma $\text{Proj } B$ attaché à un anneau B gradué en degrés positifs.

(6.1.11) Soit B un anneau gradué en degrés positifs. On désigne par B_+ l'idéal homogène $\bigoplus_{n>0} B_n$ de B , par B^{hom} l'ensemble des éléments homogènes de B , et par B_+^{hom} l'ensemble des éléments homogènes de B_+ ; en d'autres termes,

$$B^{\text{hom}} = \bigcup_{n \geq 0} B_n \text{ et } B_+^{\text{hom}} = \bigcup_{n > 0} B_n.$$

Si $f \in B^{\text{hom}}$, nous emploierons toujours la notation $D(f)$ pour désigner l'ouvert correspondant du spectre *homogène* de B .

On note $\text{Proj } B$ l'ouvert complémentaire dans $\text{Sph } B$ du fermé $V(B_+)$ (en termes d'idéaux premiers, $\text{Proj } B$ est donc l'ensemble des idéaux premiers homogènes de B ne contenant pas B_+). Si (f_i) désigne une famille d'éléments de B_+^{hom} engendrant B_+ , on peut également décrire $\text{Proj } B$ comme la réunion des ouverts $D(f_i)$ de $\text{Sph } B$; en particulier, $\text{Proj } B$ est la réunion des ouverts $D(f)$ de $\text{Proj } B$ pour f parcourant B_+^{hom} .

On munit $\text{Proj } B$ de la structure d'espace localement annelé héritée de celle de $\text{Sph } B$; on note $\mathcal{O}_{\text{Proj } B}$ son faisceau structural. En vertu de 6.1.6.2, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier homogène de B ne contenant pas B_+^{hom} et si Σ désigne l'ensemble des éléments homogènes de B n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$ alors $\mathcal{O}_{\text{Proj } B, \mathfrak{p}}$ est l'anneau local $(\Sigma^{-1}B)_0$.

Si f (resp. E , resp. I) est un élément homogène de B (resp. un ensemble d'éléments homogènes de B , resp. un idéal homogène de B), nous nous permettrons si le contexte est clair d'écrire $D(f)$ (resp. $V(E)$, resp. $V(I)$) plutôt que $D(f) \cap \text{Proj } B$ (resp. $V(E) \cap \text{Proj } B$, resp. $V(I) \cap \text{Proj } B$). Ces notations ne doivent pas laisser penser que les éléments homogènes de B sont des fonctions sur le schéma $\text{Proj } B$ (ce n'est le cas que pour les éléments de B_0): la remarque 6.1.6.3 sur l'espace localement annelé $\text{Sph } B$ vaut encore pour son ouvert $\text{Proj } B$.

(6.1.12) Théorème. *On conserve les notations de 6.1.11 et sq.*

i) *Pour tout $f \in B_+^{\text{hom}}$ l'espace localement annelé $(D(f), \mathcal{O}_{\text{Proj } B}|_{D(f)})$ est canoniquement isomorphe à $\text{Spec } (B_f)_0$.*

ii) *L'espace localement annelé $(\text{Proj } B, \mathcal{O}_{\text{Proj } B})$ est un schéma.*

Démonstration. Puisque $\text{Proj } B = \bigcup_{f \in B_+^{\text{hom}}} D(f)$, l'assertion ii) est une conséquence immédiate de i), et du fait qu'être un schéma est, pour un espace annelé donné, une propriété locale.

Il suffit donc de démontrer i). Le morphisme canonique $B \rightarrow B_f$ induit d'après 6.1.8.1 un isomorphisme d'espaces annelés $D(f) \simeq \text{Sph } B_f$. Puisque B_f contient un élément inversible homogène de degré non nul (à savoir $f/1$), on en déduit en vertu de la proposition 6.1.10 que $(D(f), \mathcal{O}_{\text{Proj } B}|_{D(f)})$ est naturellement isomorphe à $\text{Spec } (B_f)_0$ comme espace localement annelé. $\square$

(6.1.13) Premières propriétés de $\text{Proj } B$.

(6.1.13.1) Le schéma $\text{Proj } B$ étant la réunion des $D(f)$ pour f parcourant B_+^{hom} , il est vide si et seulement si $D(f) = \emptyset$ pour tout tel f . En vertu du théorème 6.1.12, cela revient à demander que $(B_f)_0$ soit nul pour

tout $f \in B_+^{\text{hom}}$. Or comme $B(f)_0$ est un sous-anneau de B_f , on a $1 = 0$ dans $(B_f)_0$ si et seulement si c'est le cas dans B_f ; en d'autres termes, $(B_f)_0$ est nul si et seulement si $(B_f)_0$ est nul.

Ainsi, $\text{Proj } B$ est vide si et seulement si B_f est nul pour tout $f \in B_+^{\text{hom}}$, c'est-à-dire encore si et seulement si tout élément de B_+^{hom} est nilpotent.

Notons le cas particulier important suivant : B est trivialement gradué, c'est-à-dire si $B_n = \{0\}$ pour tout $n > 0$, alors $\text{Proj } B = \emptyset$.

(6.1.13.2) Supposons que B soit réduit. Dans ce cas, B_f est réduit pour tout f appartenant à B , et en particulier pour tout $f \in B_+^{\text{hom}}$. Pour un tel f , le sous-anneau $(B_f)_0$ de B_f est alors lui aussi réduit, et le schéma $D(f) = \text{Spec } (B_f)_0$ est donc réduit. Comme $\text{Proj } B$ est la réunion des $D(f)$ pour f parcourant B_+^{hom} , il est réduit.

(6.1.13.3) Supposons que B soit intègre et que $B_+^{\text{hom}} \neq \{0\}$. L'idéal homogène $\{0\}$ de B est alors premier et ne contient pas B_+^{hom} ; c'est donc un point de $\text{Proj } B$, dont l'adhérence dans $\text{Proj } B$ est égale à $V(0)$, c'est-à-dire à $\text{Proj } B$ tout entier. En conséquence, $\text{Proj } B$ est irréductible.

(6.1.13.4) Supposons que B soit une algèbre graduée sur un certain anneau A . Le préfaisceau $\mathcal{O}_{\text{Sph } B}^{\text{pref}}$ est alors de manière naturelle un préfaisceau de A -algèbres, et il en va de même de son faisceau associé, et *a fortiori* de la restriction $\mathcal{O}_{\text{Proj } B}$ de ce dernier à $\text{Proj } B$. Le schéma $\text{Proj } B$ hérite ainsi par ce biais d'une structure naturelle de A -schéma.

Fonctorialité partielle de la construction

(6.1.14) Soient B et C deux anneaux gradués, soit d un entier strictement positif et soit $\varphi: B \rightarrow C$ un morphisme d'anneaux homogène de degré d . Les choses ne se passent pas aussi bien que pour les spectres d'anneaux puisque φ n'induit pas en général un morphisme de $\text{Proj } C$ *tout entier* vers $\text{Proj } B$: comme nous allons le voir, il peut être nécessaire de se restreindre à un ouvert.

(6.1.14.1) Le morphisme φ induit un morphisme d'espaces localement annelés

$$\psi: \text{Sph } C \rightarrow \text{Sph } B.$$

Posons $\Omega = \psi^{-1}(\text{Proj } B)$; c'est un ouvert de $\text{Sph } C$. Puisque $\text{Proj } B$ est égal à la réunion des $D(f)$ pour f parcourant B_+^{hom} , l'ouvert Ω est égal à la réunion des $\psi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ pour f parcourant B_+^{hom} ; comme $\varphi(B_+^{\text{hom}}) \subset C_+^{\text{hom}}$, il s'ensuit que Ω est contenu dans $\text{Proj } C$. Le morphisme ψ induit par restriction un morphisme de schémas de Ω vers $\text{Proj } B$, que l'on note encore ψ .

(6.1.14.2) Si $f \in B_+^{\text{hom}}$ alors $\psi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ et l'on dispose d'un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccccc} D(\varphi(f)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Sph } C_{\varphi(f)} & \xrightarrow{\sim} & \text{Spec } (C_{\varphi(f)})_0 \\ \psi|_{D(\varphi(f))} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D(f) & \xrightarrow{\sim} & \text{Sph } B_f & \xrightarrow{\sim} & \text{Spec } (B_f)_0 \end{array}$$

dans la catégorie des schémas.

Il en résulte en particulier, puisque les $D(f)$ avec $f \in B_+^{\text{hom}}$ recouvrent $\text{Proj } B$, que le morphisme ψ est affine.

(6.1.14.3) Nous dirons que ψ est le morphisme $\text{Proj } C \dashrightarrow \text{Proj } B$ induit par φ . Les pointillés sont là pour rappeler que ψ n'est défini que sur l'ouvert Ω de $\text{Proj } C$, que l'on appellera l'*ouvert de définition* de ψ . Par définition, cet ouvert est la réunion des $D(\varphi(f))$ pour $f \in B_+^{\text{hom}}$; on vérifie immédiatement qu'on peut se contenter de faire parcourir à f une partie de B_+^{hom} engendrant l'idéal B_+ .

Il peut arriver que l'ouvert de définition de ψ soit égal à $\text{Proj } C$ tout entier, et nous étudierons en 6.1.17 *et sq.* ainsi qu'en 6.1.21 deux situations importantes dans lesquelles c'est le cas. Mais il y a de nombreux exemples où c'est un ouvert strict de $\text{Proj } C$, qui peut même être vide sans que $\text{Proj } C$ le soit, comme le montre l'exemple détaillé au 6.1.16 ci-dessous.

(6.1.15) Nous laissons le lecteur vérifier les faits suivants, qui découlent directement de nos constructions.

(6.1.15.1) Soient B, C et D trois anneaux gradués, soit $\varphi: C \rightarrow B$ un morphisme homogène d'un certain degré d , et soit $\varphi': C \rightarrow D$ un morphisme homogène d'un certain degré d' . Soient

$$\psi: \text{Proj } C \dashrightarrow \text{Proj } B, \quad \psi': \text{Proj } D \dashrightarrow \text{Proj } C, \quad \text{et } \psi'': \text{Proj } D \dashrightarrow \text{Proj } B$$

les morphismes respectivement induits par φ, φ' et $\varphi' \circ \varphi$ et soient Ω, Ω' et Ω'' leurs ouverts de définition respectifs. On a alors

$$\Omega'' = (\psi')^{-1}(\Omega) \quad \text{et} \quad \psi'' = \psi \circ \psi'.$$

(6.1.15.2) Soit B un anneau gradué. Le morphisme $\text{Proj } B \dashrightarrow \text{Proj } B$ induit par Id_B est défini sur $\text{Proj } B$ tout entier et égal à $\text{Id}_{\text{Proj } B}$.

(6.1.15.3) Soit $\varphi: B \rightarrow C$ un isomorphisme d'anneaux gradués. Le morphisme $\text{Proj } C \dashrightarrow \text{Proj } B$ induit par φ est défini sur $\text{Proj } B$ tout entier et est un isomorphisme, dont la réciproque est le morphisme induit par φ^{-1} .

(6.1.16) Soit A un anneau. Puisque T engendre $A[T]_+^{\text{hom}}$, le A -schéma $\text{Proj } A[T]$ s'identifie à son ouvert $D(T)$, c'est-à-dire d'après le théorème 6.1.12 au spectre de $(A[T]_{(T)})_0 = A[T, T^{-1}]_0 = A$. Autrement dit, $\text{Proj } A[T] \rightarrow \text{Spec } A$ est un isomorphisme (en particulier, $\text{Proj } A[T]$ est non vide dès que A est non nul).

Soit φ le morphisme de A -algèbres de $A[T]$ dans lui-même qui envoie T sur 0. Il est homogène de degré 1 (et d'ailleurs de n'importe quel autre degré). Il induit donc un morphisme $\psi: \text{Proj } A[T] \dashrightarrow \text{Proj } A[T]$. L'idéal $A[T]_+$ étant engendré par T , l'ouvert de définition de ψ est égal à $D(\varphi(T)) = D(0)$ et est dès lors vide.

(6.1.17) Soit B un anneau gradué et soit I un idéal homogène de B .

(6.1.17.1) Le morphisme quotient $B \rightarrow B/I$ induit un morphisme d'espaces localement annelés $\psi: \text{Sph } B/I \rightarrow \text{Sph } B$ qui identifie topologiquement $\text{Sph } B/I$ au fermé $V(I)$ de $\text{Sph } B$.

L'ouvert $\text{Proj } B$ de $\text{Sph } B$ est la réunion des $D(f)$ pour f parcourant B_+^{hom} ; par conséquent, l'intersection $\text{Proj } B \cap \text{Sph } B/I$ est la réunion des ouverts $D(f) \cap \text{Sph } B/I = D(\bar{f})$ de $\text{Sph } B/I$ pour f parcourant B_+^{hom} ; or l'ensemble des $\bar{f}$ pour f parcourant B_+^{hom} est précisément $(B/I)_+^{\text{hom}}$, par définition de la graduation de B/I ; par conséquent, $\text{Proj } B \cap \text{Sph } B/I = \text{Proj } B/I$.

Autrement dit, l'image réciproque de $\text{Proj } B$ sur $\text{Sph } B/I$, c'est-à-dire l'ouvert de définition du morphisme $\text{Proj } B/I \dashrightarrow \text{Proj } B$, est égale à $\text{Proj } B/I$ tout entier; et $\text{Proj } B/I \rightarrow \text{Proj } B$ identifie topologiquement $\text{Proj } B/I$ au fermé $V(I)$ de $\text{Proj } B$.

(6.1.17.2) Soit $n > 0$ et soit $f \in B_n$. L'image réciproque de $D(f) = \text{Spec } (B_f)_0$ sur $\text{Proj } B/I$ est l'ouvert $D(\bar{f}) = \text{Spec } ((B/I)_{\bar{f}})_0$. Il est immédiat que IB_f est un idéal homogène de B_f , et que l'isomorphisme canonique $(B/I)_{\bar{f}} \simeq (B_f)/(IB_f)$ est homogène de degré 1. Par conséquent,

$$D(\bar{f}) = \text{Spec } ((B_f)/(IB_f))_0 = \text{Spec } (B_f)_0 / (IB_f \cap (B_f)_0).$$

La flèche $D(\bar{f}) \rightarrow D(f)$ induite par ψ est donc l'immersion fermée associée à l'idéal $IB_f \cap (B_f)_0$ de $(B_f)_0$, idéal qui est simplement l'ensemble des éléments de la forme $\frac{a}{f^r}$ avec $r \in \mathbb{N}$ et $a \in I \cap B_{rn}$.

(6.1.17.3) Comme être une immersion fermée est une propriété locale sur le but, on déduit de ce qui précède que le morphisme $\psi: \text{Proj } B/I \rightarrow \text{Proj } B$ est une immersion fermée.

(6.1.18) Soit B un anneau gradué. Si I est un idéal homogène de B , on prendra garde que contrairement à ce qui se passe dans le cas des schémas, l'idéal I n'est pas uniquement déterminé par l'immersion fermée $\text{Proj } B/I \hookrightarrow \text{Proj } B$. Nous allons donner deux contre-exemples.

(6.1.18.1) Supposons que B est non nul et trivialement gradué. Dans ce cas l'idéal B_+^{hom} est nul, si bien que $\text{Proj } B = \text{Proj } B/(0) = \emptyset = \text{Proj } B/(1)$, alors que les idéaux (0) et (1) de B diffèrent par hypothèse.

(6.1.18.2) Supposons que $B = A[T_0, T_1]$ pour un certain anneau non nul A ; posons $I = (T_0)$ et $J = (T_0^2, T_0T_1)$. Les idéaux I et J sont homogènes et J est strictement contenu dans I puisque A est non nul; on a plus précisément

$$I = \bigoplus_{n \geq 1} I \cap B_n = A \cdot T_0 \oplus \bigoplus_{n \geq 2} I \cap B_n \text{ et } J = \bigoplus_{n \geq 2} I \cap B_n.$$

Mais on vérifie immédiatement sur les deux cartes affines $D(T_0)$ et $D(T_1)$ de $\text{Proj } B$ que les sous-schémas fermés $\text{Proj } B/I$ et $\text{Proj } B/J$ de $\text{Proj } B$ coïncident.

(6.1.18.3) On prendra garde par ailleurs qu'il n'y a aucune raison qu'une immersion fermée générale de but $\text{Proj } B$ soit de la forme $\text{Proj } B/I \hookrightarrow \text{Proj } B$. La proposition ci-dessous assure toutefois que c'est le cas dès que $\text{Proj } B$ est quasi-compact.

(6.1.19) Proposition. *Soit B un anneau gradué en degrés positifs. Supposons que le schéma $\text{Proj } B$ est quasi-compact. Toute immersion fermée de but $\text{Proj } B$ est de la forme $\text{Proj } B/I \hookrightarrow \text{Proj } B$ pour un certain idéal homogène I de B .*

(6.1.19.1) *Commentaires sur les hypothèses de la proposition.* Puisque $\text{Proj } B$ est réunion de ses ouverts affines $D(b)$ pour b parcourant B_+^{hom} , il est quasi-compact si et seulement si il existe une famille finie $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de B_+^{hom} telle que $\text{Proj } B = \bigcup D(b_\lambda)$.

Notons que cette dernière égalité signifie que le fermé de $\text{Spec } B$ défini par l'idéal (b_λ) coïncide *ensemblément* avec celui défini par l'idéal B_+ engendré par B_+^{hom} . Autrement dit, cela revient à demander que $\sqrt{(b_\lambda)} = \sqrt{B_+}$ ou encore, compte-tenu du fait que $(b_\lambda) \subset B_+$, que tout élément de B_+ (ou simplement de B_+^{hom}) soit nilpotent modulo (b_λ) . C'est par exemple le cas dès que les b_λ engendrent B_+ .

(6.1.19.2) *Démonstration de la proposition 6.1.19.* Soit φ une immersion fermée de but $\text{Proj } B$. Choisissons une famille finie $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de B_+^{hom} tels que $\text{Proj } B = \bigcup D(b_\lambda)$. Quitte à remplacer chaque b_λ par l'une de ses puissances positives convenablement choisie, on peut supposer (puisque Λ est fini) qu'il existe $N > 0$ tel que tous les b_λ appartiennent à B_N .

Pour tout λ , le morphisme $\varphi^{-1}(D(b_\lambda)) \rightarrow D(b_\lambda)$ est une immersion fermée, associée à un idéal I_λ de l'anneau $(B_{b_\lambda})_0$.

Si l'on se donne deux indices λ et μ , les idéaux de $(B_{b_\lambda b_\mu})_0$ engendrés par (les images de) I_λ et I_μ coïncident : ils sont tous deux égaux à l'idéal définissant l'immersion fermée $\varphi^{-1}(D(b_\lambda b_\mu)) \rightarrow D(b_\lambda b_\mu)$. Remarquons par ailleurs que $(B_{b_\lambda b_\mu})_0$ peut aussi se décrire comme $((B_{b_\lambda})_0)_{b_\mu/b_\lambda}$, par exemple parce que $D(b_\lambda b_\mu)$ est l'ouvert $D(b_\mu/b_\lambda)$ du schéma affine $D(b_\lambda)$ (on peut également s'en convaincre par des calculs de fractions explicites).

Comme $\text{Proj } B = \bigcup D(b_\lambda)$, il suffit de montrer l'existence d'un idéal homogène I de B tel que pour tout λ , l'idéal I_λ soit l'ensemble des éléments de la forme $\frac{f}{b_\lambda^d}$ où $d \in \mathbb{N}$ et où f est un élément de I homogène de degré Nd .

Inspiré par cette condition, *définissons* I comme l'idéal homogène de B engendré par les $f \in B_{Nd}$ (pour $d > 0$ variable) tels que $\frac{f}{b_\lambda^d} \in I_\lambda$ pour tout λ . Nous allons montrer que I répond au problème posé.

Compte-tenu de la définition de même de I , il suffit de prouver l'assertion qui suit : *pour tout λ et tout élément α de I_λ , il existe un entier d et un élément f de I , homogène de degré Nd , tel que $\alpha = \frac{f}{b_\lambda^d}$.*

Fixons donc un indice λ et donnons-nous $\alpha \in I_\lambda$. On peut écrire α sous la forme $\frac{g}{b_\lambda^\delta}$ pour un certain entier δ et un certain $g \in B_{N\delta}$.

Soit μ un indice (ce qui suit est trivial si $\mu = \lambda$, mais nous n'avons pas de raison d'exclure ce cas). L'image de α dans $(B_{b_\lambda b_\mu})_0$ appartient par définition à l'idéal engendré par I_λ , qui coïncide avec celui engendré par I_μ ; en conséquence, cette image est de la forme $\beta_\mu \frac{b_\mu^r}{b_\lambda^s}$ pour un certain entier r et un certain $\beta_\mu \in I_\mu$. On peut toujours si besoin est agrandir r : en effet, on a pour tout $s \geq 0$ l'égalité

$$\beta_\mu \frac{b_\mu^r}{b_\lambda^s} = \left(\beta_\mu \frac{b_\lambda^s}{b_\mu^s} \right) \cdot \frac{b_\mu^{r+s}}{b_\lambda^{r+s}},$$

dans $(B_{b_\lambda b_\mu})_0$, et l'élément $\beta_\mu \frac{b_\lambda^s}{b_\mu^s}$ de $(B_{b_\mu})_0$ appartient évidemment encore à l'idéal I_μ . Il s'ensuit, Λ étant fini, qu'on peut prendre un entier r convenant pour tout $\mu \in \Lambda$.

On a ainsi pour tout μ l'égalité

$$\frac{g}{b_\lambda^\delta} = \beta_\mu \frac{b_\mu^r}{b_\lambda^r}$$

dans l'anneau $(B_{b_\lambda b_\mu})_0 = ((B_{b_\mu})_0)_{b_\lambda/b_\mu}$. Il existe dès lors pour tout μ un entier t , qu'on peut là encore supposer indépendant de μ , tel que

$$\frac{g}{b_\lambda^\delta} \cdot \frac{b_\lambda^t}{b_\mu^t} = \beta_\mu \frac{b_\mu^r}{b_\lambda^r} \cdot \frac{b_\lambda^t}{b_\mu^t}$$

dans l'anneau $(B_{b_\mu})_0$. Il vient

$$\frac{gb_\lambda^{r+t}}{b_\mu^{\delta+r+t}} = \beta_\mu \frac{b_\lambda^{\delta+t}}{b_\mu^{\delta+t}}$$

dans $(B_{b_\mu})_0$; remarquons que le terme de droite appartient à I_μ . Comme ceci vaut pour tout μ , l'élément gb_λ^{r+t} de B appartient à I (et à $B_{N(\delta+r+t)}$). Les égalités

$$\alpha = \frac{g}{b_\lambda^\delta} = \frac{gb_\lambda^{r+t}}{b_\lambda^{\delta+r+t}}$$

dans l'anneau $(B_{b_\lambda})_0$ montrent alors que α est de la forme requise. $\square$

(6.1.20) Soit A un anneau et soient B et C deux A -algèbres graduées. Soit d un entier et soit $\varphi: B \rightarrow C$ un morphisme de A -algèbres homogène de degré d . Il induit d'après 6.1.14 et sq. un morphisme $\psi: \text{Proj } C \dashrightarrow \text{Proj } B$. On vérifie sans peine que les morphismes d'anneaux intervenant dans la construction de ψ sont des morphismes de A -algèbres; en conséquence, ψ est un morphisme de A -schémas.

(6.1.21) Soit A un anneau, soit B une A -algèbre graduée, et soit C une A -algèbre. Le schéma $\text{Proj } (C \otimes_A B)$ est un C -schéma d'après 6.1.13.4. On dispose par ailleurs d'un A -morphisme naturel

$$\varphi: B \rightarrow C \otimes_A B$$

qui est homogène de degré 1, et induit donc un A -morphisme $\psi: \text{Proj } C \otimes_A B \dashrightarrow \text{Proj } B$. Son ouvert de définition Ω est la réunion des $D(\varphi(f))$ pour f parcourant B_+^{hom} . Mais comme $\varphi(f)_{f \in B_+^{\text{hom}}}$ engendre $(C \otimes_A B)_+ = C \otimes_A (B_+)$, l'ouvert Ω est en fait égal à $\text{Proj } (C \otimes_A B)$ tout entier.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Proj } (C \otimes_A B) & \dashrightarrow & \text{Spec } C \\ \psi \downarrow & & \downarrow \\ \text{Proj } B & \dashrightarrow & \text{Spec } A \end{array}$$

définit un morphisme $\text{Proj } (C \otimes_A B) \rightarrow \text{Proj } B \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } C$. Nous allons montrer que c'est un isomorphisme; on peut pour ce faire raisonner localement sur $\text{Proj } B$. Soit $f \in B_+^{\text{hom}}$. On a

$$D(f) \simeq \text{Spec } (B_f)_0 \text{ et } \psi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f)) \simeq \text{Spec } ((C \otimes_A B)_{\varphi(f)})_0.$$

On vérifie immédiatement que l'isomorphisme $C \otimes_A B_f \simeq (C \otimes_A B)_{\varphi(f)}$ est homogène de degré 1 ; il vient

$$C \otimes_A ((B_f)_0) = (C \otimes_A B_f)_0 \simeq ((C \otimes_A B)_{\varphi(f)})_0.$$

Par conséquent, $\psi^{-1}(D(f)) \simeq D(f) \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } C$, d'où notre assertion.

6.2 Le schéma $\mathbb{P}_A^n$

(6.2.1) Définition. Soit A un anneau et soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{P}_A^n$ le A -schéma $\text{Proj } A[T_0, \dots, T_n]$.

(6.2.1.1) Si B est une A -algèbre, on dispose d'après 6.1.21 d'un isomorphisme canonique $\mathbb{P}_B^n \simeq \mathbb{P}_A^n \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } B$. En particulier, on a $\mathbb{P}_A^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } A$.

Si $x \in \text{Spec } A$, la fibre de $\mathbb{P}_A^n$ en x s'identifie à $\mathbb{P}_A^n \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \kappa(x)$, c'est-à-dire à $\mathbb{P}_{\kappa(x)}^n$.

(6.2.1.2) Premiers exemples. Si $A = \{0\}$ alors $\mathbb{P}_A^n$ est vide pour tout n . Si $A \neq \{0\}$ l'idéal $A[T_0, \dots, T_n]_+$ de $A[T_0, \dots, T_n]$ n'est pas constitué d'éléments nilpotents (par exemple, les T_i ne sont pas nilpotents), et $\mathbb{P}_A^n$ est donc non vide (6.1.13.1).

Le A -schéma $\mathbb{P}_A^0$ est égal par définition à $\text{Proj } A[T]$. Il résulte alors de 6.1.16 que $\mathbb{P}_A^0 \rightarrow \text{Spec } A$ est un isomorphisme.

(6.2.1.3) On définit plus généralement, pour tout schéma X , le X -schéma $\mathbb{P}_X^n$ comme étant égal à $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} X$; en vertu de 6.2.1.1, cette définition est compatible avec la précédente lorsque X est affine.

(6.2.1.4) Soit k un corps. La notation $\mathbb{P}_k^1$ semble *a priori* désigner deux k -schémas différents :

- celui construit par recollement au 5.2.5 ;
- celui défini au 6.2.1 ci-dessus, à savoir $\text{Proj } k[T_0, T_1]$.

Mais nous verrons un peu plus loin au 6.2.5.3 que ce conflit de notations n'est qu'apparent et que ces deux k -schémas coïncident.

(6.2.2) Remarque. Le foncteur $A \mapsto \text{Spec } A$ admet une variante globale ou relative, à savoir la formation du spectre d'une $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente sur un schéma X . On peut de même définir (mais nous n'en aurons pas besoin) une variante globale ou relative de $B \mapsto \text{Proj } B$, en introduisant la notion de $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente *graduée*, et en associant un X -schéma $\text{Proj } \mathcal{B}$ à une telle $\mathcal{O}_X$ -algèbre $\mathcal{B}$; nous laissons le lecteur intéressé deviner puis écrire en détail la construction de $\text{Proj } \mathcal{B}$.

On peut grâce à cette notion définir directement $\mathbb{P}_X^n$, sans produit fibré : c'est $\text{Proj } \mathcal{O}_X[T_0, \dots, T_n]$.

(6.2.3) Les cartes affines standard de $\mathbb{P}_A^n$. Soit A un anneau et soit n un entier. L'idéal $A[T_0, \dots, T_n]_+$ de $A[T_0, \dots, T_n]$ est engendré par les T_i . En conséquence, $\mathbb{P}_A^n$ est la réunion de ses ouverts $U_i := D(T_i)$.

(6.2.3.1) Si $(e_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une famille d'entiers, nous noterons $A \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{\prod T_i^{e_i}} \right]$ la A -algèbre graduée $A[T_0, \dots, T_n] \prod T_i^{e_i}$. On vérifie immédiatement que le morphisme homogène de degré 1 naturel de $A \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{\prod T_i^{e_i}} \right]$ vers $A \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{\prod T_i} \right] = A[T_0^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$ est injectif; nous nous permettrons donc de considérer implicitement $A \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{\prod T_i^{e_i}} \right]$ comme une sous-algèbre graduée de $A[T_0^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$.

(6.2.3.2) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. En vertu de l'assertion i) du théorème 6.1.12, on dispose d'un A -isomorphisme canonique

$$U_i \simeq \text{Spec } A \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{T_i} \right]_0.$$

On montre aisément que $A \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{T_i} \right]_0$ est simplement l'algèbre de polynômes en n variables $A \left[\frac{T_\ell}{T_i} \right]_{\ell \neq i}$. On a donc

$$U_i \simeq \text{Spec } A \left[\frac{T_\ell}{T_i} \right]_{\ell \neq i} \simeq \mathbb{A}_A^n.$$

(6.2.3.3) Fixons i . Le fermé complémentaire de l'ouvert $D(T_i)$ est par définition $V(T_i)$. Le quotient de $A[T_0, \dots, T_n]$ par son idéal homogène (T_i) est simplement l'anneau gradué $A[T_j]_{j \neq i}$. La flèche quotient $A[T_0, \dots, T_n] \rightarrow A[T_j]_{j \neq i}$ induit en vertu de 6.1.17 et sq. une immersion fermée

$$\text{Proj } A[T_j]_{j \neq i} \hookrightarrow A[T_0, \dots, T_n]$$

d'image $V(T_i)$, qui permet de munir celui-ci d'une structure de sous-schéma fermé. Comme $A[T_j]_{j \neq i}$ est isomorphe à $A[T_0, \dots, T_{n-1}]$ si $n \geq 1$ (par renumérotation), le fermé $V(T_i)$ muni de la structure en question est isomorphe à $\mathbb{P}_A^{n-1}$ dès que $n \geq 1$ (il est en particulier non vide dès que A est non nul). Si $n = 0$ alors T_0 engendre $A[T_0]_+$, et $V(T_0) = \emptyset$.

(6.2.3.4) Le A -schéma $\mathbb{P}_A^n$ est ainsi réunion de $n + 1$ copies de l'espace affine relatif $\mathbb{A}_A^n$; c'est en particulier un A -schéma *de type fini* (et notamment quasi-compact). Soient i et j deux éléments de $\{0, \dots, n\}$. L'intersection $U_i \cap U_j$ est l'ouvert $D(T_i T_j)$ de $\mathbb{P}_A^n$; en utilisant une fois encore le théorème 6.1.12, on voit que

$$U_i \cap U_j \simeq \text{Spec } (A[T_0, \dots, T_n]_{T_i T_j})_0.$$

En tant qu'ouvert de $U_i = \text{Spec } A \left[\frac{T_\ell}{T_i} \right]_{\ell \neq i}$, l'intersection $U_i \cap U_j = U_i \cap D(T_j)$ est égale à

$$D \left(\frac{T_j}{T_i} \right) = \text{Spec } A \left[\frac{T_\ell}{T_i}, \frac{T_i}{T_j} \right]_{\ell \neq i}.$$

De même, en tant qu'ouvert de $U_j = \text{Spec } A \left[\frac{T_\ell}{T_j} \right]_{\ell \neq j}$, l'intersection $U_i \cap U_j$ est égale à

$$D \left(\frac{T_i}{T_j} \right) = \text{Spec } A \left[\frac{T_\ell}{T_j}, \frac{T_j}{T_i} \right]_{\ell \neq j}.$$

Ces deux dernières descriptions de $U_i \cap U_j$ pourraient tout aussi bien se déduire de la première et des égalités

$$(A[T_0, \dots, T_n]_{T_i T_j})_0 = A \left[\frac{T_\ell}{T_i}, \frac{T_i}{T_j} \right]_{\ell \neq i} = A \left[\frac{T_\ell}{T_j}, \frac{T_j}{T_i} \right]_{\ell \neq j}$$

entre sous-anneaux de $A[T_0^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$.

(6.2.4) Les fonctions globales sur $\mathbb{P}_A^n$. Il résulte de 6.2.3 et sq. que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(\mathbb{P}_A^n)$ est le sous-anneau de $A[T_0^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]_0$ constitué des éléments qui appartiennent à $A[T_0, \dots, T_n, T_i^{-1}]$ pour tout i .

Par conséquent, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(\mathbb{P}_A^n) = A$. C'est en effet évident si $n = 0$ car alors $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(\mathbb{P}_A^n) = A[T_0^{\pm 1}]_0$. Et si $n \geq 1$ l'intersection de $A[T_0, \dots, T_n, T_0^{-1}]$ et $A[T_0, \dots, T_n, T_1^{-1}]$ est égale à $A[T_0, \dots, T_n]$, si bien que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(\mathbb{P}_A^n)$ est égal à $A[T_0, \dots, T_n]_0$, d'où notre assertion.

On en déduit que $\mathbb{P}_A^n$ n'est pas affine dès que $A \neq \{0\}$ et $n \geq 1$. En effet, plaçons-nous sous cette hypothèse. Le morphisme structural de $\mathbb{P}_A^n$ vers $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(\mathbb{P}_A^n)$ est égal à $\mathbb{P}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$, et cette flèche n'est pas un isomorphisme. Pour le voir, on choisit $x \in \text{Spec } A$ (ce qui est possible puisque $A \neq \{0\}$) et l'on remarque que la fibre de $\mathbb{P}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$ en x , qui s'identifie à $\mathbb{P}_{\kappa(x)}^n$, n'est pas réduite à un singleton (elle contient par exemple une copie de $\mathbb{A}_{\kappa(x)}^n$, et donc de l'ensemble $\kappa(x)^n$ de ses $\kappa(x)$ -points).

Notons par contre que si $A = \{0\}$ alors $\mathbb{P}_A^n$ est vide (et en particulier affine), et que $\mathbb{P}_A^0 \simeq \text{Spec } A$ est toujours affine.

(6.2.5) Grâce à 6.2.3, on peut donner une deuxième description de $\mathbb{P}_A^n$, par recollement de cartes affines et sans faire appel à la construction «Proj», que nous allons maintenant esquisser.

(6.2.5.1) Pour tout i compris entre 0 et n , on se donne une famille $(\tau_{\ell i})_{0 \leq \ell \leq n, \ell \neq i}$ d'indéterminées et l'on pose $X_i = \text{Spec } A[\tau_{\ell i}]_{\ell \neq i}$ (pour faire le lien avec 6.2.3.4, il faut penser que $\tau_{\ell i} = \frac{T_\ell}{T_i}$).

Pour tout couple (i, j) d'indices avec $i \neq j$, le morphisme φ_{ij} de A -algèbres

$$A \left[\tau_{\ell j}, \frac{1}{\tau_{ij}} \right] \rightarrow A \left[\tau_{\ell i}, \frac{1}{\tau_{ji}} \right],$$

$$\tau_{\ell j} \mapsto \tau_{\ell i} \cdot \frac{1}{\tau_{ji}} \quad (\ell \neq i), \quad \tau_{ij} \mapsto \frac{1}{\tau_{ji}}$$

est un isomorphisme de réciproque φ_{ji} .

Pour tout couple d'indices (i, j) avec $i \neq j$, on note ι_{ij} l'isomorphisme de $X_{ij} := D(\tau_{ji}) \subset U_i$ vers X_{ji} induit par φ_{ij} .

(6.2.5.2) Il n'est pas difficile de voir que la famille des X_i , des X_{ij} et des ι_{ij} satisfait les conditions i) et ii) de 5.2.2.4. Cela autorise à procéder comme expliqué dans *loc. cit.* au recollement des X_i le long des isomorphismes ι_{ij} ; nous vous laissons vérifier que le A -schéma ainsi obtenu est isomorphe à $\mathbb{P}_A^n$ (l'ouvert X_i s'envoyant sur la carte affine $D(T_i)$).

(6.2.5.3) *Le cas particulier où $n = 1$.* Par ce qui précède, le A -schéma $\mathbb{P}_A^1$ peut se décrire comme le recollement des copies $X_0 = \operatorname{Spec} A[\tau_{10}]$ et $X_1 = \operatorname{Spec} A[\tau_{01}]$ de $\mathbb{A}_A^1$, le long des isomorphismes réciproques l'un de l'autre

$$\iota_{10}: D(\tau_{10}) = \operatorname{Spec} A[\tau_{10}, \tau_{10}^{-1}] \rightarrow \operatorname{Spec} A[\tau_{01}, \tau_{01}^{-1}] = D(\tau_{01})$$

$$\text{et } \iota_{01}: D(\tau_{01}) = \operatorname{Spec} A[\tau_{01}, \tau_{01}^{-1}] \rightarrow \operatorname{Spec} A[\tau_{10}, \tau_{10}^{-1}] = D(\tau_{10})$$

donnés par les formules

$$\iota_{10}(\tau_{10}) = \tau_{01}^{-1} \text{ et } \iota_{01}(\tau_{01}) = \tau_{10}^{-1}.$$

Lorsque A est un corps, on retrouve très précisément la construction du 5.2.5. Il s'ensuit que pour tout corps k , les deux définitions concurrentes du k -schéma $\mathbb{P}_k^1$, à savoir celle de 5.2.5 et celle de 6.2.1, coïncident.

(6.2.6) Homogénéisation et déshomogénéisation. Fixons un indice i , et posons $\tau_j = \frac{T_j}{T_i}$ pour $j \neq i$. L'ouvert affine $U_i = D(T_i)$ de $\mathbb{P}_A^n$ s'identifie à $\operatorname{Spec} A[\tau_j]_{j \neq i}$ (6.2.3.2).

(6.2.6.1) Soit I un idéal homogène de $A[T_0, \dots, T_n]$, et soit B la A -algèbre graduée quotient $A[T_0, \dots, T_n]/I$. Soit $(f_\ell)_\ell$ une famille génératrice de I constituée d'éléments homogènes et non nuls; pour tout ℓ , on note d_ℓ le degré de f_ℓ .

Pour tout ℓ , posons $g_\ell = f_\ell/T_i^{d_\ell}$. On peut voir g_ℓ comme le «déshomogénéisé» de f_ℓ (relativement à la variable T_i); il s'obtient à partir de f_ℓ en remplaçant T_i par 1 et T_j par τ_j pour tout $j \neq i$.

Il résulte de 6.1.17 et sq. que la flèche quotient $A[T_0, \dots, T_n] \rightarrow B$ induit une immersion fermée

$$\operatorname{Proj} B \hookrightarrow \mathbb{P}_A^n$$

d'image $V(I)$, et que l'immersion fermée induite $\operatorname{Proj} B \times_{\mathbb{P}_A^n} U_i \hookrightarrow U_i$ est définie par l'idéal $J := (g_\ell)_\ell$ de $A[\tau_j]$. En particulier, $V(I) \cap U_i = V(J)$ (ce qu'on pouvait voir directement).

(6.2.6.2) Inversement, soit J un idéal de $A[\tau_j]_{j \neq i}$. Choisissons une famille $(g_\ell)_\ell$ de générateurs de J constituée d'éléments non nuls. Pour tout ℓ , notons d_ℓ le degré de g_ℓ , et f_ℓ le polynôme de $A[T_0, \dots, T_n]$ déduit de g_ℓ par «homogénéisation». Plus précisément, si l'on écrit $g_\ell = \sum_{(e_j)_j} a_{(e_j)_j} \prod \tau_j^{e_j}$ alors $f_\ell = \sum_{(e_j)_j} a_{(e_j)_j} T_i^{d_\ell - \sum e_j} \prod T_j^{e_j}$. Par construction, f_ℓ est non nul et homogène de degré d_ℓ , et g_ℓ est son déshomogénéisé. Soit I l'idéal (homogène) de $A[T_0, \dots, T_n]$ engendré par les f_ℓ , et soit B la A -algèbre graduée quotient $A[T_0, \dots, T_n]/I$. On est maintenant exactement dans la situation considérée au 6.2.6.1 ci-dessus : $A[T_0, \dots, T_n] \rightarrow B$ induit une immersion fermée $\operatorname{Proj} B \hookrightarrow \mathbb{P}_A^n$ d'image $V(I)$, et l'immersion fermée $\operatorname{Proj} B \times_{\mathbb{P}_A^n} U_i \hookrightarrow U_i$ est celle définie par l'idéal J (en particulier, on a l'égalité $V(I) \cap U_i = V(J)$).

(6.2.6.3) Exemples. Supposons que $A = \mathbb{C}$, que $n = 2$ et que $i = 0$.

Déshomogénéisation. L'idéal homogène $(T_0T_1 - T_2^2 + 2T_3^2, T_1^3 - iT_0T_1T_2)$ de $\mathbb{C}[T_0, T_1, T_2]$ induit une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, et $X \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} U_0 \hookrightarrow U_0$

est l'immersion fermée définie par l'idéal $(\tau_1 - \tau_2^2 + 2\tau_3^2, \tau_1^3 - i\tau_1\tau_2)$ de $\mathbb{C}[\tau_1, \tau_2]$ (on a déshomogénéisé les équations de X).

Homogénéisation. L'idéal $(\tau_1^2 - 3\tau_1 + \tau_2^4, \tau_1^3 - \tau_2 + 7)$ de $\mathbb{C}[\tau_1, \tau_2]$ induit une immersion fermée $Y \hookrightarrow U_0$. Si $Z \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ désigne l'immersion fermée induite par l'idéal homogène $(T_0^2T_1^2 - 3T_0^3T_1 + T_2^4, T_1^3 - T_0^2T_2 + 7T_0^3)$ de $\mathbb{C}[T_0, T_1, T_2]$ on a un isomorphisme de U_0 -schémas $Z \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} U_0 \simeq Y$ (on a homogénéisé les équations de Y).

(6.2.7) Quelques propriétés de l'espace projectif sur un corps. Soit k un corps et soit n un entier.

(6.2.7.1) L'anneau $k[T_0, \dots, T_n]$ est intègre, et $k[T_0, \dots, T_n]_+$ est non nul (il contient au moins T_0). Il découle alors de 6.1.13.2 et 6.1.13.3 que $\mathbb{P}_k^n$ est irréductible et réduit. Ses ouverts non vides sont donc denses – c'est en particulier le cas des $D(T_i)$.

(6.2.7.2) Comme $\mathbb{P}_k^n$ est irréductible, sa dimension de Krull est égale en vertu de 5.5.9.2 à celle de n'importe quel de ses ouverts non vide. Puisque $D(T_0) \simeq \mathbb{A}_k^n$, la dimension de Krull de $\mathbb{P}_k^n$ est égale à n .

(6.2.7.3) Le corps des fonctions de $\mathbb{P}_k^n$ (5.5.9.2) est quant à lui égal au corps des fractions de l'anneau des fonctions de n'importe lequel de ses ouverts affines non vides. Il est en particulier égal à

$$\text{Frac } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D(T_0)) = \text{Frac } k \left[\frac{T_j}{T_0} \right]_{j \neq 0} = k \left(\frac{T_j}{T_0} \right)_{j \neq 0}.$$

On vérifie aussitôt que ce corps peut se décrire indépendamment du choix d'une carte affine : c'est l'ensemble des éléments de $k(T_0, \dots, T_n)$ qui admettent une écriture comme quotient de deux polynômes homogènes de même degré.

(6.2.7.4) Soit U un ouvert de $\mathbb{P}_k^n$ et soit $x \in U$. On déduit de 5.5.6.4 et 5.5.6.5 que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) x est fermé dans $\mathbb{P}_k^n$;
- ii) x est fermé dans U ;
- iii) $\kappa(x)$ est une extension finie de k .

(6.2.7.5) Exercice. Fixons i entre 0 et n , et posons $\tau_j = \frac{T_j}{T_i}$ pour tout indice $j \neq i$. Montrez que les opérations d'homogénéisation et de déshomogénéisation relatives à la variable T_i mettent en bijection l'ensemble des (classes d'équivalence de) polynômes irréductibles de $k[\tau_j]_{j \neq i}$ et l'ensemble des (classes d'équivalence de) polynômes irréductibles de $k[T_0, \dots, T_n]$ différents de T_i .

(6.2.7.6) On suppose que $n = 1$. La droite projective $\mathbb{P}_k^1$ est réunion de ses deux ouverts denses $D(T_0)$ et $D(T_1)$. Chacun d'eux est isomorphe à $\mathbb{A}_k^1$, ce qui implique qu'il n'est constitué que de points fermés et d'un point générique – qui est nécessairement par densité le point générique de $\mathbb{P}_k^1$ – et que ses fermés stricts sont précisément les ensembles finis de points fermés.

On en déduit aisément que $\mathbb{P}_k^1$ est elle-même constituée d'un point générique et de points fermés, et que ses fermés stricts sont précisément les ensembles finis de points fermés.

6.3 Le foncteur des points de $\mathbb{P}_A^n$

(6.3.1) Soit A un anneau. Si X et S sont deux A -schémas, nous noterons comme d'habitude $X(S)$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{A\text{-Sch}}(S, X)$.

(6.3.2) On fixe un entier n . Le but de cette section est de donner une description explicite et relativement maniable du foncteur $S \mapsto \mathbb{P}_A^n(S)$ de $A\text{-Sch}$ vers $\mathbf{Ens}$.

Pour tout i , on note U_i l'ouvert $D(T_i)$ de $\mathbb{P}_A^n$, et V_i l'ouvert affine $D(T_i)$ de $\mathbb{A}_A^{n+1} = \mathrm{Spec} A[T_0, \dots, T_n]$. La réunion V des V_i est un ouvert de $\mathbb{A}_A^{n+1}$.

Description partielle du foncteur des points de $\mathbb{P}_A^n$: points donnés par une famille de fonctions

(6.3.3) Construction d'un morphisme $V \rightarrow \mathbb{P}_A^n$.

(6.3.3.1) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. L'inclusion $A \left[\frac{T_j}{T_i} \right]_{j \neq i} \hookrightarrow A \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{T_i} \right]$ induit un morphisme $\Psi_i: V_i \rightarrow U_i$.

Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. L'intersection $U_i \cap U_j$ est l'ouvert $D(\frac{T_j}{T_i})$ de U_i ; son image réciproque $\Psi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ est l'ouvert $D(\frac{T_j}{T_i})$ de V_i , qui s'identifie à son ouvert $D(T_j)$, puisque T_i est inversible sur U_i . Autrement dit, on a l'égalité $\Psi_i^{-1}(U_i \cap U_j) = V_i \cap V_j$. Par construction, le morphisme de schémas affines $\Psi_i|_{V_i \cap V_j}: V_i \cap V_j \rightarrow U_i \cap U_j$ est induit par l'inclusion

$$(A[T_0, \dots, T_n]_{T_i T_j})_0 \hookrightarrow A \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{T_i T_j} \right].$$

En échangeant i et j , on voit que $\Psi_j^{-1}(U_i \cap U_j) = V_i \cap V_j$, et que le morphisme de schémas affines $\Psi_j|_{V_i \cap V_j}: V_i \cap V_j \rightarrow U_i \cap U_j$ est induit par l'inclusion

$$(A[T_0, \dots, T_n]_{T_j T_i})_0 \hookrightarrow A \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{T_j T_i} \right].$$

Il coïncide donc avec $\Psi_i|_{V_i \cap V_j}$.

(6.3.3.2) Il découle de ce qui précède que les morphismes Ψ_i se recollent en un morphisme $\Psi: V \rightarrow \mathbb{P}_A^n$, qui possède la propriété suivante : pour tout i , on a $\Psi^{-1}(U_i) = V_i$, et la flèche $\Psi|_{V_i}: V_i \rightarrow U_i$ est induite par l'inclusion $A \left[\frac{T_j}{T_i} \right]_{j \neq i} \hookrightarrow A \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{T_i} \right]$.

(6.3.4) Description fonctorielle du morphisme Ψ .

(6.3.4.1) Soit S un A -schéma. L'ensemble $\mathbb{A}_A^{n+1}(S)$ s'identifie via $\chi \mapsto (\chi^* T_i)$ à $\mathcal{O}_S(S)^{n+1}$. Soit $(f_0, \dots, f_n)$ appartenant à $\mathcal{O}_S(S)^{n+1}$ et soit $\chi: S \rightarrow \mathbb{A}_A^{n+1}$ le morphisme correspondant. Comme $\chi^* T_i$ est égal à f_i , on a équivalence pour tout $s \in S$ entre $f_i(s) = 0$ et $T_i(\chi(s)) = 0$.

Il s'ensuit que χ se factorise par V_i pour un certain i (resp. par V) si et seulement si f_i est inversible (resp. si et seulement si pour tout $s \in S$ l'une au moins des f_j est inversible en s).

En d'autres termes, $V_i(S)$ s'identifie au sous-ensemble de $\mathcal{O}_S(S)^{n+1}$ formé des familles (f_j) avec f_i inversible, et $V(S)$ à celui formé des familles (f_j) telles que $S = \bigcup D(f_j)$; dans ce qui suit, nous procéderons le plus souvent implicitement à ces identifications.

(6.3.4.2) Soit $(f_0, \dots, f_n) \in V(S)$. La flèche composée

$$S \xrightarrow{(f_0, \dots, f_n)} V \xrightarrow{\Psi} \mathbb{P}_A^n$$

appartient à $\mathbb{P}_A^n(S)$ et sera notée $[f_0 : f_1 : \dots : f_n]$.

Fixons un indice i . L'image réciproque de U_i par $[f_0 : \dots : f_n]$ est égale à l'image réciproque de $\Psi^{-1}(U_i) = V_i$ par $(f_0, \dots, f_n)$, c'est-à-dire à $D(f_i)$ en vertu de 6.3.4.1.

En particulier, $[f_0 : \dots : f_n]$ appartient au sous-ensemble $U_i(S)$ de $\mathbb{P}_A^n(S)$ (constitué des morphismes qui se factorisent ensemblistement par U_i) si et seulement si $S = D(f_i)$, c'est-à-dire si et seulement si f_i est inversible, ou encore si et seulement si $(f_0, \dots, f_n) \in V_i(S)$.

(6.3.4.3) Fixons i , soit S un A -schéma et soit $(f_0, \dots, f_n) \in V_i(S)$. D'après 6.3.4.2, l'élément $[f_0 : \dots : f_n]$ de $\mathbb{P}_A^n(S)$ appartient à $U_i(S)$.

Comme $U_i = \text{Spec } A \left[\frac{T_j}{T_i} \right]_{j \neq i}$, l'application $\chi \mapsto \left(\chi^* \left(\frac{T_j}{T_i} \right) \right)_j$ établit une bijection de $U_i(S)$ sur $\mathcal{O}_S(S)^{\{0, \dots, n\} \setminus \{i\}}$. Soit $(g_j)_{j \neq i}$ l'élément de $\mathcal{O}_S(S)^{\{0, \dots, n\} \setminus \{i\}}$ correspondant à $[f_0 : \dots : f_n]$. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & [f_0 : \dots : f_n] & & \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\ S & \xrightarrow{(f_0, \dots, f_n)} & V_i & \xrightarrow{\Psi} & U_i \\ f_\ell & \longleftarrow & T_\ell & & \\ & & \frac{T_j}{T_i} \longleftarrow \frac{T_j}{T_i} & & \\ g_j & \longleftarrow & & & \frac{T_j}{T_i} \end{array}$$

montre l'effet des différents morphismes de schémas en jeu sur les fonctions. On en déduit immédiatement que $g_j = f_j/f_i$ pour tout $j \neq i$. Autrement dit, modulo l'identification de $U_i(S)$ avec $\mathcal{O}_S(S)^{\{0, \dots, n\} \setminus \{i\}}$, l'application naturelle de $V_i(S)$ dans $U_i(S)$ envoie $[f_0 : \dots : f_n]$ sur $(f_j/f_i)_{j \neq i}$. Ce fait a plusieurs conséquences importantes.

- (A) L'application $(f_0, \dots, f_n) \mapsto [f_0 : f_1 : \dots : f_n]$ de $V_i(S)$ dans $U_i(S)$ est surjective. En effet, tout élément $(g_j)_{j \neq i}$ de $U_i(S)$ est par qui précède égal à $[g_0 : \dots : g_{i-1} : 1 : g_{i+1} : \dots : g_n]$.

On peut reformuler ce fait comme suit : pour tout $\varphi : S \rightarrow U_i$ on a l'égalité

$$\varphi = [\varphi^*(T_0/T_i) : \dots : \varphi^*(T_{i-1}/T_i) : 1 : \varphi^*(T_{i+1}/T_i) : \dots : \varphi^*(T_n/T_i)],$$

qu'on peut en fait récrire de manière plus légère $\varphi = [\varphi^*(T_j/T_i)]_{0 \leq j \leq n}$ puisque $T_i/T_i = 1$.

(B) Si $(f_0, \dots, f_n)$ et $(g_0, \dots, g_n)$ sont deux éléments de $V_i(S)$ alors

$$[f_0 : f_1 : \dots : f_n] = [g_0 : g_1 : \dots : g_n]$$

si et seulement si $f_j/f_i = g_j/g_i$ pour tout $j \neq i$. On vérifie aussitôt que cela revient à demander qu'il existe $\lambda \in \mathcal{O}_S(S)^\times$ tel que $f_j = \lambda g_j$ pour tout j .

(C) Si $(f_0, \dots, f_n)$ est un élément de $V_i(S)$, il résulte de (B) qu'il existe un unique $(g_0, \dots, g_n)$ dans $V_i(S)$ tel que $[g_0 : \dots : g_n] = [f_0 : \dots : f_n]$ et $g_i = 1$, donné par les formules $g_j = f_j/f_i$ pour tout j .

Si l'on pose $\varphi = [f_0 : \dots : f_n]$, on peut également en vertu de (A) décrire $(g_0, \dots, g_n)$ par les formules $g_j = \varphi^*(T_j/T_i)$ pour tout j .

(6.3.4.4) On désigne toujours par S un A -schéma, et l'on se donne deux éléments $(f_0, \dots, f_n)$ et $(g_0, \dots, g_n)$ de $V(S)$. Le but de ce qui suit est de montrer que

$$[f_0 : \dots : f_n] = [g_0 : \dots : g_n]$$

si et seulement si il existe $\lambda \in \mathcal{O}_S(S)^\times$ telle que $f_i = \lambda g_i$ pour tout i , et qu'une telle λ est nécessairement unique dans ce cas.

Supposons qu'il existe une telle λ . On a alors immédiatement les égalités $D(f_i) = D(g_i)$ pour tout i , et sur $D(f_i)$ la fonction λ est nécessairement égale à f_i/g_i , ce qui montre déjà son unicité puisque les $D(f_i)$ recouvrent S par définition de $V(S)$. Pour cette même raison il suffit, pour montrer que les éléments $[f_0 : \dots : f_n]$ et $[g_0 : \dots : g_n]$ de $\mathbb{P}_A^n(S)$ coïncident, de prouver que c'est le cas des éléments $[f_0|_{S_i} : \dots : f_n|_{S_i}]$ et $[g_0|_{S_i} : \dots : g_n|_{S_i}]$ de $\mathbb{P}_A^n(S_i)$ pour tout i , où l'on a posé $S_i = D(f_i) = D(g_i)$.

Fixons donc i . Les fonctions f_i et g_i sont inversibles sur S_i , et les S_i -points $(f_0|_{S_i}, \dots, f_n|_{S_i})$ et $(g_0|_{S_i}, \dots, g_n|_{S_i})$ appartiennent en conséquence à $V_i(S_i)$. En vertu de 6.3.4.3 (B), l'existence de la fonction λ entraîne l'égalité

$$[f_0|_{S_i} : \dots : f_n|_{S_i}] = [g_0|_{S_i} : \dots : g_n|_{S_i}],$$

qui est ce qu'on voulait.

Réciproquement, supposons que $[f_0 : f_1 : \dots : f_n] = [g_0 : g_1 : \dots : g_n]$. Fixons i . D'après 6.3.4.2, les ouverts $D(f_i)$ et $D(g_i)$ de T sont tous deux égaux à l'image réciproque de U_i par $[f_0 : f_1 : \dots : f_n] = [g_0 : g_1 : \dots : g_n]$; en conséquence, ils coïncident; posons $S_i = D(f_i) = D(g_i)$. Comme f_i et g_i sont inversibles sur S_i , l'égalité

$$[f_0|_{S_i} : \dots : f_n|_{S_i}] = [g_0|_{S_i} : \dots : g_n|_{S_i}]$$

implique en vertu de 6.3.4.3 (B) qu'il existe une fonction inversible λ_i sur S_i telle que $f_j|_{S_i} = \lambda_i g_j|_{S_i}$ pour tout j . L'assertion d'unicité déjà établie entraîne que $\lambda_i|_{S_i \cap S_j} = \lambda_j|_{S_i \cap S_j}$ pour tout (i, j) , et les λ_i se recollent ainsi en une fonction inversible λ qui possède la propriété requise.

(6.3.5) Récapitulons : le morphisme $\Psi: V \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ induit pour tout A -schéma S une application $(f_0, \dots, f_n) \mapsto [f_0 : \dots : f_n]$ de $V(S)$ vers $\mathbb{P}_A^n(S)$ dont on a décrit au 6.3.4.4 le «noyau», c'est-à-dire les conditions sous lesquelles deux éléments ont même image : il faut et il suffit qu'ils satisfassent la relation de «colinéarité inversible».

Il est par contre difficile en général de décrire son image que nous noterons $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(S)$. Indiquons tout de même quelques faits à son sujet.

(6.3.5.1) Soit S un A -schéma. Pour tout i , le sous-ensemble $U_i(S)$ de $\mathbb{P}_A^n(S)$ est contenu dans $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(S)$: c'est une simple conséquence de la surjectivité de l'application $V_i(S) \rightarrow U_i(S)$ (6.3.4.3).

(6.3.5.2) En général, $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(S) \subsetneq \mathbb{P}_A^n(S)$. Donnons un exemple. On suppose que $A \neq \{0\}$ et que $n \geq 1$, et l'on pose $S = \mathbb{P}_A^n$. Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(\mathbb{P}_A^n) = A$ d'après 6.2.4, le sous-ensemble $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(\mathbb{P}_A^n)$ est simplement constitué d'éléments de la forme $[a_0 : \dots : a_n]$ où les a_i appartiennent à A , et où les $D(a_i)$ recouvrent $\text{Spec } A$.

Or $\text{Id}_{\mathbb{P}_A^n}$ ne peut pas être de cette forme. En effet, soit $(a_0, \dots, a_n)$ comme ci-dessus, et soit x un point de $\text{Spec } A$ (comme A est non nul, son spectre est non vide). Il existe i tel que $a_i(x) \neq 0$, et a_i est donc inversible sur toute la fibre $\mathbb{P}_{\kappa(x)}^n$ de $\mathbb{P}_A^n$ en x . Il s'ensuit que le morphisme $[a_0 : \dots : a_n]$ envoie toute la fibre $\mathbb{P}_{\kappa(x)}^n$ sur l'ouvert $D(T_i)$ de $\mathbb{P}_{\kappa(x)}^n$, qui est strict car $n \geq 1$ (6.2.3.3). En conséquence, $[a_0 : \dots : a_n]$ ne peut être égal à $\text{Id}_{\mathbb{P}_A^n}$.

(6.3.6) Nous allons maintenant donner deux exemples fondamentaux dans lesquels $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(S)$ est égal à $\mathbb{P}_A^n(S)$. Le premier d'entre eux s'avérera être un cas particulier du second, mais nous avons choisi de le traiter séparément au vu de son importance. Avant de les énoncer, commençons par une remarque d'ordre général.

(6.3.6.1) Supposons que $\mathbb{P}_A^n(S)$ soit la réunion des $U_i(S)$. On a alors en vertu de 6.3.5.1 l'égalité $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(S) = \mathbb{P}_A^n(S)$. Notez par ailleurs que comme $V_i(S)$ est l'image réciproque de $U_i(S)$ pour tout i (6.3.4.2), l'égalité $\mathbb{P}_A^n(S) = \bigcup U_i(S)$ implique que $V(S) = \bigcup V_i(S)$, c'est-à-dire que pour tout $(f_0, \dots, f_n) \in \mathcal{O}_S(S)^{\{0, \dots, n\}}$ on a $S = \bigcup D(f_i)$ si et seulement si l'une des f_i est inversible sur S . On dispose dès lors d'une bijection canonique entre $\mathbb{P}_A^n(S)$ et le quotient de

$$V(S) = \bigcup V_i(S) = \{(f_0, \dots, f_n) \in \mathcal{O}_S(S)^{n+1}, \exists i, f_i \in \mathcal{O}_S(S)^\times\}$$

par la relation de colinéarité inversible.

(6.3.6.2) Soit k une A -algèbre qui est un corps. Comme $\text{Spec } k$ ne comprend qu'un point, tout morphisme de $\text{Spec } k$ vers $\mathbb{P}_A^n$ a nécessairement une image contenue dans U_i pour un certain i . Il s'ensuit que $\mathbb{P}_A^n(k) = \bigcup U_i(k)$. On déduit alors de 6.3.6.1 que $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(k) = \mathbb{P}_A^n(k)$, et plus précisément que $\mathbb{P}_A^n(k)$ s'identifie naturellement au quotient de $k^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ par la relation de colinéarité inversible ; on retrouve ainsi la description classique ou naïve de l'espace projectif.

(6.3.6.3) Lemme. Soit B un anneau local. Si W est un ouvert de $\text{Spec } B$ qui contient son unique point fermé alors $W = \text{Spec } B$.

Démonstration. Soit x le point fermé de $\text{Spec } B$. Comme W contient x , il existe $f \in B$ tel que $D(f) \subset W$ et tel que $f(x) \neq 0$. Mais cette dernière condition signifie que f n'appartient pas à l'idéal maximal de B , et donc que f est inversible. En conséquence $D(f)$ est égal à $\text{Spec } B$ tout entier, et il en va *a fortiori* de même de W . $\square$

(6.3.6.4) Soit maintenant B une A -algèbre locale et soit x le point fermé de $\text{Spec } B$. Soit χ un morphisme de $\text{Spec } B$ vers $\mathbb{P}_A^n$. Il existe un indice i tel que $\chi(x) \in U_i$. L'image réciproque $\chi^{-1}(U_i)$ est donc un ouvert de $\text{Spec } B$ qui contient x ; d'après le lemme 6.3.6.3 ci-dessus, c'est $\text{Spec } B$ tout entier, ce qui veut dire que $\chi(\text{Spec } B) \subset U_i$. Il s'ensuit que $\mathbb{P}_A^n(B) = \bigcup U_i(B)$. On déduit alors de 6.3.6.1 que $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(B) = \mathbb{P}_A^n(B)$, et plus précisément que $\mathbb{P}_A^n(B)$ s'identifie naturellement au quotient de

$$\{(b_0, \dots, b_n) \in B^{n+1}, \exists i, b_i \in B^\times\}$$

par la relation de colinéarité inversible.

Quelques exemples

(6.3.7) On suppose pour ce paragraphe que l'anneau A est un corps, que nous préférons noter k . Soit $x \in \mathbb{P}_k^n(k)$ (on peut voir x aussi bien comme un morphisme de $\text{Spec } k$ vers $\mathbb{P}_k^n$ que comme un point schématique de $\mathbb{P}_k^n$ de corps résiduel k , cf. 5.5.7.1; dans ce qui suit, nous utiliserons implicitement ces deux interprétations). D'après 6.3.6.2, il existe un $(n+1)$ -uplet $(a_0, \dots, a_n)$ d'éléments *non tous nuls* de k tel que $x = [a_0 : \dots : a_n]$. Pour tout i , on a $x \in U_i(k)$ si et seulement si $a_i \neq 0$ (6.3.4.2).

(6.3.7.1) Soit i tel que $a_i \neq 0$, c'est-à-dire encore tel que $x \in U_i(k)$. On a un isomorphisme $U_i \simeq \text{Spec } k \left[\frac{T_j}{T_i} \right]_{j \neq i}$ qui permet d'identifier $U_i(k)$ à l'ensemble des n -uplets $(b_j)_{0 \leq j \leq n, j \neq i}$ d'éléments de k . D'après 6.3.4.3, le n -uplet qui correspond à x est $(a_j/a_i)_{j \neq i}$.

(6.3.7.2) Déclinons ces faits dans le cas particulier où $n = 1$. La droite projective $\mathbb{P}_k^1$ est alors réunion de deux cartes affines U_0 et U_1 , respectivement munies des fonctions coordonnées $\tau_1 := T_1/T_0$ et $\tau_0 := T_0/T_1$; on a $\tau_0 = 1/\tau_1$ sur l'intersection $U_0 \cap U_1$. Le point x s'écrit $[a_0 : a_1]$, où $(a_0, a_1) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Si $a_0 \neq 0$ alors $x \in U_0(k)$; c'est le k -point de la carte U_0 en lequel $\tau_1 = a_1/a_0$.

Si $a_1 \neq 0$ alors $x \in U_1(k)$; c'est le k -point de la carte U_1 en lequel $\tau_0 = a_0/a_1$.

Si $a_0 = 0$ alors $x \notin U_0(k)$. C'est le k -point de la carte U_1 en lequel $\tau_0 = 0$ ou, si l'on préfère, le «point à l'infini» relativement à la coordonnée τ_1 .

Si $a_1 = 0$ alors $x \notin U_1(k)$. C'est le k -point de la carte U_0 en lequel $\tau_1 = 0$ ou, si l'on préfère, le «point à l'infini» relativement à la coordonnée τ_0 .

Notons que le point fermé x de $\mathbb{P}_k^1$ est égal à $V(a_1 T_0 - a_0 T_1)$: il suffit en effet de vérifier que $\{x\} \cap U_0 = V(a_1 - a_0 \tau_1)$ et $\{x\} \cap U_1 = V(a_1 \tau_0 - a_0)$, et cela découle aussitôt de ce qui précède.

(6.3.8) On ne suppose plus que A est un corps. Le A -schéma $\mathbb{P}_A^1$ est réunion de deux cartes affines U_0 et U_1 , respectivement munies des fonctions coordonnées $\tau_1 := T_1/T_0$ et $\tau_0 := T_0/T_1$.

(6.3.8.1) Soit $s \in \mathbb{P}_A^{1,\sharp}(A)$. Par définition, s est une section du morphisme structural $\mathbb{P}_A^1 \rightarrow \text{Spec } A$, section qui est de la forme $[a_0 : a_1]$ où a_0 et a_1 sont deux éléments de A tels que $\text{Spec } A = D(a_0) \cup D(a_1)$, c'est-à-dire encore tels que l'idéal (a_0, a_1) de A soit égal à A .

Soit $x \in \operatorname{Spec} A$. L'image $s(x)$ est alors (par fonctorialité de toutes les constructions) le $\kappa(x)$ -point $[a_0(x), a_1(x)]$ de la fibre $\mathbb{P}_{\kappa(x)}^1$ de $\mathbb{P}_A^1$ en x (comme $\operatorname{Spec} A = D(a_0) \cup D(a_1)$ on a bien $a_0(x) \neq 0$ ou $a_1(x) \neq 0$). On a donc

$$s(\operatorname{Spec} A) \cap \mathbb{P}_{\kappa(x)}^1 = s(x) = \underbrace{V(a_1(x)T_0 - a_0(x)T_1)}_{\text{fermé de } \mathbb{P}_{\kappa(x)}^1} = \underbrace{V(a_1T_0 - a_0T_1)}_{\text{fermé de } \mathbb{P}_A^1} \cap \mathbb{P}_{\kappa(x)}^1.$$

Ceci valant pour tout x , il vient $s(\operatorname{Spec} A) = V(a_1T_0 - a_0T_1)$.

(6.3.8.2) Supposons que $A = \mathbb{Z}$, que $a_0 = 2$ et que $a_1 = 1$. Soit $y \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Son image $s(y)$ est le $\kappa(y)$ -point $[1 : 2]$ de $\mathbb{P}_{\kappa(y)}^1$. On distingue maintenant deux cas.

- Si $2(y) \neq 0$, c'est-à-dire si $y \neq x_2$, alors $s(y)$ est le $\kappa(y)$ -point d'équation $\tau_1 = (1/2)$ de la carte affine $U_0 \cap \mathbb{P}_{\kappa(y)}^1$.
- Si $2(y) = 0$, c'est-à-dire si $y = x_2$, alors $s(y)$ est l'origine de la carte affine $U_1 \cap \mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^1$, c'est-à-dire encore le point à l'infini de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^1$ relatif à la coordonnée τ_1 .

L'image $s(\operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ est le fermé $V(2T_1 - T_0)$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$, qui est irréductible. En effet, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ est irréductible et il en va donc de même de son image par n'importe quelle application continue – on peut aussi si l'on préfère remarquer qu'il existe un homéomorphisme naturel

$$V(2T_1 - T_0) \simeq \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[T_0, T_1]/(2T_1 - T_0) = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[T_1] \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{Z},$$

et utiliser là encore l'irréductibilité de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Remarque. La description explicite de $s(y)$ donnée ci-dessus pour tout y appartenant à $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ montre que $V(2T_1 - T_0)$ est la réunion disjointe de son ouvert non vide $U_0 \cap V(2T_1 - T_0)$ (qui est le fermé $V(2\tau_1 - 1)$ de $U_0 \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$) et du point à l'infini (relativement à la coordonnée τ_1) de la fibre $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^1$. Comme le fermé $V(2T_1 - T_0)$ est irréductible, son ouvert non vide $V(2\tau_1 - 1) \subset U_0$ en est une partie dense, ce qui veut dire que $V(2T_1 - T_0) = \overline{V(2\tau_1 - 1)}$.

Or le fermé $V(2\tau_1 - 1)$ de $U_0 \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ a déjà été étudié en 4.2.5.2. Nous avons signalé qu'il ne rencontrait pas $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_2}^1$, et mentionné en 4.2.12.2 qu'il l'intersectait en fait moralement «à l'infini». Cette assertion un peu vague a désormais sa traduction rigoureuse : nous venons en effet de voir que dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$, l'adhérence de $V(2\tau_1 - 1)$ est précisément la réunion de ce dernier et du point à l'infini de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^1$.

(6.3.8.3) Supposons que $A = \mathbb{Z}$, que $a_0 = 2$ et que $a_1 = 3$ (notons que $(2, 3)$ engendre bien $\mathbb{Z}$ puisque 2 et 3 sont premiers entre eux). Soit $y \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Son image $s(y)$ est le $\kappa(y)$ -point $[2 : 3]$ de $\mathbb{P}_{\kappa(y)}^1$. On distingue maintenant trois cas.

- Si $2(y) \neq 0$ et $3(y) \neq 0$ c'est-à-dire si $y \notin \{x_2, x_3\}$ est le $\kappa(y)$ -point d'équation $\tau_1 = (3/2)$ de la carte affine $U_0 \cap \mathbb{P}_{\kappa(y)}^1$, et le $\kappa(y)$ -point d'équation $\tau_0 = (2/3)$ de la carte affine $U_1 \cap \mathbb{P}_{\kappa(y)}^1$.
- Si $2(y) = 0$, c'est-à-dire si $y = x_2$ alors $s(y)$ est l'origine de la carte affine $U_1 \cap \mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^1$, c'est-à-dire encore le point à l'infini de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^1$ relatif à la coordonnée τ_1 .

• Si $3(y) = 0$, c'est-à-dire si $y = x_2$ alors $s(y)$ est l'origine de la carte affine $U_0 \cap \mathbb{P}_{\mathbb{F}_3}^1$, c'est-à-dire encore le point à l'infini de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_3}^1$ relatif à la coordonnée τ_0 .

L'image $s(\text{Spec } \mathbb{Z})$ est le fermé $V(2T_1 - 3T_0)$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$, qui est irréductible puisque $\text{Spec } \mathbb{Z}$ est irréductible.

Les faisceaux $\mathcal{O}(d)$

(6.3.9) Si k est une A -algèbre qui est un corps, on a vu que $\mathbb{P}_A^n(k)$ possède une description agréable : c'est le quotient de $k^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ par la relation de colinéarité inversible.

(6.3.9.1) Malheureusement, cette description ne se généralise pas telle quelle aux A -schémas quelconques. On a certes construit, pour tout A -schéma S , un sous-ensemble naturel $\mathbb{P}_A^{n,\#}(S)$ de $\mathbb{P}_A^n(S)$ qui s'identifie au quotient de

$$V(S) = \{(f_0, \dots, f_n) \in \mathcal{O}_S(S)^{n+1}, \bigcup D(f_i) = S\}$$

par la relation de colinéarité inversible. Mais on a signalé qu'en général, $\mathbb{P}_A^{n,\#}(S)$ est un sous-ensemble *strict* de $\mathbb{P}_A^n(S)$ (6.3.5.2).

(6.3.9.2) Nous allons maintenant donner une description légèrement différente de $\mathbb{P}_A^n(k)$ qui aura l'avantage de bien se généraliser à un A -schéma quelconque.

Soit $\mathbf{C}$ la catégorie définie comme suit. Ses objets sont les familles $(L, s_0, \dots, s_n)$ où L est un k -espace vectoriel de dimension 1, et où les s_i sont des éléments non tous nuls de L . Un morphisme de $(L, (s_i))$ vers $(L', (s'_i))$ est une *bijection* linéaire $\varphi: L \rightarrow L'$ qui envoie s_i sur s'_i pour tout i (les morphismes de $\mathbf{C}$ sont donc tous des isomorphismes).

Nous allons montrer qu'il existe une bijection naturelle entre $\mathbb{P}_A^n(k)$ et l'ensemble $\mathbf{l}$ des classes d'isomorphie d'objets de $\mathbf{C}$.

Soit $x \in \mathbb{P}_A^n(k)$. Écrivons $x = [a_0 : \dots : a_n]$ où les a_i sont des scalaires non tous nuls. La classe d'isomorphie de l'objet $(k, (a_i))$ de $\mathbf{C}$ ne dépend alors que de x , et pas du choix des a_i . En effet, si $\lambda \in k^\times$, l'homothétie de rapport λ est un isomorphisme de $(k, (a_i))$ sur $(k, (\lambda a_i))$. On a ainsi défini une application de $\mathbb{P}_A^n(k)$ vers $\mathbf{l}$.

Réciproquement, soit $(L, (s_i))$ un objet de $\mathbf{C}$. Choisissons une base de L , c'est-à-dire un isomorphisme $L \simeq k$; pour tout i , notons a_i l'image de s_i sous cette bijection. Comme deux isomorphismes entre L et k «diffèrent» simplement d'une homothétie de rapport inversible, l'élément $[a_0 : \dots : a_n]$ de $\mathbb{P}_A^n(k)$ ne dépend que de $(L, (s_i))$, et même que de la classe d'isomorphie de ce dernier. On a ainsi construit une application de $\mathbf{l}$ vers $\mathbb{P}_A^n(k)$.

On vérifie aussitôt que les deux flèches $\mathbb{P}_A^n(k) \rightarrow \mathbf{l}$ et $\mathbf{l} \rightarrow \mathbb{P}_A^n(k)$ ainsi construites sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

(6.3.10) Pour pouvoir généraliser la description de $\mathbb{P}_A^n(k)$ donnée ci-dessus à un A -schéma quelconque, il va être nécessaire d'introduire un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}$ -module localement libre de rang 1 particulier, qui sera noté $\mathcal{O}(1)$. Nous allons en fait plus généralement définir pour tout $d \in \mathbb{Z}$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}$ -module $\mathcal{O}(d)$.

(6.3.10.1) Soit $d \in \mathbb{Z}$. Rappelons que si U est un ouvert de $\mathbb{P}_A^n$, on note $S^{\text{hom}}(U)$ l'ensemble des polynômes homogènes $f \in A[T_0, \dots, T_n]$ tels que $U \subset D(f)$. La flèche

$$U \mapsto (S^{\text{hom}}(U)^{-1}A[T_0, \dots, T_n])_d$$

est un préfaisceau sur $\mathbb{P}_A^n$, qui est de manière naturelle un module sur le préfaisceau d'anneaux $U \mapsto (S^{\text{hom}}(U)^{-1}A[T_0, \dots, T_n])_0$.

On note $\mathcal{O}(d)$ le faisceau associé à $U \mapsto (S^{\text{hom}}(U)^{-1}A[T_0, \dots, T_n])_d$. C'est de manière naturelle un module sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}(0)$ associé à $(S^{\text{hom}}(U)^{-1}A[T_0, \dots, T_n])_0$, qui n'est autre que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}$ par définition de ce dernier.

(6.3.10.2) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Pour tout ouvert $U \subset U_i = D(T_i)$, l'application $f \mapsto T_i^d f$ induit une bijection de $S^{\text{hom}}(U)^{-1}A[T_0, \dots, T_n]_0$ vers $S^{\text{hom}}(U)^{-1}A[T_0, \dots, T_n]_d$, de réciproque $g \mapsto T_i^{-d}g$.

Il s'ensuit que $f \mapsto T_i^d f$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{U_i} \simeq \mathcal{O}(d)|_{U_i}$, de réciproque $g \mapsto T_i^{-d}g$.

Comme les U_i recouvrent $\mathbb{P}_A^n$, le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}$ -module $\mathcal{O}(d)$ est localement libre de rang 1.

(6.3.10.3) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Il découle de 6.3.10.2 et du fait que

$$\mathcal{O}_{U_i}(U_i) = A\left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{T_i}\right]_0$$

que $\mathcal{O}(d)(U_i)$ s'identifie naturellement à $A\left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{T_i}\right]_d$.

On en déduit que les sections globales de $\mathcal{O}(d)$ sont les éléments de $A[T_0^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]_d$ appartenant à $A[T_0, \dots, T_n, T_i^{-1}]$ pour tout i .

- Supposons que $n = 0$. On voit alors que $\mathcal{O}(d)(\mathbb{P}_A^0) = A[T_0, T_0^{-1}]_d$; autrement dit, $\mathcal{O}(d)(\mathbb{P}_A^0)$ est le A -module libre de base T_0^d . Mais on a en fait dans ce cas un résultat nettement plus fort : en effet, $\mathbb{P}_A^0 = D(T_0)$, si bien que le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^0}$ -module $\mathcal{O}(d)$ est libre de base T_0^d .
- Supposons que $n \geq 1$. Puisque l'intersection de $A[T_0, \dots, T_n, T_0^{-1}]$ et $A[T_0, \dots, T_n, T_1^{-1}]$ est égale à $A[T_0, \dots, T_n]$, le A -module $\mathcal{O}(d)(\mathbb{P}_A^n)$ est égal à $A[T_0, \dots, T_n]_d$.
 - ◊ Supposons $d < 0$. Le A -module $\mathcal{O}(d)(\mathbb{P}_A^n) = A[T_0, \dots, T_n]_d$ est alors nul. Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(\mathbb{P}_A^n) = A$, on voit que si de plus $A \neq \{0\}$ alors $\mathcal{O}(d)$ est non trivial (comme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}$ -module localement libre de rang 1).
 - ◊ Supposons $d \geq 0$. Le A -module $\mathcal{O}(d)(\mathbb{P}_A^n) = A[T_0, \dots, T_n]_d$ est alors libre de rang $r(n, d) := \binom{n+d}{d}$ (faites l'exercice!). Si $d > 0$ on vérifie aussitôt que $r(d, n) > r(0, n) = 1$; il s'ensuit que $\mathcal{O}(d)$ est non trivial dès que $d > 0$ et $A \neq \{0\}$.

(6.3.10.4) Supposons que $d \geq 0$ et soit $f \in A[T_0, \dots, T_n]_d$. On peut en vertu de 6.3.10.3 la voir comme un élément de $\mathcal{O}(d)(\mathbb{P}_A^n)$. Soit F le lieu des zéros de f vue comme section globale de $\mathcal{O}(d)$. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. On a vu au 6.3.10.2 que $g \mapsto T_i^{-d}g$ établit un isomorphisme entre $\mathcal{O}(d)|_{U_i}$ et $\mathcal{O}_{U_i}$. Cet isomorphisme envoie f sur la fonction $\frac{f}{T_i^d}$. En conséquence, $F \cap U_i$ est le lieu des zéros de la fonction $\frac{f}{T_i^d}$; autrement dit, $F \cap U_i = V(f) \cap U_i$.

Ceci valant pour tout i , il vient $F = V(f)$. Autrement dit, si décrire $V(f)$ comme le «lieu d'annulation» de f pouvait apparaître un peu abusif dans la mesure où f n'est pas une fonction sur $\mathbb{P}_A^n$ (sauf si $d = 0$ ou $f = 0$), c'est en fait parfaitement légitime à condition toutefois de considérer f comme section de $\mathcal{O}(d)$.

Soit $g \in A[T_0, \dots, T_n]_d$. Le quotient $\frac{f}{g}$ est une fonction bien définie sur l'ouvert affine $D(g)$. Comme on a évidemment $f = \frac{f}{g} \cdot g$ dans le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(D(g))$ -module $\mathcal{O}(d)(D(g))$, on voit que $\frac{f}{g}$ est bien le quotient des sections f et g de $\mathcal{O}(d)$, au sens de 3.4.6.3.

Nous utiliserons ces faits implicitement dans toute la suite du texte.

(6.3.10.5) Soient d_1 et d_2 deux entiers relatifs. Pour tout ouvert U de $\mathbb{P}_A^n$, le produit définit une application bilinéaire de

$$S^{\text{hom}}(U)^{-1}A[T_0, \dots, T_n]_{d_1} \times S^{\text{hom}}(U)^{-1}A[T_0, \dots, T_n]_{d_2}$$

vers $S^{\text{hom}}(U)^{-1}A[T_0, \dots, T_n]_{d_1+d_2}$, d'où par passage au produit tensoriel et faisceautisation un morphisme

$$\mathcal{O}(d_1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}} \mathcal{O}(d_2) \rightarrow \mathcal{O}(d_1 + d_2).$$

Nous allons montrer qu'il s'agit d'un *isomorphisme*. Pour cela, il suffit de raisonner localement; on peut donc fixer $i \in \{0, \dots, n\}$ et établir l'assertion requise sur la carte U_i . On déduit de 6.3.10.2 que $T_i^{d_1}$ (resp. $T_i^{d_2}$) est une section inversible de $\mathcal{O}(d_1)|_{U_i}$ (resp. de $\mathcal{O}(d_2)|_{U_i}$). En conséquence, $T_i^{d_1} \otimes T_i^{d_2}$ est une section inversible de $(\mathcal{O}(d_1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}} \mathcal{O}(d_2))|_{U_i}$.

Le morphisme ci-dessus envoie $T_i^{d_1} \otimes T_i^{d_2}$ sur $T_i^{d_1+d_2}$ qui est elle-même d'après *loc. cit.* une section inversible de $\mathcal{O}(d_1 + d_2)|_{U_i}$. L'assertion requise s'ensuit aussitôt.

(6.3.10.6) Si $d \in \mathbb{Z}$ on dispose par ce qui précède d'un isomorphisme naturel

$$\mathcal{O}(d) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}} \mathcal{O}(-d) \simeq \mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}$$

qui permet d'identifier $\mathcal{O}(-d)$ à $\mathcal{O}(d)^\vee$.

Description complète du foncteur des points $\mathbb{P}_A^n$

(6.3.11) Soit S un schéma. On note $\mathbf{L}_S$ la catégorie définie comme suit. Ses objets sont les familles $(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n)$ où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang 1 et où les s_i sont des sections globales de $\mathcal{L}$ telles que $S = \bigcup D(s_i)$. Si $(\mathcal{L}, (s_i))$ et $(\mathcal{L}', (s'_i))$ sont deux objets de $\mathbf{L}_S$, un morphisme de $(\mathcal{L}, (s_i))$ vers $(\mathcal{L}', (s'_i))$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}'$ qui envoie s_i sur s'_i pour tout i (ainsi, tout morphisme de $\mathbf{L}_S$ est un isomorphisme).

(6.3.11.1) Si k est un corps, la catégorie $\mathbf{L}_{\text{Spec } k}$ s'identifie à la catégorie $\mathbf{C}$ définie au 6.3.9.2.

(6.3.11.2) Comme $\mathbb{P}_A^n = \bigcup D(T_i)$, la famille $(\mathcal{O}(1), (T_i))$ est un objet de $\mathbf{L}_{\mathbb{P}_A^n}$.

(6.3.11.3) Soit $\Psi: S' \rightarrow S$ un morphisme de schémas et soit $(\mathcal{L}, (s_i))$ un objet de $\mathbf{L}_S$. Il est immédiat que $(\Psi^*\mathcal{L}, (\Psi^*s_i))$ est un objet de $\mathbf{L}_{S'}$.

(6.3.12) Soit S un A -schéma et soit $(\mathcal{L}, (s_i))$ un objet de $\mathbf{L}_S$. Nous allons lui associer un A -morphisme de S vers $\mathbb{P}_A^n$.

Soit U un ouvert de S . Supposons qu'il existe un indice i tel que $s_i|_U$ soit inversible. Comme la fonction s_i/s_i est égale à 1 (et est en particulier inversible), la famille $(s_j/s_i)_{0 \leq j \leq n}$ de fonctions sur U donne lieu à un A -morphisme

$$[s_0/s_i : \dots : s_n/s_i]$$

de U vers $\mathbb{P}_A^n$, et même vers U_i .

Si j est un autre indice tel que s_j soit inversible sur U , on a pour tout ℓ l'égalité $s_\ell/s_i = (s_j/s_i)s_\ell/s_j$, et les deux morphismes

$$[s_0/s_i : \dots : s_n/s_i] \text{ et } [s_0/s_j : \dots : s_n/s_j]$$

de U vers $\mathbb{P}_A^n$ coïncident donc. On a ainsi construit un A -morphisme $\chi_U: U \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ qui ne dépend d'aucun choix. Il est immédiat que si V est un ouvert de U alors $\chi_V = \chi_U|_V$.

Comme $S = \bigcup D(s_i)$, les ouverts U de S sur lequel l'une au moins des s_i est inversible recouvrent S . Lorsque U parcourt l'ensemble desdits ouverts, les morphismes χ_U se recollent en un A -morphisme $\chi: S \rightarrow \mathbb{P}_A^n$. Il est immédiat que ce morphisme ne dépend que de la classe d'isomorphie de $(\mathcal{L}, (s_i))$ (un isomorphisme entre deux objets de $\mathbf{L}_S$ préservant les quotients des sections concernées).

Il résulte de la définition de χ ainsi que de 6.3.4.2 que pour tout (i, j) , l'ouvert $\chi|_{D(s_j)}^{-1}(U_i)$ de $D(s_j)$ est égal à $D(s_i/s_j)$, c'est-à-dire à $D(s_i) \cap D(s_j)$. En fixant i et faisant varier j , il vient $\chi^{-1}(U_i) = D(s_i)$.

Comme $\chi|_{D(s_i)} = [s_0/s_i : \dots : s_n/s_i]$ et comme $s_i/s_i = 1$, on déduit de 6.3.4.3 (C) que $(\chi|_{D(s_i)})^*(T_j/T_i) = s_j/s_i$ pour tout j .

Le morphisme χ sera noté $[s_0 : \dots : s_n]$.

(6.3.13) Remarque. Soit S un A -schéma et soient $(f_0, \dots, f_n)$ des fonctions sur S telles que $S = \bigcup D(f_i)$. La famille $(\mathcal{O}_S, (f_i))$ est alors un objet de $\mathbf{L}_S$, et il est immédiat que le A -morphisme $[f_0 : \dots : f_n]$ défini ci-dessus coïncide avec celui que nous notions $[f_0 : \dots : f_n]$ jusqu'à présent. Il n'y a donc pas de conflits de notations.

(6.3.14) Nous sommes maintenant en mesure de donner une description précise du foncteur $S \mapsto \mathbb{P}_A^n(S)$ qui généralisera ce qui a été fait au 6.3.9.2.

(6.3.15) Théorème. Soit S un A -schéma. Les flèches

$$\chi \mapsto (\chi^*\mathcal{O}(1), (\chi^*T_i))$$

et

$$(\mathcal{L}, (s_i)) \mapsto [s_0 : \dots : s_n]$$

établissent une bijection fonctorielle en S entre $\mathbb{P}_A^n(S)$ et l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\mathbf{L}_S$.

Démonstration. Les flèches de l'énoncé constituent clairement deux applications fonctorielles en S . Il reste à s'assurer qu'elles sont réciproques l'une de l'autre.

(6.3.15.1) Soit χ un A -morphisme de S vers $\mathbb{P}_A^n$. Nous allons montrer que le morphisme $[\chi^*T_0, \dots, \chi^*T_n]$ coïncide avec χ . C'est une propriété qu'il suffit de vérifier localement; nous allons dès lors nous assurer qu'elle est vraie sur l'ouvert $S_i = \chi^{-1}(U_i) = D(\chi^*T_i)$ pour tout i , ce qui permettra de conclure.

Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Par définition, la restriction de $[\chi^*T_0, \dots, \chi^*T_n]$ à S_i est l'élément $[\chi^*T_0/\chi^*T_i : \dots : \chi^*T_n/\chi^*T_i]$ de $U_i(S_i)$, qui se réécrit $[\chi^*(T_j/T_i)]_j$ et coïncide donc comme annoncé avec $\chi|_{S_i}$ (6.3.4.3 (A)).

(6.3.15.2) Soit $(\mathcal{L}, (s_i))$ un objet de $\mathbf{L}_S$. Posons

$$\chi = [s_0 : \dots : s_n].$$

Nous allons montrer que $(\chi^*\mathcal{O}(1), (\chi^*T_i))$ est isomorphe à $(\mathcal{L}, (s_i))$.

Fixons i . On sait que $\chi^{-1}(U_i) = D(s_i)$ (6.3.12). Sur cet ouvert, s_i est une section inversible de $\mathcal{L}$, et χ^*T_i est une section inversible de $\mathcal{O}(1)$. Il existe donc un unique isomorphisme $\ell_i : \mathcal{L}|_{U_i} \simeq \chi^*\mathcal{O}(1)|_{U_i}$ qui envoie s_i sur χ^*T_i . Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. On a les égalités suivantes dans $\chi^*\mathcal{O}(1)(S_i)$:

$$\ell_i(s_j) = \ell_i((s_j/s_i)s_i) = (s_j/s_i)\ell_i(s_i) = (s_j/s_i)\chi^*T_i = \chi^*(T_j/T_i)\chi^*T_i = \chi^*T_j$$

(pour l'avant dernière égalité, cf. 6.3.12).

On voit en particulier que $\ell_i|_{D(s_i) \cap D(s_j)}$ est l'unique isomorphisme de $\mathcal{L}|_{D(s_i) \cap D(s_j)}$ sur $\chi^*\mathcal{O}(1)|_{D(s_i) \cap D(s_j)}$ qui envoie s_j sur χ^*T_j ; il coïncide donc nécessairement avec $\ell_j|_{D(s_i) \cap D(s_j)}$.

On en déduit que les isomorphismes ℓ_i se recollent en un isomorphisme $\ell : \mathcal{L} \rightarrow \chi^*\mathcal{O}(1)$. On a vu au cours de la preuve que l'égalité $\ell(s_j) = \chi^*T_j$ valait pour tout j sur chacun des U_i . Deux sections d'un faisceau qui sont localement égales le sont globalement, et l'on a donc $\ell(s_j) = \chi^*T_j$ pour tout j , ce qui achève la démonstration. $\square$

(6.3.16) Commentaires. Soit S un A -schéma.

(6.3.16.1) Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang 1, et soient $(s_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ deux familles de sections globales de $\mathcal{L}$ telles que

$$S = \bigcup D(s_i) = \bigcup D(t_i).$$

Ces familles définissent deux morphismes $[s_0 : \dots : s_n]$ et $[t_0 : \dots : t_n]$ de S vers $\mathbb{P}_A^n$.

En vertu du théorème 6.3.15, ces deux morphismes coïncident si et seulement si il existe un automorphisme ℓ de $\mathcal{L}$ envoyant s_i sur t_i pour tout i . Mais les automorphismes de $\mathcal{L}$ sont précisément les homothéties de rapport inversible; en conséquence,

$$[s_0 : \dots : s_n] = [t_0 : \dots : t_n]$$

si et seulement si il existe $\lambda \in \mathcal{O}_S(S)^\times$ tel que $t_i = \lambda s_i$ pour tout i : on généralise ainsi 6.3.4.4 au cas des morphismes définis par une famille de sections de *n'importe quel* $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang 1 (cf. remarque 6.3.13)

(6.3.16.2) Les faits suivants se déduisent du théorème 6.3.15 et de la remarque 6.3.13 :

- si $(\mathcal{L}, (s_i))$ est un objet de $\mathbf{L}_S$, le morphisme $[s_0 : \dots : s_n]$ appartient à $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(S)$ si et seulement si $\mathcal{L}$ est trivial ;
- si $\chi: S \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ est un A -morphisme, il appartient à $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(S)$ si et seulement si $\chi^*\mathcal{O}(1)$ est trivial.

On peut ainsi donner un autre éclairage sur le contre-exemple 6.3.5.2 : on a évidemment $\text{Id}_{\mathbb{P}_A^n}^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)$, et l'on a signalé au 6.3.10.3 que $\mathcal{O}(1)$ n'est pas trivial dès que $A \neq \{0\}$ et $n \geq 1$.

(6.3.16.3) Il résulte de 6.3.16.2 que pour que $\mathbb{P}_A^n(S) = \mathbb{P}_A^{n,\sharp}(S)$, il suffit que tout $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang 1 soit trivial. Citons trois cas dans lesquels cette dernière propriété est satisfaite (le premier est un cas particulier du second ; nous avons déjà démontré directement dans ces deux cas l'égalité $\mathbb{P}_A^n(S) = \mathbb{P}_A^{n,\sharp}(S)$ en 6.3.6.2 et 6.3.6.4).

- Le cas où S est le spectre d'un corps (c'est évident).
- Le cas où S est le spectre d'un anneau local (c'est dû au lemme 6.3.6.3).
- Le cas où S est le spectre d'un anneau principal (c'est une conséquence de 5.3.12 et du corollaire 2.7.7.2).

On déduit notamment de (c) que $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{n,\sharp}(\mathbb{Z})$.

(6.3.16.4) Remarque. Dans les cas (a) et (b) du 6.3.16.3 ci-dessus, on a d'après 6.3.6.2 et 6.3.6.4 un résultat plus fort que la simple égalité entre $\mathbb{P}_A^n(S)$ et $\mathbb{P}_A^{n,\sharp}(S)$: on sait qu'on a en effet alors plus précisément $\mathbb{P}_A^n(S) = \bigcup_i U_i(S)$, et donc que pour tout $(f_0, \dots, f_n) \in \mathcal{O}_S(S)^{\{0, \dots, n\}}$ on a $S = \bigcup D(f_i)$ si et seulement si l'une des f_i est inversible sur S .

Cela ne vaut pas en général dans le cas (c) : par exemple $\text{Spec } \mathbb{Z}$ est la réunion de $D(2)$ et $D(3)$ mais ni 2 ni 3 ne sont inversibles sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

(6.3.17) Functorialité des différentes constructions. Dans tout ce chapitre, nous avons fixé un anneau de base A , et la plupart du temps nous avons omis de le mentionner explicitement dans les notations (excepté pour $\mathbb{P}_A^n$). En toute rigueur, nous aurions dû parler de l'ouvert V_A de $\mathbb{A}_A^{n+1}$, du morphisme $\Psi_A: V_A \rightarrow \mathbb{P}_A^n$, et des faisceaux $\mathcal{O}(d)_A$. Adoptons pour un instant ces conventions, plus précises (mais également un peu plus lourdes). Soit B une A -algèbre. On vérifie alors sans peine (nous vous laissons le faire en exercice) que toutes nos constructions se comportent bien par extension des scalaires de A à B . Plus précisément :

- $\Psi_B: V_B \rightarrow \mathbb{P}_B^n$ se déduit de $V_A \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ par produit fibré avec $\text{Spec } B$ au-dessus de $\text{Spec } A$;
- le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_B^n}$ -module $\mathcal{O}(1)_B$ s'identifie à $\pi^*\mathcal{O}(1)_A$ où π est le morphisme canonique $\mathbb{P}_B^n \rightarrow \mathbb{P}_A^n$;
- si S est un A -schéma, si $(\mathcal{L}, (s_i))$ est un objet de $\mathbf{L}_S$, et si p désigne le morphisme canonique de $S_B := S \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } B$ vers S alors le morphisme

$$[p^*s_0 : \dots : p^*s_n]: S_B \rightarrow \mathbb{P}_B^n$$

se déduit de $[s_0 : \dots : s_n]$ par produit fibré avec $\text{Spec } B$ au-dessus de $\text{Spec } A$.

6.4 Quelques exemples de morphismes en géométrie projective

(6.4.1) Jusqu'à maintenant, nous avons vu une seule méthode de construction de morphismes en géométrie projective, consistant à exploiter la fonctorialité (partielle) du schéma $\text{Proj } B$ en l'anneau gradué B (6.1.14 et sq.). Le moins qu'on puisse dire est qu'elle n'est pas particulièrement engageante, et le but de cette section est d'en proposer d'autres, fondées sur la description explicite du foncteur des points de l'espace projectif (th. 6.3.15).

Nous observerons à cette occasion une nouvelle manifestation de la philosophie dégagée à la section 5.6. En effet, comme nous le verrons, cette approche fonctorielle permettra peu ou prou de retrouver le point de vue naïf ou ensembliste sur la géométrie projective, selon lequel les sous-variétés sont les lieux des zéros de systèmes d'équations polynomiales homogènes, et les morphismes des applications définies par des formules polynomiales homogènes ; à une petite subtilité près toutefois : il faudra considérer les polynômes homogènes en un sens « tensoriel » et non « multiplicatif » – pour la signification précise de cette remarque, cf. 6.4.2.2 *infra*.

(6.4.2) **Quelques notations.** On fixe pour toute la suite de la section un anneau A .

(6.4.2.1) Si S est un schéma et n un entier, nous noterons $\mathbf{L}_S^n$ la catégorie que nous avons simplement notée $\mathbf{L}_S$ au 6.3.11 (l'entier n était alors fixé une fois pour toutes ; ce ne sera pas le cas dans cette section, et il est donc préférable de le faire figurer explicitement dans les notations). Nous désignerons par $|\mathbf{L}_S^n|$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\mathbf{L}_S^n$. Si n et m sont deux entiers, tout morphisme de foncteurs de $\mathbf{L}_S^n$ vers $\mathbf{L}_S^m$ induit une application de $|\mathbf{L}_S^n|$ vers $|\mathbf{L}_S^m|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout A -schéma S , le théorème 6.3.15 fournit une bijection

$$\mathbb{P}_A^n(S) \simeq |\mathbf{L}_S^n|$$

fonctorielle en S .

(6.4.2.2) *Interprétation tensorielle d'un polynôme homogène.* Soient n et d deux entiers et soit P un polynôme homogène de degré d appartenant à $A[T_0, \dots, T_n]$. Écrivons $P = \sum_{(e_i)} a_{(e_i)} \prod_i T_i^{e_i}$, où (e_i) parcourt la famille des $(n+1)$ -uplets d'entiers de somme égale à d , et où les $a_{(e_i)}$ sont des scalaires (évidemment presque tous nuls).

Soit S un A -schéma, soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang 1 et soit $(s_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de sections globales de $\mathcal{L}$. On pose alors

$$P(s_0, \dots, s_n) = \sum_{(e_i)} a_{(e_i)} \bigotimes_i s_i^{\otimes e_i} \in \mathcal{L}^{\otimes d}(S).$$

(6.4.2.3) *Remarque.* Si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ alors $\mathcal{L}^{\otimes d}$ s'identifie à $\mathcal{O}_X$ via la multiplication des fonctions, et que modulo cette identification $P(s_0, \dots, s_n)$ a son sens habituel.

(6.4.2.4) Remarque. La notation $P(s_0, \dots, s_n)$ recèle une très légère ambiguïté : lorsque P est nul, il est homogène de tout degré, et $P(s_0, \dots, s_n)$ peut donc *a priori* désigner la section nulle de $\mathcal{L}^{\otimes \delta}$ pour tout $\delta \geq 0$. En pratique cela ne posera aucun problème, car nous prendrons toujours soin de fixer préalablement le degré (comme nous l'avons fait ci-dessus).

Immersiones ouvertes et fermées

(6.4.3) Immersiones ouvertes. Soit n un entier et soit (g_ℓ) une famille de polynômes de $A[T_0, \dots, T_n]$, chaque g_ℓ étant homogène d'un certain degré d_ℓ . Soit Ω l'ouvert $\bigcup D(g_\ell)$ de $\mathbb{P}_A^n$ et soit S un A -schéma.

L'ensemble $\Omega(S)$ est de manière naturelle un sous-ensemble de $\mathbb{P}_A^n(S)$, à savoir celui des morphismes qui se factorisent ensemblistement par Ω . Modulo l'identification canonique de $\mathbb{P}_A^n(S)$ à $|\mathbb{L}_S^n|$, l'ensemble $\Omega(S)$ apparaît dès lors comme un sous-ensemble de $|\mathbb{L}_S^n|$. Nous allons en donner une description, aussi proche que possible de l'intuition ensembliste qui fait de Ω le lieu d'inversibilité des g_ℓ .

(6.4.3.1) Soit $(\mathcal{L}, (s_i))$ un objet de $\mathbb{L}_S^n$. Pour alléger les notations, nous désignerons par χ le A -morphisme

$$[s_0 : \dots : s_n] : S \rightarrow \mathbb{P}_A^n.$$

D'après le théorème 6.3.15, $(\mathcal{L}, (s_i))$ est isomorphe à $(\chi^* \mathcal{O}(1), (\chi^* T_i))$. Il vient

$$\bigcup D(g_\ell(s_0, \dots, s_n)) = \bigcup D(g_\ell(\chi^* T_0, \dots, \chi^* T_n)) = \chi^{-1}(\Omega).$$

On en déduit que $\chi \in \Omega(S)$ si et seulement si $S = \bigcup D(g_\ell(s_0, \dots, s_n))$.

(6.4.3.2) Il résulte de 6.4.3.1 que le sous-ensemble $\Omega(S)$ de $|\mathbb{L}_S^n|$ est constitué des classes d'objets $(\mathcal{L}, (s_i))$ tels que $S = \bigcup D(g_\ell(s_0, \dots, s_n))$.

(6.4.4) Immersiones fermées. Soit n un entier et soit I un idéal homogène de $A[T_0, \dots, T_n]$. Donnons-nous une famille génératrice (g_ℓ) de I , où chaque g_ℓ est homogène d'un certain degré d_ℓ . Soit Z le sous-schéma fermé $\text{Proj } A[T_0, \dots, T_n]/I$ de $\mathbb{P}_A^n$.

(6.4.4.1) Soit S un A -schéma. L'ensemble $Z(S)$ est de manière naturelle un sous-ensemble de $\mathbb{P}_A^n(S)$, à savoir celui des morphismes ψ qui se factorisent par Z , c'est-à-dire encore qui sont tels que $\psi^* a = 0$ pour toute section a du faisceau quasi-cohérent d'idéaux définissant Z .

Modulo l'identification canonique de $\mathbb{P}_A^n(S)$ à $|\mathbb{L}_S^n|$, l'ensemble $Z(S)$ apparaît dès lors comme un sous-ensemble de $|\mathbb{L}_S^n|$. Le but du lemme qui suit est d'en donner une description, aussi proche que possible de l'intuition ensembliste qui fait de Z le lieu des zéros des g_ℓ .

(6.4.4.2) Lemme. *Le sous-ensemble $Z(S)$ de $|\mathbb{L}_S^n|$ est constitué des classes d'objets $(\mathcal{L}, (s_i))$ tels que $g_\ell(s_0, \dots, s_n) = 0$ pour tout ℓ .*

Démonstration. Soit $\psi : S \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ un morphisme. L'élément de $|\mathbb{L}_S^n|$ auquel il correspond est la classe de $(\psi^* \mathcal{O}(1), (\psi^* T_i))$. Pour tout entier i entre 0 et n ,

posons $s_i = \psi^* T_i$, $U_i = D(T_i)$ et $S_i = \psi^{-1}(U_i) = D(s_i)$. Le morphisme ψ se factorise par Z si et seulement si $\psi|_{S_i}: S_i \rightarrow U_i$ se factorise par $Z_i := Z \times_{\mathbb{P}_A^n} U_i$ pour tout i .

Fixons i . Le sous-schéma fermé Z_i de U_i est défini par l'idéal I_i de $A \left[\frac{T_j}{T_i} \right]_{j \neq i}$ engendré par les $\frac{g_\ell}{T_i^{d_\ell}}$. En conséquence, $\psi|_{S_i}$ se factorise par Z_i si et seulement si $\psi^* \frac{g_\ell}{T_i^{d_\ell}} = 0$ pour tout ℓ . Or l'élément $\psi^* \frac{g_\ell}{T_i^{d_\ell}}$ de $\mathcal{O}_{S_i}(S_i)$ est égal pour tout ℓ à $g_\ell(s_0, \dots, s_n) / (s_i^{\otimes d_\ell})$, et il est donc nul si et seulement si $g_\ell(s_0, \dots, s_n)|_{S_i} = 0$.

En conséquence, ψ se factorise par Z si et seulement si on a pour tout ℓ et tout i l'égalité $g_\ell(s_0, \dots, s_n)|_{S_i} = 0$, ce qui revient à demander que $g_\ell(s_0, \dots, s_n) = 0$ pour tout ℓ . $\square$

(6.4.5) Morphisme donné par une famille de polynômes homogènes.

Soient n, m et d trois entiers, avec $d > 0$. Soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille de polynômes homogènes de degré d en les variables $(S_0, \dots, S_m)$.

(6.4.5.1) Soit φ l'unique morphisme de A -algèbres de $A[T_0, \dots, T_n]$ dans $A[S_0, \dots, S_m]$ qui envoie T_i sur P_i pour tout i . Il est homogène de degré d , et induit donc en vertu de 6.1.14 et sq. un morphisme de A -schémas $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ où Ω est l'ouvert $\bigcup D(P_i)$ de $\mathbb{P}_A^m$.

Supposons donné un entier a (en pratique, on aura $a = 1$ ou $a = d$). Pour éviter toute confusion dans ce qui suit, nous désignerons par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(a)$ le faisceau $\mathcal{O}(a)$ du schéma $\mathbb{P}_A^n$, et par $\mathcal{O}_\Omega(a)$ la restriction à Ω du faisceau $\mathcal{O}(a)$ du schéma $\mathbb{P}_A^m$.

(6.4.5.2) Il résulte des définitions que $(\mathcal{O}_\Omega(d), P_i)$ est un objet de $\mathbf{L}_\Omega^n$, et il définit donc un morphisme de A -schémas $[P_0 : \dots : P_n]: \Omega \rightarrow \mathbb{P}_A^n$.

(6.4.5.3) Lemme. *Les morphismes ψ et $[P_0 : \dots : P_n]$ de Ω vers $\mathbb{P}_A^n$ sont égaux.*

Démonstration. Pour alléger les notations, posons $\chi = [P_0 : \dots : P_n]$. Pour tout i , on note U_i l'ouvert $D(T_i)$ de $\mathbb{P}_A^n$. Il résulte de 6.1.14.1 et 6.3.4.2 que l'on a pour tout i l'égalité $\psi^{-1}(U_i) = \chi^{-1}(U_i) = D(P_i)$. Il suffit pour conclure de montrer que pour tout i , les morphismes de $D(P_i)$ vers U_i induits par ψ et χ coïncident.

Soit donc $i \in \{0, \dots, n\}$. Pour montrer que $\psi|_{D(P_i)}: D(P_i) \rightarrow U_i$ et $\chi|_{D(P_i)}: D(P_i) \rightarrow U_i$ coïncident, il suffit de s'assurer que $\chi^*(T_j/T_i) = \psi^*(T_j/T_i)$ pour tout $j \neq i$ (6.3.4.3). Or pour tout $j \neq i$ on a $\chi^*(T_j/T_i) = P_j/P_i$ d'après 6.3.4.3, et $\psi^*(T_j/T_i) = P_j/P_i$ d'après 6.1.14.2. $\square$

(6.4.5.4) Le morphisme $[P_0 : \dots : P_n]$ induit par ailleurs un morphisme de foncteurs Θ de $S \mapsto \Omega(S)$ vers $S \mapsto \mathbb{P}_A^n(S)$, qui le caractérise en vertu du lemme de Yoneda; le but de ce qui suit est de décrire Θ . Pour alléger les notations, posons $\psi = [P_0 : \dots : P_n]$.

Soit S un A -schéma. L'ensemble $\mathbb{P}_A^n(S)$ s'identifie à $|\mathbf{L}_S^n|$, et il résulte de 6.4.3.2 que $\Omega(S)$ s'identifie au sous-ensemble de $|\mathbf{L}_S^m|$ constitué des classes d'objets $(\mathcal{L}, (s_i))$ tels que $S = \bigcup D(P_i(s_0, \dots, s_m))$.

Soit $(\mathcal{L}, (s_i))$ un tel objet et soit $\chi: S \rightarrow \Omega$ le morphisme induit. L'image de χ dans $\mathbb{P}_A^n(S)$ est égale à $\psi \circ \chi$. Les faits suivants résultent des définitions et de 6.3.10.5.

- Il existe un isomorphisme $\chi^* \mathcal{O}_\Omega(1) \simeq \mathcal{L}$ qui envoie $\chi^* S_j$ sur s_j pour tout j .
- Il existe un isomorphisme $\psi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1) \simeq \mathcal{O}_\Omega(d)$ qui envoie $\psi^* T_i$ sur P_i pour tout i .
- Il existe un isomorphisme $\mathcal{O}_\Omega(d) \simeq \mathcal{O}_\Omega(1)^{\otimes d}$ qui envoie tout monôme de degré d en les S_j sur le monôme tensoriel correspondant.

Par conséquent, il existe un isomorphisme de $(\psi \circ \chi)^* \mathcal{O}(1)$ sur $\mathcal{L}^{\otimes d}$ qui envoie $(\psi \circ \chi)^* T_i$ sur $P_i(s_0, \dots, s_m)$ pour tout i .

Il s'ensuit que Θ envoie la classe de $(\mathcal{L}, (s_i))$ sur celle de $(\mathcal{L}^{\otimes d}, (P_i(s_0, \dots, s_m)))$.

Un plongement de $\mathbb{P}_A^1$ dans $\mathbb{P}_A^2$

(6.4.6) Le but de ce qui suit est de construire dans le cadre schématique un morphisme ψ de $\mathbb{P}_A^1$ dans $\mathbb{P}_A^2$ identifiant $\mathbb{P}_A^1$ à une «conique» de $\mathbb{P}_A^2$. On peut le définir de deux manières.

(6.4.6.1) *Première définition.* Le schéma $\mathbb{P}_A^1 = \text{Proj } A[S_0, S_1]$ est la réunion de $D(S_0) = D(S_0^2)$ et $D(S_1) = D(S_1^2)$; il est *a fortiori* réunion de $D(S_0^2), D(S_0 S_1)$ et $D(S_1^2)$, d'où un morphisme

$$\psi := [S_0^2 : S_0 S_1 : S_1^2]: \mathbb{P}_A^1 \rightarrow \mathbb{P}_A^2$$

(cf. 6.4.5.2).

(6.4.6.2) *Seconde définition, via les foncteurs de points.* Soit S un A -schéma, et soit $(\mathcal{L}, (s_0, s_1))$ un objet de $\mathcal{L}_S^1$. On vérifie sans difficulté que

$$\Phi_S(\mathcal{L}, (s_0, s_1)) := (\mathcal{L}^{\otimes 2}, (s_0^{\otimes 2}, s_0 \otimes s_1, s_1^{\otimes 2}))$$

est un objet de $\mathcal{L}_S^2$, dont la classe d'isomorphie ne dépend que de celle de $(\mathcal{L}, (s_0, s_1))$. On a ainsi défini une application encore notée Φ_S , fonctorielle en S , de $|\mathcal{L}_S^1|$ vers $|\mathcal{L}_S^2|$, et partant un morphisme $\psi: \mathbb{P}_A^1 \rightarrow \mathbb{P}_A^2$.

(6.4.6.3) Que les deux définitions 6.4.6.1 et 6.4.6.2 ci-dessus décrivent le même morphisme résulte de 6.4.5.4. En pratique, c'est la seconde que nous allons utiliser.

(6.4.7) Proposition. *Le morphisme ψ est une immersion fermée. Plus précisément, il induit un isomorphisme*

$$\mathbb{P}_A^1 \simeq \text{Proj } A[T_0, T_1, T_2]/(T_0 T_2 - T_1^2) \hookrightarrow \mathbb{P}_A^2.$$

Démonstration. Soit S un A -schéma, et soit D_S le sous-ensemble de $|\mathcal{L}_S^2|$ formé des classes d'objets $(\mathcal{M}, (t_0, t_1, t_2))$ tels que $t_0 \otimes t_2 = t_1^{\otimes 2}$. En vertu du lemme 6.4.4.2, il suffit de démontrer que l'application $\Phi_S: |\mathcal{L}_S^1| \rightarrow |\mathcal{L}_S^2|$ induit une bijection $|\mathcal{L}_S^1| \simeq D_S$. Il est immédiat que $\Phi_S(|\mathcal{L}_S^1|) \subset D_S$.

(6.4.7.1) Nous allons exhiber la bijection réciproque de $\Phi_S: |\mathbb{L}_S^1| \rightarrow D_S$ au moyen de formules explicites. Pour expliquer d'où elles viennent, supposons un instant que S est le spectre d'un corps k . On sait que $\mathbb{P}_A^1(k) = \mathbb{P}_A^{1,\sharp}(k)$ et $\mathbb{P}_A^2(k) = \mathbb{P}_A^{2,\sharp}(k)$ (6.3.6.2, 6.3.16.3). Il résulte par ailleurs de la remarque 6.4.2.3 que l'application Φ_k est donnée par la formule $[s_0 : s_1] \mapsto [s_0^2 : s_0 s_1 : s_1^2]$ et que D_k est l'ensemble des points $[t_0 : t_1 : t_2] \in \mathbb{P}_A^2(k)$ tels que $t_1^2 = t_0 t_2$.

Soit $[s_0 : s_1] \in \mathbb{P}_A^1(k)$. Si s_0 est non nul alors $[s_0 : s_1] = [s_0^2 : s_0 s_1 : s_1^2]$; si s_1 est non nul alors $[s_0 : s_1] = [s_0 s_1 : s_1^2]$.

Soit maintenant $[t_0 : t_1 : t_2] \in \mathbb{P}_A^2(k)$ tel que $t_0 t_2 = t_1^2$. On cherche à montrer qu'il existe un unique point $[s_0 : s_1] \in \mathbb{P}_A^1(k)$ tel que $[t_0 : t_1 : t_2] = [s_0^2 : s_0 s_1 : s_1^2]$. Par ce qui précède, si un tel point existe on a *nécessairement* ou bien $t_0 \neq 0$ et $[s_0 : s_1] = [t_0 : t_1]$ ou bien $[t_2 \neq 0]$ et $[s_0 : s_1] = [t_1 : t_2]$.

Montrons que ces formules conviennent effectivement. L'égalité $t_0 t_2 = t_1^2$ garantit que $t_0 \neq 0$ ou $t_2 \neq 0$; elle assure également que si ces deux conditions sont satisfaites, on a $[t_0 : t_1] = [t_1 : t_2] \in \mathbb{P}_A^1(k)$. Il est donc licite de définir un point $[s_0 : s_1] \in \mathbb{P}_A^1(k)$ par les conditions $[s_0 : s_1] = [t_0 : t_1]$ si $t_0 \neq 0$ et $[s_0 : s_1] = [t_1 : t_2]$ si $t_2 \neq 0$.

On a alors

$$[s_0^2 : s_0 s_1 : s_1^2] = [t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2] = [t_0^2 : t_0 t_1 : t_0 t_2] = [t_0 : t_1 : t_2]$$

dans le premier cas et

$$[s_0^2 : s_0 s_1 : s_1^2] = [t_1^2 : t_1 t_2 : t_2^2] = [t_0 t_2 : t_1 t_2 : t_2^2] = [t_0 : t_1 : t_2]$$

dans le second. On a bien ainsi démontré que Φ_k induit une bijection $\mathbb{P}_A^1(k) \simeq D_k$ et décrit sa réciproque par des formules explicites.

(6.4.7.2) On ne fait plus d'hypothèse sur S . Nous allons nous inspirer de ce qui précède pour définir la bijection réciproque de $\Phi_S: |\mathbb{L}_S^1| \rightarrow D_S$. Nous devons évidemment remplacer les formules polynomiales par leurs déclinaisons tensorielles; quant à la distinction entre les cas $t_0 \neq 0$ et $t_2 \neq 0$, on la retrouvera sous une forme un peu camouflée, derrière le recours à la construction d'un faisceau localement libre de rang 1 au moyen d'un cocycle (3.4.8 *et sq.*).

Soit donc $(\mathcal{M}, (t_0, t_1, t_2))$ un objet de $\mathbb{L}_S^2$ tel que $t_0 \otimes t_2 = t_1^{\otimes 2}$. Cette égalité assure que si t_0 et t_2 s'annulent en un point de S , il en va de même de t_1 , ce qui est absurde. En conséquence, la réunion de $S_0 := D(t_0)$ et $S_2 := D(t_2)$ est égale à S . Soit (f_{ij}) le cocycle subordonné au recouvrement de S par S_0 et S_2 , défini par la formule $f_{02} = t_1/t_0$ (remarquons : que t_1/t_0 appartient bien à $\mathcal{O}_S(S_0 \cap S_2)^\times$ car $t_1^{\otimes 2} = t_0 \otimes t_2$; et que les autres f_{ij} s'obtiennent grâce aux relations de cocycle).

Soit $\mathcal{L}$ le $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang 1 obtenu en tordant $\mathcal{M}$ par le cocycle (f_{ij}) (3.4.9.3). Rappelons brièvement ce que cela signifie. Les restrictions $\mathcal{L}|_{S_0}$ et $\mathcal{L}|_{S_2}$ s'identifient respectivement à $\mathcal{M}|_{S_0}$ et $\mathcal{M}|_{S_2}$, mais la condition de coïncidence de deux sections sur $S_0 \cap S_2$ est tordue : si l'on se donne un ouvert U_0 de S_0 et une section $a_0 \in \mathcal{M}(U_0) = \mathcal{L}(U_0)$, ainsi qu'un ouvert U_2 de S_2 et une section a_2 de $\mathcal{M}(U_2) = \mathcal{L}(U_2)$, les sections a_0 et a_2 du faisceau $\mathcal{L}$ coïncident sur $U_0 \cap U_2$ si et seulement si $a_2 = f_{02} a_0 = (t_1/t_0) a_0$ dans $\mathcal{M}(U_0 \cap U_2)$.

On prendra garde que lorsqu'on travaille sur un ouvert $V \subset S_0 \cap S_2$, il y a deux manières différentes d'identifier $\mathcal{L}|_V$ à $\mathcal{M}|_V$, selon qu'on voit V comme contenu dans S_0 ou dans S_2 ; il importe, lorsqu'on doit effectuer les calculs, de bien préciser laquelle de ces deux identifications on utilise, et surtout de ne pas les mélanger indûment.

Par définition de $\mathcal{L}$, les sections $t_0|_{S_0}$ et $t_1|_{S_2}$ de $\mathcal{M}$ se recollent en une section globale s_0 de $\mathcal{L}$. Comme $t_0 \otimes t_2 = t_1^{\otimes 2}$, on a dans l'anneau $\mathcal{O}_S(S_0 \cap S_2)$ l'égalité

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_1}{t_0},$$

et les sections $t_1|_{S_0}$ et $t_2|_{S_2}$ de $\mathcal{M}$ se recollent donc en une section globale s_1 de $\mathcal{L}$. Comme la section t_0 de $\mathcal{M}$ ne s'annule pas sur S_0 , la section s_0 de $\mathcal{L}$ ne s'annule pas sur S_0 ; comme la section t_2 de $\mathcal{M}$ ne s'annule pas sur S_2 , la section s_1 de $\mathcal{L}$ ne s'annule pas sur S_2 . En conséquence, $(\mathcal{L}, (s_0, s_1))$ est un objet de $\mathbf{L}_S^1$ que nous noterons $\Theta_S(\mathcal{M}, (t_0, t_1, t_2))$; remarquons qu'on a par construction $s_0 = t_0$ et $s_1 = t_1$ sur S_0 , et $s_0 = t_1$ et $s_1 = t_2$ sur S_2 , et qu'on a donc décalqué les formules de 6.4.7.1.

La classe d'isomorphie de $\Theta_S(\mathcal{M}, (t_0, t_1, t_2))$ ne dépend visiblement que de la classe d'isomorphie de $(\mathcal{M}, (t_0, t_1, t_2))$, et l'on note encore Θ_S l'application de $\mathbf{D}_S$ vers $|\mathbf{L}_S^1|$ induite par ce procédé. Nous allons montrer que $\Theta_S \circ \Phi_S = \text{Id}_{|\mathbf{L}_S^1|}$ et que $\Phi_S \circ \Theta_S = \text{Id}_{\mathbf{D}_S}$, ce qui permettra de conclure.

(6.4.7.3) Montrons que $\Theta_S \circ \Phi_S = \text{Id}_{|\mathbf{L}_S^1|}$. Soit $(\mathcal{L}, (s_0, s_1))$ un objet de $\mathbf{L}_S^1$, et posons $(\mathcal{N}, (\sigma_0, \sigma_1)) = \Theta_S(\mathcal{L}^{\otimes 2}, (s_0^{\otimes 2}, s_0 \otimes s_1, s_1^{\otimes 2}))$. Nous allons prouver que $(\mathcal{L}, (s_0, s_1)) \simeq (\mathcal{N}, (\sigma_0, \sigma_1))$. Les faits suivants résultent de la construction détaillée de Θ_S présentée au 6.4.7.2, en remarquant que $D(s_0^{\otimes 2}) = D(s_0)$ et $D(s_1^{\otimes 2}) = D(s_1)$.

- On dispose d'une identification naturelle $\mathcal{N}|_{D(s_0)} \simeq \mathcal{L}^{\otimes 2}|_{D(s_0)}$ modulo laquelle $\sigma_0 = s_0^{\otimes 2}$ et $\sigma_1 = s_0 \otimes s_1$.

- On dispose d'une identification naturelle $\mathcal{N}|_{D(s_1)} \simeq \mathcal{L}^{\otimes 2}|_{D(s_1)}$ modulo laquelle $\sigma_0 = s_0 \otimes s_1$ et $\sigma_1 = s_1^{\otimes 2}$.

Nous allons prouver que $(\mathcal{L}, (s_0, s_1)) \simeq (\mathcal{N}, (\sigma_0, \sigma_1))$.

La section σ_0 est inversible sur $D(s_0)$ et la section σ_1 est inversible sur $D(s_1)$. En conséquence, il existe deux isomorphismes

$$\ell_0: \mathcal{L}|_{D(s_0)} \simeq \mathcal{N}|_{D(s_0)} \quad \text{et} \quad \ell_1: \mathcal{L}|_{D(s_1)} \simeq \mathcal{N}|_{D(s_1)}$$

tels que $\ell_0(s_0) = \sigma_0$ et $\ell_1(s_1) = \sigma_1$ (chacun d'eux est *caractérisé* par l'égalité correspondante).

Modulo l'identification $\mathcal{L}^{\otimes 2}|_{D(s_0)} \simeq \mathcal{N}|_{D(s_0)}$, on a au-dessus de l'ouvert $D(s_0)$ les égalités :

$$\ell_0(s_1) = \frac{s_1}{s_0} \ell_0(s_0) = \frac{s_1}{s_0} \sigma_0 = \frac{s_1}{s_0} s_0^{\otimes 2} = s_0 \otimes s_1 = \sigma_1.$$

Modulo l'identification $\mathcal{L}^{\otimes 2}|_{D(s_1)} \simeq \mathcal{N}|_{D(s_1)}$, on a au-dessus de l'ouvert $D(s_1)$ les égalités

$$\ell_1(s_0) = \frac{s_0}{s_1} \ell_1(s_1) = \frac{s_0}{s_1} \sigma_1 = \frac{s_0}{s_1} s_1^{\otimes 2} = s_0 \otimes s_1 = \sigma_0.$$

Ces égalités assurent que ℓ_0 et ℓ_1 se recollent en un isomorphisme de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{N}$ qui envoie s_0 sur σ_0 et s_1 sur σ_1 .

(6.4.7.4) *Montrons que $\Phi_S \circ \Theta_S = \text{Id}_{D_S}$. Soit $(\mathcal{M}, (t_0, t_1, t_2))$ un objet de $\mathbf{L}_S^2$ dont la classe appartient à D_S , et soit $(\mathcal{L}, (s_0, s_1))$ son image par Θ_S . Les faits suivantes résultent de la définition de Θ_S et de ses propriétés élémentaires établies au 6.4.7.2, en reprenant les notations $S_0 = D(t_0)$ et $S_2 = D(t_2)$ de *loc. cit.*.*

- On dispose d'une identification naturelle $\mathcal{L}|_{S_0} \simeq \mathcal{M}|_{S_0}$ modulo laquelle $s_0 = t_0$ et $s_1 = t_1$.
- On dispose d'une identification naturelle $\mathcal{L}|_{S_2} \simeq \mathcal{M}|_{S_2}$ modulo laquelle $s_0 = t_1$ et $s_1 = t_2$.

Il s'agit de prouver que $(\mathcal{L}^{\otimes 2}, (s_0^{\otimes 2}, s_0 \otimes s_1, s_1^{\otimes 2}))$ est isomorphe à $(\mathcal{M}, (t_0, t_1, t_2))$.

La section s_0 de $\mathcal{L}$ étant inversible sur S_0 , il existe un unique isomorphisme $\ell_0: \mathcal{M}|_{S_0} \simeq \mathcal{L}^{\otimes 2}|_{S_0}$ qui envoie t_0 sur $s_0^{\otimes 2}$; de même, il existe un unique isomorphisme $\ell_2: \mathcal{M}|_{S_2} \simeq \mathcal{L}^{\otimes 2}|_{S_2}$ qui envoie t_2 sur $s_1^{\otimes 2}$.

Modulo l'identification $\mathcal{L}|_{S_0} \simeq \mathcal{M}|_{S_0}$, on a au-dessus de l'ouvert S_0 les égalités

$$\ell_0(t_1) = \frac{t_1}{t_0} \ell_0(t_0) = \frac{t_1}{t_0} s_0^{\otimes 2} = \frac{t_1}{t_0} t_0^{\otimes 2} = t_0 \otimes t_1 = s_0 \otimes s_1$$

et

$$\ell_0(t_2) = \frac{t_2}{t_0} \ell_0(t_0) = \frac{t_2}{t_0} s_0^{\otimes 2} = \frac{t_2}{t_0} t_0^{\otimes 2} = t_0 \otimes t_2 = t_1^{\otimes 2} = s_1^{\otimes 2}.$$

Modulo l'identification $\mathcal{L}|_{S_2} \simeq \mathcal{M}|_{S_2}$, on a au-dessus de l'ouvert S_2 les égalités

$$\ell_2(t_0) = \frac{t_0}{t_2} \ell_2(t_2) = \frac{t_0}{t_2} s_1^{\otimes 2} = \frac{t_0}{t_2} t_2^{\otimes 2} = t_0 \otimes t_2 = t_1^{\otimes 2} = s_0^{\otimes 2}$$

et

$$\ell_2(t_1) = \frac{t_1}{t_2} \ell_2(t_2) = \frac{t_1}{t_2} s_1^{\otimes 2} = \frac{t_1}{t_2} t_2^{\otimes 2} = t_1 \otimes t_2 = s_0 \otimes s_1.$$

En conséquence, ℓ_0 et ℓ_2 se recollent en un isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ qui envoie t_0 sur $s_0^{\otimes 2}$, t_1 sur $s_0 \otimes s_1$ et t_2 sur $s_1^{\otimes 2}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Les plongements de Segre et de Veronese

(6.4.8) Le plongement de Segre. Soient n et m deux entiers. Le but de ce qui suit est de construire, dans le contexte schématique, une immersion fermée $\mathbb{P}_A^n \times_A \mathbb{P}_A^m \hookrightarrow \mathbb{P}_A^{nm+n+m}$, appelée le *plongement de Segre*, et qui est donnée naïvement par la formule

$$([s_0 : \dots : s_n], [t_0 : \dots : t_m]) \mapsto [s_i t_j]_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m}$$

(notez qu'il y a à droite $(n+1)(m+1) = nm + n + m + 1$ coordonnées, et que le but est donc bien $\mathbb{P}^{nm+n+m}$). Le point de vue «foncteur des points»

va permettre de la *définir rigoureusement* par cette même formule – ou plus exactement par sa déclinaison tensorielle.

(6.4.9) Soit $\mathcal{S}$ un A -schéma, soit $(\mathcal{L}, (s_i))$ un objet de $\mathbf{L}_S^n$ et soit $(\mathcal{M}, (t_j))$ un objet de $\mathbf{L}_S^m$. Il est immédiat que

$$\Phi_S((\mathcal{L}, (s_i)), (\mathcal{M}, (t_j))) := (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}, (s_i \otimes t_j)_{i,j})$$

est un objet de $\mathbf{L}_S^{nm+n+m}$, dont la classe d'isomorphie ne dépend que de celles de $(\mathcal{L}, (s_i))$ et $(\mathcal{M}, (t_j))$. On obtient ainsi une application fonctorielle en S , notée encore Φ_S , de $|\mathbf{L}_S^n| \times |\mathbf{L}_S^m|$ vers $|\mathbf{L}_S^{nm+n+m}|$, et partant un morphisme de A -schémas

$$\psi: \mathbb{P}_A^n \times_A \mathbb{P}_A^m \rightarrow \mathbb{P}_A^{nm+n+m},$$

appelé *morphisme de Segre*.

(6.4.10) Proposition. *Le morphisme ψ est une immersion fermée. Plus précisément, il induit un isomorphisme*

$$\mathbb{P}_A^n \times_A \mathbb{P}_A^m \simeq \text{Proj } A[\Sigma_{ij}]_{i,j} / (\Sigma_{ij}\Sigma_{i'j'} - \Sigma_{ij'}\Sigma_{i'j})_{i \neq i', j \neq j'} \hookrightarrow \mathbb{P}_A^{nm+n+m}.$$

Démonstration. Posons $\mathbf{n} = \{0, \dots, n\}$ et $\mathbf{m} = \{0, \dots, m\}$. Soit S un A -schéma. Notons $\mathbf{D}_S$ le sous-ensemble de $|\mathbf{L}_S^{nm+n+m}|$ formé des classes d'objets $(\mathcal{N}, (\sigma_{ij}))$ tels que l'on ait

$$\sigma_{ij} \otimes \sigma_{i'j'} = \sigma_{ij'} \otimes \sigma_{i'j}$$

pour tout (i, i', j, j') avec $i \neq i'$ et $j \neq j'$ (remarquez que lorsque $i = i'$ ou $j = j'$ l'égalité est automatiquement vérifiée). En vertu du lemme 6.4.4.2, il suffit de démontrer que l'application $\Phi_S: |\mathbf{L}_S^n| \times |\mathbf{L}_S^m| \rightarrow |\mathbf{L}_S^{nm+n+m}|$ induit une bijection $|\mathbf{L}_S^n| \times |\mathbf{L}_S^m| \simeq \mathbf{D}_S$. Il est immédiat que $\Phi_S(|\mathbf{L}_S^n| \times |\mathbf{L}_S^m|) \subset \mathbf{D}_S$.

(6.4.10.1) Soit $(\mathcal{N}, (\sigma_{ij}))$ un objet de $\mathbf{L}_S^{nm+n+m}$ tel que $\sigma_{ij} \otimes \sigma_{i'j'} = \sigma_{ij'} \otimes \sigma_{i'j}$ pour tout (i, i', j, j') . Pour tout (i, j) on pose $S_{ij} = D(\sigma_{ij})$. Remarquez qu'en vertu des équations satisfaites par les σ_{ij} , on a $S_{ij} \cap S_{i'j'} = S_{ij'} \cap S_{i'j}$ pour tout (i, i', j, j') ; nous utiliserons implicitement ce fait dans tout ce qui suit.

Soient i et i' deux éléments de $\mathbf{n}$ et soient j et j' deux éléments de $\mathbf{m}$. On pose

$$f_{ij'i'j} = \sigma_{ij'}/\sigma_{ij} = \sigma_{i'j'}/\sigma_{i'j}$$

et

$$g_{ijji'j'} = \sigma_{i'j}/\sigma_{ij} = \sigma_{i'j'}/\sigma_{ij'}$$

ce sont des fonctions inversibles sur $S_{ij} \cap S_{i'j'}$. Un calcul immédiat (qui utilise les équations satisfaites par les σ_{ij}) montre que $(f_{ij'i'j})$ et $(g_{ijji'j'})$ sont deux cocycles subordonnés au recouvrement (S_{ij}) . On note $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{M}$) le $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang 1 obtenu en tordant $\mathcal{N}$ au moyen du cocycle $(f_{ij'i'j})$ (resp. $(g_{ijji'j'})$).

Soit $a \in \mathbf{n}$. Pour tout $(i, j) \in \mathbf{n} \times \mathbf{m}$, posons $\lambda_{ij}^a = \sigma_{aj}|_{S_{ij}}$. On vérifie immédiatement que

$$\sigma_{aj} = \frac{\sigma_{i'j}}{\sigma_{i'j'}} \sigma_{aj'}$$

sur $S_{ij} \cap S_{i'j'}$ pour tout (i, i', j, j') , ce qui entraîne que les λ_{ij}^a se recollent, pour (i, j) variables, en une section globale s_a de $\mathcal{L}$.

Soit $b \in \mathbf{m}$. Pour tout $(i, j) \in \mathbf{n} \times \mathbf{m}$, posons $\mu_{ij}^b = \sigma_{ib}|_{S_{ij}}$. On vérifie immédiatement que

$$\sigma_{ib} = \frac{\sigma_{ij'}}{\sigma_{i'j'}} \sigma_{i'b}$$

sur $S_{ij} \cap S_{i'j'}$ pour tout (i, i', j, j') , ce qui entraîne que les μ_{ij}^b se recollent, pour (i, j) variable, en une section globale t_b de $\mathcal{M}$.

Par construction, $S_{ij} \subset D(s_i)$ et $S_{ij} \subset D(t_j)$ pour tout (i, j) . Il s'ensuit que $(\mathcal{L}, (s_i))$ est un objet de $\mathbf{L}_S^n$, et que $(\mathcal{M}, (t_j))$ est un objet de $\mathbf{L}_S^m$; la classe d'isomorphie du couple

$$\Theta_S(\mathcal{N}, (\sigma_{ij})) := ((\mathcal{L}, (s_i)), (\mathcal{M}, (t_j)))$$

ne dépend manifestement que de celle de $(\mathcal{N}, (\sigma_{ij}))$. Il s'ensuit que Θ_S induit une application, notée encore Θ_S , de $\mathbf{D}_S$ vers $|\mathbf{L}_S^n| \times |\mathbf{L}_S^m|$. Nous allons prouver que $\Theta_S \circ \Phi_S = \text{Id}_{|\mathbf{L}_S^n| \times |\mathbf{L}_S^m|}$ et $\Phi_S \circ \Theta_S = \text{Id}_{\mathbf{D}_S}$.

(6.4.10.2) Montrons que $\Theta_S \circ \Phi_S = \text{Id}_{|\mathbf{L}_S^n| \times |\mathbf{L}_S^m|}$. Soit $(\mathcal{L}, (s_i))$ un objet de $\mathbf{L}_S^n$ et soit $(\mathcal{M}, (t_j))$ un objet de $\mathbf{L}_S^m$. Posons

$$((\mathcal{E}, (\xi_i)), (\mathcal{F}, (\eta_j))) = \Theta_S(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}, (s_i \otimes t_j)).$$

Il s'agit de prouver que $(\mathcal{E}, (\xi_i)) \simeq (\mathcal{L}, (s_i))$ et que $(\mathcal{F}, (\eta_j)) \simeq (\mathcal{M}, (t_j))$. Pour tout (i, j) on pose $S_{ij} = D(s_i \otimes t_j) = D(s_i) \cap D(t_j)$. Les faits suivants résultent de la définition de Θ .

- Pour tout couple (i, j) l'on dispose d'une identification naturelle

$$\mathcal{E}|_{S_{ij}} \simeq (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})|_{S_{ij}}$$

modulo laquelle $\xi_a = s_a \otimes t_j$ quel que soit $a \in \mathbf{n}$.

- Pour tout couple (i, j) l'on dispose d'une identification naturelle

$$\mathcal{F}|_{S_{ij}} \simeq (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})|_{S_{ij}}$$

modulo laquelle $\eta_b = s_i \otimes t_b$ quel que soit $b \in \mathbf{m}$.

Fixons a , et soit $(i, j) \in \mathbf{n} \times \mathbf{m}$. Modulo l'identification $\mathcal{E}|_{S_{ij}} \simeq (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})|_{S_{ij}}$ on a au-dessus de l'ouvert S_{ij} les égalités

$$\ell_{ij}(s_a) = \frac{s_a}{s_i} \ell_{ij}(s_i) = \frac{s_a}{s_i} \xi_i = \frac{s_a}{s_i} s_i \otimes t_j = s_a \otimes t_j = \xi_a.$$

Les ℓ_{ij} se recollent donc en un isomorphisme $\ell: \mathcal{L} \simeq \mathcal{E}$ tel que $\ell(s_i) = \xi_i$ pour tout i , ce qui montre que $(\mathcal{E}, (\xi_i))$ et $(\mathcal{L}, (s_i))$ sont isomorphes.

La démonstration que $(\mathcal{F}, (\eta_j)) \simeq (\mathcal{M}, (t_j))$ est la même *mutatis mutandis*.

(6.4.10.3) Montrons que $\Phi_S \circ \Theta_S = \text{Id}_{\mathbf{D}_S}$. Soit $(\mathcal{N}, (\sigma_{ij}))$ un objet de $\mathbf{L}_S^{nm+n+m}$ tel que $\sigma_{ij} \otimes \sigma_{i'j'} = \sigma_{ij'} \otimes \sigma_{i'j}$ pour tout (i, i', j, j') . Posons

$$((\mathcal{L}, (s_i)), (\mathcal{M}, (t_j))) = \Theta_S(\mathcal{N}, (\sigma_{ij})).$$

Il s'agit de montrer que $(\mathcal{N}, (\sigma_{ij})) \simeq (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}, s_i \otimes t_j)$. Pour tout (i, j) , on note S_{ij} l'ouvert $D(\sigma_{ij})$. Les faits suivants résultent de la définition de Θ .

- Pour tout (i, j) l'on dispose d'une identification naturelle

$$\mathcal{L}|_{S_{ij}} \simeq \mathcal{N}|_{S_{ij}}$$

modulo laquelle $s_a = \sigma_{aj}$ pour tout a .

- Pour tout (i, j) l'on dispose d'une identification naturelle

$$\mathcal{L}|_{S_{ij}} \simeq \mathcal{N}|_{S_{ij}}$$

modulo laquelle $t_b = \sigma_{ib}$ pour tout b .

Fixons (a, b) . Soit $(i, j) \in \mathbf{n} \times \mathbf{m}$. Modulo les identifications naturelles $\mathcal{L}|_{S_{ij}} \simeq \mathcal{N}|_{S_{ij}}$ et $\mathcal{M}|_{S_{ij}} \simeq \mathcal{N}|_{S_{ij}}$ on a au-dessus de l'ouvert S_{ij} les égalités

$$\begin{aligned} \ell_{ij}(\sigma_{ab}) &= \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{ij}} \ell_{ij}(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{ij}} s_i \otimes t_j = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{ij}} \sigma_{ij} \otimes \sigma_{ij} \\ &= \sigma_{ab} \otimes \sigma_{ij} = \sigma_{aj} \otimes \sigma_{ib} = s_a \otimes t_b. \end{aligned}$$

Les ℓ_{ij} se recollent par conséquent en un isomorphisme $\ell: \mathcal{N} \simeq \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ qui vérifie l'égalité $\ell(\sigma_{ij}) = s_i \otimes t_j$ pour tout (i, j) . On ainsi construit un isomorphisme $(\mathcal{N}, (\sigma_{ij})) \simeq (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}, s_i \otimes t_j)$, ce qui achève la démonstration de la proposition. $\square$

(6.4.11) Le plongement de Veronese. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit

$$\psi: \mathbb{P}_A^n \times_A \mathbb{P}_A^n \hookrightarrow \mathbb{P}_A^{n^2+2n}$$

le plongement de Segre (définie en 6.4.9, voir aussi la proposition 6.4.10). Le *morphisme de Veronese* $\chi: \mathbb{P}_A^n \rightarrow \mathbb{P}_A^{n^2+2n}$ est la flèche composée

$$\mathbb{P}_A^n \xrightarrow{(\text{Id}, \text{Id})} \mathbb{P}_A^n \times_A \mathbb{P}_A^n \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}_A^{n^2+2n}.$$

(6.4.12) Proposition. *Le morphisme de Veronese $\chi: \mathbb{P}_A^n \rightarrow \mathbb{P}_A^{n^2+2n}$ s'identifie à l'immersion fermée*

$$\text{Proj } A[\Sigma_{ij}] / [(\Sigma_{ij}\Sigma_{i'j'} - \Sigma_{ij'}\Sigma_{i'j})_{i \neq i', j \neq j'}, (\Sigma_{ij} - \Sigma_{ji})_{i \neq j}] \hookrightarrow \mathbb{P}^{n^2+2n}.$$

Démonstration. Soit S un A -schéma. L'application $|\mathbb{L}_S^n| \rightarrow |\mathbb{L}_S^n| \times |\mathbb{L}_S^n|$ induite par $(\text{Id}, \text{Id}): \mathbb{P}_A^n \rightarrow \mathbb{P}_A^n \times_A \mathbb{P}_A^n$ est simplement la diagonale $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda)$, qui identifie $|\mathbb{L}_S^n|$ au sous-ensemble Δ_S de $|\mathbb{L}_S^n| \times |\mathbb{L}_S^n|$ constitué des couples dont les deux composantes sont égales.

Nous reprenons les notations Φ_S, Θ_S, D_S de 6.4.9 et de la démonstration de la proposition. 6.4.10 – notez simplement que maintenant $m = n$. Soit E_S le sous-ensemble de $|\mathbb{L}_S^{n^2+2n}|$ constitué des classes d'objets $(\mathcal{N}, (\sigma_{ij}))$ tels que l'on ait

$$\sigma_{ij} \otimes \sigma_{i'j'} = \sigma_{ij'} \otimes \sigma_{i'j}$$

pour tout (i, i', j, j') et $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ pour tout (i, j) avec $i \neq j$ (notez que si $i = j$, l'égalité est automatiquement vérifiée). En vertu du lemme 6.4.4.2, il suffit de démontrer que l'application $\Phi_S: |\mathbb{L}_S^n| \times |\mathbb{L}_S^n| \rightarrow |\mathbb{L}_S^{n^2+2n}|$ induit une bijection de Δ_S sur E_S . Il est immédiat que $\Phi_S(\Delta_S) \subset E_S$, et l'on sait d'après la preuve de la proposition 6.4.10 que Φ_S induit une bijection $\mathbb{L}_S^n \simeq D_S$ de réciproque Θ_S . Il suffit donc pour conclure de vérifier que $\Theta_S(E_S) \subset \Delta_S$.

Soit donc $(\mathcal{N}, (\sigma_{ij}))$ un objet de $\mathbb{L}_S^{n^2+2n}$ tel que

$$\sigma_{ij} \otimes \sigma_{i'j'} = \sigma_{ij'} \otimes \sigma_{i'j}$$

pour tout (i, i', j, j') et $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ pour tout (i, j) . Pour tout (i, j) , on note S_{ij} l'ouvert $D(\sigma_{ij})$; il résulte de nos hypothèses que $S_{ij} = S_{ji}$ pour tout (i, j) . Posons

$$((\mathcal{L}, (s_i)), (\mathcal{M}, (t_j))) = \Theta_S(\mathcal{N}, (\sigma_{ij})).$$

Il s'agit de prouver que $(\mathcal{L}, (s_i)) \simeq (\mathcal{M}, (t_j))$. Les faits suivants résultent de la définition de Θ_S .

- On dispose pour tout (i, j) d'une identification $\mathcal{L}|_{S_{ij}} \simeq \mathcal{N}|_{S_{ij}}$ modulo laquelle s_a est égale à σ_{aj} pour tout a .
- On dispose pour tout (i, j) d'une identification $\mathcal{M}|_{S_{ij}} \simeq \mathcal{N}|_{S_{ij}}$ modulo laquelle t_b est égale à σ_{ib} pour tout b .

Soit (i, j) un couple d'indices. La section s_i de $\mathcal{L}$ est inversible sur S_{ij} . Comme $S_{ij} = S_{ji}$, il en va de même de la section t_i de $\mathcal{M}$. En conséquence, il existe un unique isomorphisme $\ell_{ij}: \mathcal{L}|_{S_{ij}} \simeq \mathcal{M}|_{S_{ij}}$ tel que $\ell_{ij}(s_i) = t_i$.

Soit $a \in \{0, \dots, n\}$ et soient i et j deux entiers compris entre 0 et n . Modulo l'isomorphisme $\mathcal{M}|_{S_{ij}} \simeq \mathcal{N}|_{S_{ij}}$, on a au-dessus de l'ouvert S_{ij} les égalités

$$\ell_{ij}(s_a) = \frac{s_a}{s_i} \ell_{ij}(s_i) = \frac{s_a}{s_i} t_i = \frac{\sigma_{aj}}{\sigma_{ij}} t_i.$$

On a par ailleurs $S_{ij} = S_{ji}$, et

$$\frac{\sigma_{aj}}{\sigma_{ij}} t_i = \frac{\sigma_{ja}}{\sigma_{ji}} t_i = \frac{\sigma_{ja}}{\sigma_{ji}} \sigma_{ji} = \sigma_{ja} = t_a,$$

toujours au-dessus de cet ouvert mais cette fois-ci modulo l'isomorphisme $\mathcal{M}|_{S_{ji}} \simeq \mathcal{N}|_{S_{ji}}$. En conséquence, $\ell_{ij}(s_a) = t_a$.

Il en résulte que les ℓ_{ij} se recollent en un isomorphisme de $(\mathcal{L}, (s_i))$ sur $(\mathcal{M}, (t_i))$ envoyant s_i sur t_i pour tout i , ce qui achève la démonstration. $\square$

(6.4.12.1) Corollaire. *Le morphisme $(\text{Id}, \text{Id}): \mathbb{P}_A^n \rightarrow \mathbb{P}_A^n \times_A \mathbb{P}_A^n$ est une immersion fermée.*

Démonstration. Notons δ le morphisme en question. La proposition 6.4.12 assure que $\psi \circ \delta$ est une immersion fermée, et ψ est elle-même une immersion fermée d'après la proposition 6.4.10. Il résulte alors de 5.4.13.2 que δ est une immersion fermée. $\square$

(6.4.12.2) Remarque. Soit S un A -schéma. Il est immédiat que l'application de $|\mathbb{L}_S^n|$ dans $|\mathbb{L}_S^{n^2+2n}|$ induite par χ envoie la classe d'un objet $(\mathcal{L}, (s_i)_i)$ sur celle

de $(\mathcal{L}^{\otimes 2}, (s_i \otimes s_j)_{ij})$. Autrement dit, χ n'est autre que le morphisme $[S_i S_j]_{ij}$ (6.4.5 et sq.).

(6.4.12.3) Exemple. Nous allons décliner les propositions 6.4.10 et 6.4.12 lorsque $n = m = 1$; notez que dans ce cas $n^2 + 2n = 3$. Identifions $\mathbb{P}_A^3$ à $\text{Proj } A[\Sigma_{00}, \Sigma_{01}, \Sigma_{10}, \Sigma_{11}]$.

- Le plongement de Segre identifie $\mathbb{P}_A^1 \times_A \mathbb{P}_A^1$ à la «quadrique» de $\mathbb{P}_A^3$ définie par l'idéal homogène $(\Sigma_{00}\Sigma_{11} - \Sigma_{01}\Sigma_{10})$.
- Le plongement de Veronese identifie $\mathbb{P}_A^1$ au sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_A^3$ défini par l'idéal homogène $(\Sigma_{00}\Sigma_{11} - \Sigma_{01}\Sigma_{10}, \Sigma_{01} - \Sigma_{10})$.

6.5 Séparation et propreté

Morphismes séparés

(6.5.1) La notion naïve (purement topologique) de séparation n'a guère d'intérêt en théorie des schémas, faute d'être suffisamment discriminante : en effet, comme on a eu l'occasion de le voir, les schémas ne sont presque jamais topologiquement séparés.

(6.5.1.1) Il existe toutefois, comme on va le voir, une «bonne» notion de séparation en théorie des schémas, qui est conforme à l'intuition – par exemple, si k est un corps, les k -schémas $\mathbb{A}_k^n$ et $\mathbb{P}_k^n$ sont séparés, mais la droite affine avec origine dédoublée $\mathbb{D}_k$ vue aux 5.2.6 et sq. ne l'est pas.

(6.5.1.2) On peut donner en topologie deux définitions d'un espace séparé (leur équivalence est immédiate, nous vous laissons la vérifier).

i) Un espace topologique X est séparé si pour tout couple (x, y) de points de X avec $x \neq y$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un voisinage ouvert V de y dans X tels que $U \cap V = \emptyset$.

ii) Un espace topologique X est séparé si la diagonale $\{(x, x)\}_{x \in X}$ est un sous-ensemble fermé de $X \times X$.

Pour ce qui nous intéresse ici, la définition ii) est meilleure : comme nous le verrons, elle se décalque très naturellement en géométrie algébrique et fournit la bonne notion de séparation dans ce contexte – alors qu'à notre connaissance, il n'existe pas de façon pertinente de «schématiser» la définition i).

(6.5.2) Définition. Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. On dit que φ est une *immersion* s'il existe un ouvert Ω de X tel que φ induise une immersion fermée $Y \hookrightarrow \Omega$.

(6.5.2.1) Exemples. Il résulte immédiatement de la définition que les immersions ouvertes et les immersions fermées sont des cas particuliers d'immersions (la terminologie choisie est donc cohérente). Il n'est pas difficile de construire des immersions qui ne soient ni ouvertes ni fermées. Donnons-nous par exemple un corps k , soit Ω l'ouvert $D(S)$ de $\mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } k[S, T]$ et soit Y le sous-schéma fermé de Ω défini par l'idéal (T) . Par définition, la flèche composée $Y \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \mathbb{A}_k^2$ est une immersion, mais elle n'est ni ouverte ni fermée, car son image est égale à $D(S) \cap V(T)$ et n'est ni ouverte ni fermée.

(6.5.2.2) Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Si φ est une immersion alors $Y \times_X Y \simeq Y$. En effet, il existe par hypothèse un ouvert Ω de Y tel que $\varphi|_{\Omega}$ se factorise par une immersion fermée $\Omega \hookrightarrow X$. On sait que $Y \times_X Y$ est alors égal à $Y \times_{\Omega} Y$, et ce dernier s'identifie à Y en vertu de 5.4.12.2.

(6.5.2.3) On vérifie sans peine que la composée de deux immersions est une immersion, et que le fait d'être une immersion est stable par changement de base.

(6.5.2.4) **Lemme.** Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. On suppose que φ est une immersion. Pour que φ soit une immersion fermée, il faut et il suffit que $\varphi(Y)$ soit un fermé de X .

Démonstration. Si φ est une immersion fermée, $\varphi(Y)$ est un fermé de X . Réciproquement, supposons que $\varphi(Y)$ soit un fermé de X et soit U son ouvert complémentaire. Comme φ est une immersion, il existe un ouvert Ω de X tel que φ induise une immersion fermée $Y \hookrightarrow \Omega$. En conséquence,

$$Y \times_X \Omega \rightarrow \Omega = \varphi^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega = Y \rightarrow \Omega$$

est une immersion fermée. Par ailleurs,

$$Y \times_X U \rightarrow U = \varphi^{-1}(U) \rightarrow U = \emptyset \rightarrow U$$

est aussi une immersion fermée. Comme $\varphi(Y) \subset \Omega$, les ouverts U et Ω recouvrent Y ; puisque le fait d'être une immersion fermée est une propriété locale sur le but, φ est une immersion fermée. $\square$

(6.5.2.5) *Remarque.* L'assertion analogue pour les immersions ouvertes est fausse : par exemple, si X est un schéma non réduit, $X_{\text{red}} \hookrightarrow X$ est une immersion (fermée) dont l'image est X , mais ce n'est pas une immersion ouverte, car sinon ce serait un isomorphisme et X serait réduit.

(6.5.3) **Définition.** Soit X un schéma et soit Y un X -schéma. La *diagonale* du morphisme $Y \rightarrow X$ (ou du X -schéma Y , ou de Y au-dessus de X ...) est la flèche $Y \xrightarrow{(\text{Id}, \text{Id})} Y \times_X Y$, que nous noterons δ dans ce qui suit.

(6.5.3.1) *Diagonale et changement de base.* Soit X' un X -schéma, et soit Y' le produit fibré $Y \times_X X'$; on a d'après 1.5.9 un isomorphisme canonique

$$(Y \times_X Y) \times_X X' \simeq Y' \times_{X'} Y',$$

et δ induit donc une flèche $\delta': Y' \rightarrow Y' \times_{X'} Y'$. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Y & & & & \\ & \searrow \delta & & \searrow \text{Id} & \\ & & Y \times_X Y & \longrightarrow & Y \\ & \searrow \text{Id} & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

entraîne celle de

$$\begin{array}{ccc}
Y' & \xrightarrow{\text{Id}} & Y' \\
\delta' \searrow & & \downarrow \\
& Y' \times_{X'} Y' & \longrightarrow Y' \\
\text{Id} \searrow & \downarrow & \downarrow \\
& Y' & \longrightarrow X'
\end{array}$$

et δ' est en conséquence égale à la diagonale de $Y' \rightarrow X'$. Il résulte par ailleurs de 1.5.8 que le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
Y' & \xrightarrow{\delta'} & Y' \times_{X'} Y' \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y & \xrightarrow{\delta} & Y \times_X Y
\end{array}$$

est *cartésien*, c'est-à-dire qu'il identifie le terme en haut à gauche au produit fibré des trois autres.

(6.5.3.2) Soit U un ouvert de X , et soient V et W deux ouverts de $Y \times_X U$. Soient p_1 et p_2 les deux projections de $Y \times_X Y$ sur Y . L'ouvert $V \times_U W$ de $Y \times_X Y$ est égal à $p_1^{-1}(V) \cap p_2^{-1}(W)$. Comme $p_1 \circ \delta = p_2 \circ \delta = \text{Id}_Y$ il vient

$$\delta^{-1}(V \times_U W) = V \cap W.$$

(6.5.3.3) Supposons que X est le spectre d'un anneau A , et Y celui d'une A -algèbre B . La diagonale δ est alors induite par le morphisme d'anneaux $B \otimes_A B \rightarrow B$ correspondant au couple $(\text{Id}_B, \text{Id}_B)$, qui n'est autre que la «multiplication» $b \otimes \beta \mapsto b\beta$. Celle-ci est manifestement surjective; en conséquence, δ est une immersion fermée.

(6.5.3.4) On ne suppose plus que X et Y sont affines. Soit Ω la réunion des ouverts de $Y \times_X Y$ qui sont de la forme $V \times_U V$ où V est un ouvert affine de Y et U un ouvert affine de X contenant l'image de V .

Donnons-nous un tel couple (U, V) . Il résulte de 6.5.3.2 que

$$\delta^{-1}(V \times_U V) \rightarrow V \times_U V$$

est la diagonale $V \rightarrow V \times_U V$. En vertu de 6.5.3.3, c'est une immersion fermée.

Puisqu'être une immersion fermée est une propriété locale sur le but d'un morphisme, $\delta^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega$ est une immersion fermée. Par ailleurs, soit $z \in Y \times_X Y$. Par définition, les images de $\delta(z)$ par les deux projections sur Y sont égales à un même point y ; soit x l'image de y sur X . Choisissons un voisinage affine U de x dans X et un voisinage affine V de y dans $Y \times_X U$; par construction, le point $\delta(z)$ appartient à $V \times_U V \subset \Omega$. Ainsi, $\delta^{-1}(\Omega) = Y$. La diagonale δ se factorise donc par une immersion fermée $Y \hookrightarrow \Omega$; par conséquent, δ est une immersion.

(6.5.4) Définition. Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. On dit que $Y \rightarrow X$ est *séparé* si la diagonale $Y \hookrightarrow Y \times_X Y$ (qui est une immersion d'après le 6.5.3.4

ci-dessus) est une immersion fermée. On dit parfois aussi que Y est un X -schéma séparé, ou que Y est séparé sur X .

Un schéma est dit *séparé* s'il est séparé sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

(6.5.5) Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas et soit $\delta: Y \hookrightarrow Y \times_X Y$ l'immersion diagonale.

(6.5.5.1) Si Y et X sont affines, il découle de 6.5.3.3 que $Y \rightarrow X$ est séparé.

(6.5.5.2) En général, comme δ est une immersion, on déduit du lemme 6.5.2.4 que $Y \rightarrow X$ est séparé si et seulement si $\delta(Y)$ est fermé dans $Y \times_X Y$.

(6.5.5.3) Soit $X' \rightarrow X$ un morphisme; posons $Y' = Y \times_X X'$, et soit δ' la diagonale de $Y' \rightarrow X'$. On déduit de 6.5.3.1 que la diagonale δ' est une immersion fermée dès que δ est une immersion fermée. Autrement dit, si $Y \rightarrow X$ est séparé alors $Y' \rightarrow X'$ est séparé : la séparation est stable par changement de base.

(6.5.5.4) Soit (U_i) un recouvrement ouvert de X . Pour tout indice i , on pose $V_i = Y \times_X U_i$; remarquons que l'image réciproque de U_i sur $Y \times_X Y$ est égale à $V_i \times_{U_i} V_i$ pour tout i , et qu'en conséquence $Y \times_X Y$ est recouvert par les $V_i \times_{U_i} V_i$.

Supposons que V_i est séparé sur U_i pour tout i . Fixons i . En vertu de 6.5.3.2, on a $\delta^{-1}(V_i \times_{U_i} V_i) = V_i$. Le fait que V_i soit séparé sur U_i signifie donc que

$$\delta^{-1}(V_i \times_{U_i} V_i) \rightarrow V_i \times_{U_i} V_i$$

est une immersion fermée.

Ceci vaut pour tout i , et les $V_i \times_{U_i} V_i$ recouvrent $Y \times_X Y$. Comme la propriété d'être une immersion fermée est locale sur le but, il s'ensuit que $Y \rightarrow Y \times_X Y$ est une immersion fermée. Autrement dit, Y est séparé sur X , et la séparation apparaît ainsi à son tour comme une propriété locale sur le but.

(6.5.5.5) Il résulte de 6.5.5.1 et 6.5.5.4 que si le morphisme $Y \rightarrow X$ est affine, il est séparé.

(6.5.5.6) Soit $Z \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Supposons que $Z \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow X$ soient séparés. Nous allons montrer qu'il en va alors de même de la flèche composée $Z \rightarrow X$.

La flèche diagonale $Z \rightarrow Z \times_X Z$ est composée de $Z \rightarrow Z \times_Y Z$, qui est une immersion fermée par hypothèse, et de $Z \times_Y Z \rightarrow Z \times_X Z$. Il suffit dès lors pour conclure de montrer que

$$Z \times_Y Z \rightarrow Z \times_X Z$$

est une immersion fermée. Nous allons montrer que cette dernière flèche s'identifie naturellement à

$$Y \times_{Y \times_X Y} (Z \times_X Z) \rightarrow Z \times_X Z,$$

ce qui permettra de conclure puisque $Y \rightarrow Y \times_X Y$ est par hypothèse une immersion fermée.

On cherche donc à établir que le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y Z & \xrightarrow{q} & Z \times_X Z \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{\delta} & Y \times_X Y \end{array}$$

est cartésien. Face à ce genre de problème, le seul réflexe sain est d'invoquer le lemme de Yoneda pour se ramener à l'assertion ensembliste correspondante (pour un exemple de raisonnement détaillé de ce type, cf. 1.5.8.1).

On suppose donc pour un instant que le carré ci-dessus vit dans la catégorie des ensembles, et nous allons montrer qu'il est cartésien. Appelons g la flèche $Z \rightarrow Y$, et f la flèche $Y \rightarrow X$. Par définition, le produit $Y \times_X Y$ est l'ensemble des couples $(y, y') \in Y^2$ tels que $f(y) = f(y')$, le produit $Z \times_X Z$ est l'ensemble des couples $(z, z') \in Z^2$ tels que $f(g(z)) = f(g(z'))$, et le produit $Z \times_Y Z$ est l'ensemble des couples $(z, z') \in Z^2$ tels que $g(z) = g(z')$. Les flèches du diagramme sont données par les formules suivantes :

- $q(z, z') = (z, z')$;
- $\pi(z, z') = (g(z), g(z'))$;
- $p(z, z') = g(z) = g(z')$;
- $\delta(y) = (y, y)$.

Il s'agit maintenant de s'assurer que pour tout triplet $(y, z, z') \in Y \times (Z \times_X Z)$ tel que $\delta(y) = \pi(z, z')$ il existe un unique élément de $Z \times_Y Z$ dont l'image par p est égale à y et l'image par q à (z, z') . L'unicité est claire : étant donnée la formule qui définit q , si un tel élément existe, ce ne peut être que (z, z') . Il reste à s'assurer que celui-ci convient. Mais l'égalité $\delta(y) = \pi(z, z')$ signifie que $g(z) = y$ et $g(z') = y$, ce qui signifie précisément que $(z, z') \in Z \times_Y Z$ et que $p(z, z') = y$; on a de plus $q(z, z') = (z, z')$, ce qui termine la démonstration.

(6.5.6) Exemples et contre-exemples.

(6.5.6.1) Nous avons déjà vu que les morphismes affines sont séparés (6.5.5.5). En particulier, pour tout schéma X et tout entier n , le schéma $\mathbb{A}_X^n$ est séparé sur X .

(6.5.6.2) Toute immersion est séparée, puisque sa diagonale est un *isomorphisme* d'après 6.5.2.2.

(6.5.6.3) Pour tout schéma X et tout entier n , le schéma $\mathbb{P}_X^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} X$ est séparé sur X . En effet, en vertu de 6.5.5.3, il suffit de traiter le cas où X est égal à $\text{Spec } \mathbb{Z}$, auquel cas c'est une conséquence directe du corollaire 6.4.12.1 (qui établit d'ailleurs en fait directement la séparation de $\mathbb{P}_A^n$ sur $\text{Spec } A$ pour tout anneau A).

(6.5.6.4) Un morphisme de schémas $Y \rightarrow X$ est dit *quasi-projectif* (resp. *projectif*) si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un entier n tel que le morphisme $Y \times_X U \rightarrow U$ se factorise par une immersion (resp. une immersion fermée) $Y \times_X U \hookrightarrow \mathbb{P}_U^n$. Il résulte de 6.5.6.2, 6.5.6.3, 6.5.5.6 et 6.5.5.4 que tout morphisme quasi-projectif est séparé ; c'est *a fortiori* le cas de tout morphisme projectif.

(6.5.6.5) Soit k un corps et soit $\mathbb{D}_k$ la droite affine avec origine dédoublée construite aux 5.2.6 et sq. Nous allons démontrer qu'elle n'est pas séparée.

Redonnons brièvement ici la description de $\mathbb{D}_k$. Elle est réunion de deux ouverts affines $X = \operatorname{Spec} k[S]$ et $Y = \operatorname{Spec} k[T]$. Leur intersection est égale à $D(S) = \operatorname{Spec} k[S, S^{-1}]$ en tant qu'ouvert de X , et à $D(T) = \operatorname{Spec} k[T, T^{-1}]$ en tant qu'ouvert de Y . L'isomorphisme entre ces deux identifications est induit par l'isomorphisme de k -algèbres

$$k[S, S^{-1}] \simeq k[T, T^{-1}], \quad S \mapsto T.$$

On dispose d'un morphisme naturel $\pi: X \amalg Y \rightarrow \mathbb{D}_k$. Complétons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & (X \amalg Y) \times_k (X \amalg Y) & \\ & \downarrow & \\ \mathbb{D}_k & \longrightarrow & \mathbb{D}_k \times_k \mathbb{D}_k \end{array}$$

en un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & (X \amalg Y) \times_k (X \amalg Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}_k & \longrightarrow & \mathbb{D}_k \times_k \mathbb{D}_k \end{array}$$

dont la flèche horizontale supérieure est une immersion, et une immersion fermée si $\mathbb{D}_k$ est séparée.

Moralement, on peut penser à Δ comme au *graphe de la relation d'équivalence* qui a permis de définir $\mathbb{D}_k$ à partir de $X \amalg Y$, mais nous allons maintenant en donner une description rigoureuse. Commençons par observer que nous sommes dans la même situation formelle qu'au 6.5.5.6 ; il s'ensuit que l'immersion

$$\Delta \hookrightarrow (X \amalg Y) \times_k (X \amalg Y)$$

s'identifie à

$$(X \amalg Y) \times_{\mathbb{D}_k} (X \amalg Y) \rightarrow (X \amalg Y) \times_k (X \amalg Y).$$

La source et le but de cette flèche admettent chacun une décomposition en quatre ouverts disjoints, et cette flèche préserve ces décompositions. On se retrouve donc avec quatre immersions différentes à considérer.

a) *L'immersion* $X \times_{\mathbb{D}_k} X \rightarrow X \times_k X$. Comme X est un ouvert de $\mathbb{D}_k$, le produit fibré $X \times_{\mathbb{D}_k} X$ s'identifie à X , et l'immersion étudiée est donc l'immersion diagonale $X \hookrightarrow X \times_k X$, qui est fermée puisque $X = \operatorname{Spec} k[T]$ est affine (on peut évidemment la calculer directement et voir qu'elle s'identifie à $\operatorname{Spec} k[T_1, T_2]/(T_1 - T_2) \hookrightarrow \operatorname{Spec} k[T_1, T_2]$).

b) *L'immersion* $Y \times_{\mathbb{D}_k} Y \rightarrow Y \times_k Y$. Pour la même raison, c'est l'immersion diagonale $Y \hookrightarrow Y \times_k Y$, et elle est fermée.

c) *L'immersion* $X \times_{\mathbb{D}_k} Y \rightarrow X \times_k Y$. Comme X et Y sont des ouverts de $\mathbb{D}_k$, le terme de gauche est l'intersection de X et Y dans $\mathbb{D}_k$, laquelle s'identifie

à $\text{Spec } k[S, S^{-1}] \simeq \text{Spec } k[T, T^{-1}]$ (l'isomorphisme envoyant T sur S). Quant au produit fibré $X \times_k Y$, c'est de façon naturelle le spectre de $k[S, T]$. La flèche entre les deux est donnée par le morphisme d'algèbres $k[S, T] \rightarrow k[S, S^{-1}]$ qui envoie S et T sur S . *Il n'est pas surjectif et cette flèche n'est donc pas une immersion fermée.*

Donnons quelques précisions. Le morphisme $k[S, T] \rightarrow k[S, S^{-1}]$ est la composée de $k[S, T] \hookrightarrow k[S, S^{-1}, T]$ et de la surjection $k[S, S^{-1}, T] \rightarrow k[S, S^{-1}]$ qui envoie T sur S et a pour noyau $(S - T)$. L'immersion $X \times_{\mathbb{D}_k} Y \rightarrow X \times_k Y$ est donc égale à la composée de l'immersion fermée $V(S - T) \cap D(S) \hookrightarrow D(S)$ (où le fermé $V(S - T) \cap D(S)$ de $D(S)$ est muni de sa structure réduite, d'anneau associé $k[S, S^{-1}]$), et de l'immersion ouverte $D(S) \hookrightarrow \text{Spec } k[S, T]$. On voit bien que son image n'est pas fermée : c'est $V(S - T) \cap D(S) = V(S - T) \setminus \{(0, 0)\}$, c'est-à-dire la diagonale *épointée* (cela traduit le fait qu'on a identifié chaque point de X à l'exception de l'origine au point correspondant de Y).

d) *L'immersion* $Y \times_{\mathbb{D}_k} X \rightarrow Y \times_k X$. Elle se décrit exactement comme l'immersion considérée au c) ; elle a également pour image la diagonale épointée, et n'est donc pas fermée.

On voit donc qu'en raison de c) et d), l'immersion

$$\Delta \hookrightarrow (X \amalg Y) \times_k (X \amalg Y)$$

n'est pas fermée ; il s'ensuit que $\mathbb{D}_k$ n'est pas séparée.

(6.5.6.6) Remarque. On sait que le k -schéma $\mathbb{P}_k^1$ est séparé (6.5.6.3). On peut par ailleurs en donner une construction par recollement, analogue à celle utilisée pour définir $\mathbb{D}_k$ (5.2.5 et sq.) : si l'on reprend les notations ci-dessus, la seule différence avec le cas de la droite à origine dédoublée réside dans le fait que l'isomorphisme entre les deux identifications

$$X \cap Y \simeq \text{Spec } k[S, S^{-1}] \text{ et } X \cap Y \simeq \text{Spec } k[T, T^{-1}]$$

est induit par le morphisme d'algèbres qui envoie T sur S^{-1} (et non pas S). Supposons que l'on cherche, dans ce nouveau contexte, à décrire l'immersion

$$\Delta \hookrightarrow (X \amalg Y) \times_k (X \amalg Y).$$

Tout se passe comme ci-dessus jusqu'au point b) inclus, mais une différence fondamentale apparaît au point c) : l'immersion $X \times_{\mathbb{P}_k^1} Y \rightarrow X \times_k Y$ est alors donnée par le morphisme d'algèbres de $k[S, T]$ vers $k[S, S^{-1}]$ qui envoie T sur S^{-1} et qui est *surjectif*, de noyau $(TS - 1)$; c'est donc une immersion fermée, d'image l'hyperbole $V(ST - 1)$ (et qui induit la structure réduite sur celle-ci, d'anneau associé $k[S, S^{-1}]$).

(6.5.7) Nous allons terminer ces considérations sur la séparation par un lemme facile qui a son intérêt, même si nous ne nous en servons pas dans la suite.

(6.5.8) Lemme. *Soit A un anneau et soit X un A -schéma séparé ; soient U et V deux ouverts affines de X . L'intersection $U \cap V$ est affine.*

Démonstration. Comme le schéma X est séparé sur A , le morphisme diagonal $\delta : X \hookrightarrow X \times_A X$ est une immersion fermée. Soient p et q les deux

projections de $X \times_A X$ vers X . L'ouvert $U \times_A V$ de $X \times_A X$ est affine puisque U, V et $\text{Spec } A$ le sont. En vertu de 6.5.3.2, $\delta^{-1}(U \times_A V) = U \cap V$, et δ induit donc une immersion fermée $U \cap V \hookrightarrow U \times_A V$. Comme $U \times_A V$ est affine, on en déduit que $U \cap V$ est affine. $\square$

(6.5.9) Remarque. Esquissons un contre-exemple au lemme 6.5.8 ci-dessus lorsque l'hypothèse de séparation n'est pas satisfaite. Soit k un corps. On peut définir, par un procédé analogue à celui utilisé pour définir $\mathbb{D}_k$ que nous avons rappelé au 6.5.6.5 ci-dessus, le *plan affine avec origine dédoublée*. C'est un k -schéma qui n'est pas séparé. Il est réunion de deux ouverts affines X et Y . Chacun d'eux est isomorphe à $\mathbb{A}_k^2$, et leur intersection s'identifie, comme ouvert de X aussi bien que de Y , à $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{(0, 0)\}$; elle n'est donc pas affine (5.1.27 et sq.).

Morphismes propres

(6.5.10) Il en va de la compacité comme de la séparation : il ne semble pas raisonnable, au vu de la grossièreté de la topologie de Zariski en général, d'espérer une notion satisfaisante de compacité en géométrie algébrique qui soit définissable en termes purement topologiques. Songez par exemple que sur un corps k , les espaces topologiques $\mathbb{A}_k^1$ et $\mathbb{P}_k^1$ sont *homéomorphes* (c'est une conséquence immédiate de 6.2.7.6, et du fait que l'ensemble des points fermés de $\mathbb{A}_k^1$ et celui de $\mathbb{P}_k^1$ sont de même cardinal infini); or quel que soit le sens que l'on donne à l'adjectif «compact», la décence exige que $\mathbb{A}_k^1$ ne le soit pas et que $\mathbb{P}_k^1$ le soit.

(6.5.11) Soit X un espace topologique. On démontre que X est quasi-compact si et seulement si pour tout espace topologique Y , la projection $X \times Y \rightarrow Y$ est *fermée* (cela signifie que l'image d'un fermé est fermé); si l'on suppose de plus X séparé, il est donc compact si et seulement si $X \times Y \rightarrow Y$ est fermée pour tout Y .

L'expérience a montré que c'est cette caractérisation de la compacité qui se prête le mieux à une transposition dans le monde des schémas – sous le nom de *propreté*. Pour pouvoir définir celle-ci, nous allons avoir besoin d'une première notion, celle de morphisme *universellement fermé*.

(6.5.12) Définition. Un morphisme de schémas $Y \rightarrow X$ est dit *universellement fermé* si pour tout X -schéma X' , l'application continue canonique $Y \times_X X' \rightarrow X'$ est fermée.

(6.5.13) Exemples et contre-exemples.

(6.5.13.1) Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme fini de schémas; il est universellement fermé. En effet, soit X' un X -schéma. Le morphisme $Y \times_X X' \rightarrow X'$ est fini, et est en conséquence fermé (prop. 5.4.23).

(6.5.13.2) Soit k un corps. Le morphisme $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec } k$ n'est pas universellement fermé (notez qu'il est par contre fermé, et qu'il n'a pas grand mérite puisque $\text{Spec } k$ est un point).

En effet, la projection $p: \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ par rapport à la seconde variable n'est pas fermée, puisque l'image par p de l'hyperbole $V(T_1 T_2 - 1)$ est l'ouvert $D(T_2)$, qui n'est pas fermé.

(6.5.14) Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas.

(6.5.14.1) Si $Y \rightarrow X$ est universellement fermé, alors pour tout X -schéma X' , le morphisme $Y \times_X X' \rightarrow X'$ est universellement fermé : c'est une conséquence immédiate de la définition, qui *impose* la stabilité par changement de base.

(6.5.14.2) Soit $Z \rightarrow Y$ un morphisme. Supposons que $Z \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow X$ soient universellement fermés ; la flèche composée $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ est alors universellement fermée.

En effet, soit X' un X -schéma. Posons

$$Y' = Y \times_X X' \text{ et } Z' = Z \times_X X' = Z \times_Y Y'.$$

Comme $Y \rightarrow X$ est universellement fermé, $Y' \rightarrow X'$ est fermé. Comme $Z \rightarrow Y$ est universellement fermé, $Z' \rightarrow Y'$ est fermé. Il est immédiat que la composée de deux applications fermées est fermée ; en conséquence, $Z' \rightarrow X'$ est fermé, et $Z \rightarrow X$ est universellement fermée.

(6.5.14.3) Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme. Supposons qu'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X tel que $Y \times_X U_i \rightarrow U_i$ soit universellement fermé pour tout i . Dans ce cas, $Y \rightarrow X$ est universellement fermé.

En effet, soit X' un X -schéma. Pour tout i , posons $U'_i = X' \times_X U_i$; la famille (U'_i) est un recouvrement ouvert de X' . Pour tout i , le morphisme

$$(Y \times_X U_i) \times_{U_i} U'_i = (Y \times_X X') \times_{X'} U'_i \rightarrow U'_i$$

est fermé, puisque $Y \times_X U_i \rightarrow U_i$ est universellement fermé. Il s'ensuit immédiatement, compte-tenu du fait qu'être fermé est, pour un sous-ensemble de X' , une propriété locale, que $Y \times_X X' \rightarrow X'$ est fermé, d'où notre assertion.

(6.5.15) Il est bien connu en topologie générale que si φ est une application continue d'un espace topologique compact Y vers un espace topologique *séparé* Z alors $\varphi(Y)$ est une partie fermée de Z . Nous allons énoncer un avatar de ce résultat dans le monde des schémas.

(6.5.16) Lemme. Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas universellement fermé, soit Z un X -schéma séparé et soit $\varphi: Y \rightarrow Z$ un X -morphisme. L'image $\varphi(Y)$ est un fermé de Z .

Démonstration. Le morphisme φ peut s'écrire comme la flèche composée

$$Y \xrightarrow{(\text{Id}, \varphi)} Y \times_X Z \longrightarrow Z.$$

Comme $Y \rightarrow X$ est universellement fermé, $Y \times_X Z \rightarrow Z$ est fermé. Il suffit donc pour conclure de s'assurer que $(\text{Id}, \varphi): Y \rightarrow Y \times_X Z$ a une image fermée. Nous allons pour ce faire montrer que le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{(\text{Id}, \varphi)} & Y \times_X Z \\ \varphi \downarrow & & \downarrow (\varphi \circ p, q) \\ Z & \xrightarrow{\delta} & Z \times_X Z \end{array}$$

(où δ est la diagonale de $Z \rightarrow X$, et où p et q sont les projections respectives de $Y \times_X Z$ vers Y et Z) est *cartésien* : sa flèche du bas étant une immersion

fermée en vertu de l'hypothèse de séparation faite sur le X -schéma Z , il en résultera que $(\text{Id}, \varphi): Y \rightarrow Y \times_X Z$ est une immersion fermée, et en particulier a une image fermée, ce qui achèvera la preuve.

Là encore, nous nous ramenons grâce au lemme de Yoneda au cas d'un diagramme analogue dans la catégorie des ensembles. Soit $(z, y, z') \in Z \times Y \times_X Z$ tel que $\delta(z) = (\varphi \circ p, q)(y, z')$, c'est-à-dire tel que $(z, z) = (\varphi(y), z')$, ou encore tel que $z' = z = \varphi(y)$. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique élément $\eta \in Y$ tel que $(\text{Id}, \varphi)(\eta) = (y, z')$ (c'est-à-dire tel que $\eta = y$ et $\varphi(\eta) = z'$) et tel que $\varphi(\eta) = z$. Or il est immédiat que $\eta = y$ est solution du problème, et est la seule. $\square$

(6.5.17) Définition. Un morphisme de schémas $Y \rightarrow X$ est dit *propre* s'il est séparé, de type fini et universellement fermé. On dira également que Y est un *X -schéma propre* ou que Y est *propre sur X* .

(6.5.17.1) Les propriétés, pour un morphisme, d'être séparé, d'être de type fini, et d'être universellement fermé sont stables par composition, par changement de base, et sont locales sur le but ; il en va donc de même pour la propriété.

(6.5.17.2) Un premier exemple. Tout morphisme fini est de type fini, est affine donc séparé (6.5.5.5), et est universellement fermé (6.5.13.1). Autrement dit, tout morphisme fini est propre. En particulier, une immersion fermée est propre (notez que le caractère universellement fermé peut être établi directement dans ce cas, alors que pour les morphismes finis généraux il fait *in fine* appel au lemme de *going-up*).

(6.5.18) Théorème. Soit X un schéma et soit n un entier. Le morphisme $\mathbb{P}_X^n \rightarrow X$ est propre.

Démonstration. Comme $\mathbb{P}_X^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} X$, et comme la propriété est stable par changement de base (6.5.17.1), il suffit de traiter le cas où $X = \text{Spec } \mathbb{Z}$. Le morphisme $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ est de type fini, et est séparé (cf. 6.5.6.3, ou directement le corollaire 6.4.12.1).

Il reste à s'assurer que $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ est universellement fermé, c'est-à-dire que $\mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$ est fermé pour tout Y . Le fait, pour une partie d'un schéma Y , d'être fermée dans Y est une propriété locale ; il en résulte qu'on peut supposer que Y est le spectre d'un anneau A .

(6.5.18.1) Soit I un idéal homogène de $A[T_0, \dots, T_n]$. Nous allons démontrer que l'image de $V(I) \subset \mathbb{P}_A^n$ sur $\text{Spec } A$ est fermée, ce qui permettra de conclure. L'immersion fermée $\text{Proj } A[T_0, \dots, T_n]/I \hookrightarrow \mathbb{P}_A^n$ induit un homéomorphisme $\text{Proj } A[T_0, \dots, T_n]/I \simeq V(I)$. Il suffit donc de vérifier que l'image de $\text{Proj } A[T_0, \dots, T_n]/I$ sur $\text{Spec } A$ est fermée ; nous allons plus précisément prouver que son complémentaire U est ouvert.

(6.5.18.2) Soit $x \in \text{Spec } A$. Notons $J(x)$ l'idéal de $\kappa(x)[T_1, \dots, T_n]$ engendré par l'image de I . La fibre de $\text{Proj } A[T_0, \dots, T_n]/I$ en x s'identifie à

$$\text{Proj } (A[T_0, \dots, T_n]/I) \otimes_A \kappa(x) = \text{Proj } \kappa(x)[T_0, \dots, T_n]/J(x).$$

Dire que $x \in U$ signifie que la fibre en question est *vide*, c'est-à-dire, en vertu de 6.1.13.1, que tout élément homogène de degré strictement positif de $\kappa(x)[T_0, \dots, T_n]/J(x)$ est nilpotent. Comme l'idéal $(\kappa(x)[T_0, \dots, T_n]/J(x))_+$

est engendré par $(T_0, \dots, T_n)$, cela revient à demander que les T_i soient nilpotents dans $\kappa(x)[T_0, \dots, T_n]/J(x)$, ou encore que $(\kappa(x)[T_0, \dots, T_n]/J(x))_d$ soit nul pour un certain d .

(6.5.18.3) Soit d un entier. On pose $I_d = I \cap A[T_0, \dots, T_n]_d$, et on définit le A -module Q_d par la suite exacte

$$0 \rightarrow I_d \rightarrow A[T_0, \dots, T_n]_d \rightarrow Q_d \rightarrow 0.$$

Pour tout $x \in \operatorname{Spec} A$, l'exactitude à droite du produit tensoriel garantit l'exactitude de la suite

$$I_d \otimes_A \kappa(x) \rightarrow \kappa(x)(T_0, \dots, T_n)_d \rightarrow Q_d \otimes_A \kappa(x) \rightarrow 0,$$

ce qui montre que $Q_d \otimes_A \kappa(x) \simeq (\kappa(x)[T_0, \dots, T_n]/J(x))_d$. Par conséquent, il découle de 6.5.18.1 que le point x appartient à U si et seulement si il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $Q_d \otimes_A \kappa(x) = \{0\}$.

(6.5.18.4) Soit d un entier ; rappelons que $\widetilde{Q}_d$ désigne le faisceau quasi-cohérent sur $\operatorname{Spec} A$ associé au A -module Q_d . Si $x \in \operatorname{Spec} A$, l'espace vectoriel $Q_d \otimes_A \kappa(x)$ s'identifie à $\widetilde{Q}_d \otimes \kappa(x)$, au sens de la notation tensorielle introduite au 3.3.13. Comme Q_d est de type fini d'après sa définition, il s'écrit comme un quotient de A^m pour un certain m , et $\widetilde{Q}_d$ s'écrit dès lors comme un quotient de $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}^m$. Il résulte alors du corollaire 3.3.17 (voir aussi les commentaires qui le suivent en 3.3.17.1) que le sous-ensemble V_d de $\operatorname{Spec} A$ constitué des points x tels que $Q_d \otimes_A \kappa(x) = \widetilde{Q}_d \otimes \kappa(x) = \{0\}$ est ouvert.

L'ensemble U étant égal en vertu de 6.5.18.3 à la réunion des V_d pour $d \in \mathbb{N}$, il est ouvert, ce qui achève la démonstration. $\square$

(6.5.19) Corollaire. *Tout morphisme projectif (6.5.6.4) est propre.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 6.5.18 ci-dessus, du fait que les immersions fermées sont propres (6.5.17.2), et du bon comportement de la propriété à divers égards (6.5.17.1). $\square$

Un «principe du maximum» en géométrie algébrique

(6.5.20) Nous nous proposons pour terminer ce cours d'établir une variante algébrique du principe du maximum de la géométrie complexe. Nous aurons besoin du lemme suivant.

(6.5.21) Lemme. *Soit X un schéma irréductible et réduit. L'anneau $\mathcal{O}_X(X)$ est intègre.*

Démonstration. Comme $X \neq \emptyset$ (puisqu'il est irréductible), l'anneau $\mathcal{O}_X(X)$ est non nul (3.3.4.3). Soient f et g deux éléments de $\mathcal{O}_X(X)$ tels que $fg = 0$. On a alors $X = V(fg) = V(f) \cup V(g)$, et comme X est irréductible il vient $X = V(f)$ ou $X = V(g)$. Supposons par exemple que $X = V(f)$. La restriction de f à tout ouvert affine de X est alors nilpotente, donc nulle puisque X est réduit ; il s'ensuit que $f = 0$. On a de même $g = 0$ si $X = V(g)$, ce qui achève la preuve. $\square$

(6.5.22) Théorème. *Soit k un corps et soit X un k -schéma propre, irréductible et réduit. L'anneau $\mathcal{O}_X(X)$ est une extension finie de k ; en particulier, $\mathcal{O}_X(X) = k$ si k est algébriquement clos.*

Démonstration. Comme X est irréductible et réduit, l'anneau $\mathcal{O}_X(X)$ est intègre d'après le lemme 6.5.21. Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Elle induit un k -morphisme $\psi: X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$, caractérisé par le fait que $\psi^*T = f$ (cf. 5.6.3.1). La composée de ψ et de l'immersion ouverte $\mathbb{A}_k^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$ (obtenue en identifiant $\mathbb{A}_k^1$ à l'une des deux cartes affines standard de $\mathbb{P}_k^1$) est un k -morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$. Comme le k -schéma X est propre, et en particulier universellement fermé, et comme $\mathbb{P}_k^1$ est séparé sur k , l'image $\psi(X)$ est fermée dans $\mathbb{P}_k^1$ (lemme 6.5.16). Étant par ailleurs contenue dans $\mathbb{A}_k^1$, cette image est nécessairement un ensemble fini de points fermés, et consiste finalement en un unique point fermé x car X est irréductible.

Le point fermé x de $\mathbb{A}_k^1$ correspond à un polynôme irréductible P de k ; comme X est réduit, ψ se factorise par $\{x\}_{\text{red}} = \text{Spec } k[T]/P$, ce qui veut dire que $P(f) = P(\psi^*T) = \psi^*P(T) = 0$.

L'anneau $\mathcal{O}_X(X)$ est ainsi une k -algèbre intègre dont tous les éléments sont entiers sur k ; c'est donc un corps (lemme 2.8.11). Il reste à s'assurer qu'elle est de type fini sur k .

Le k -schéma X est propre, et donc de type fini. Il est non vide car irréductible, et possède donc un point fermé y . L'évaluation en y est un k -morphisme de $\mathcal{O}_X(X)$ dans $\kappa(y)$, injectif puisque $\mathcal{O}_X(X)$ est un corps. Comme $[\kappa(y) : k] < +\infty$, le corps $\mathcal{O}_X(X)$ est une extension finie de k . $\square$