Benoît Stroh

SURFACES DE RIEMANN

Benoît Stroh

Septembre 2020

SURFACES DE RIEMANN

Benoît Stroh

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les surfaces de Riemann sont des objets omniprésents dans les mathématiques modernes : bien sûr en analyse et en géométrie complexe, mais aussi en géométrie algébrique, en théorie des nombre et en théorie des groupes.

En un mot, les surfaces de Riemann sont aux variétés différentiables ce que les fonctions holomorphes sont aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, à des hypothèses techniques mineures près, une surface de Riemann est un espace topologique X muni d'un atlas dont le but des cartes est formé d'ouverts de $\mathbb{C}$ et dont les changements de carte sont des biholomorphismes. On peut alors définir la notion de fonction holomorphe sur X en utilisant l'atlas. De même pour les fonctions méromorphes ou les morphismes de surfaces de Riemann.

Une remarque sur le terme de « surface » : les surfaces sont localement modelées sur des ouverts de $\mathbb{R}^2$ donc sont des ouverts au sens de la géométrie. Puisqu'elles sont aussi modelées sur des ouverts de $\mathbb{C}^1$, on les appele aussi courbes complexes.

On peut également développer une théorie en toute dimension, en considérant les variétés localement modelées sur des ouverts de $\mathbb{C}^n$ pour lesquelles les changements sont des biholomorphismes à n variables. On en parlera de temps en temps, mais la contrainte est qu'il faut au préalable développer le formalisme des fonctions holomorphes à plusieurs variables, et notamment ce qui généralise les formules de Cauchy. Tout cela sera fait en détail dans le de géométrie complexe et de théorie de Hodge.

Toutefois on remarquera que même si on se restreint à l'étude des surfaces de Riemann, qui sont donc de dimension complexe 1, des objets de dimension complexe 2 apparaîtront très vite : par exemple un champ de vecteur holomorphe sur la surface de Riemann X sera une section du morphisme de variétés complexe $TX \to X$, où TX est le fibré tangent de X et forme donc une variété complexe de dimension 2.

Local et global. — La différence entre les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en (x, y) et les fonctions holomorphes en $z = x + iy$ sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est bien connue : les fonctions holomorphes vérifient le principe du maximum et la formule de Cauchy, donc si f est holomorphe sur la boule

$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1\}$, sa restriction à la boule $D(0,1/2)$ est déterminée par sa restriction au cercle $C(0,1/2) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z = 1/2\}$.

Toutefois la différence la plus frappante entre les surfaces de Riemann et les variétés différentiables est globale, lorsque la variété X est compacte. En effet, nous verrons alors par le théorème de Liouville que toute fonction holomorphe sur X est constante.

Nous montrerons également un théorème d'algébrisation puissant et surprenant : si X est une surface de Riemann compacte, elle est égale au lieu d'annulation dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de polynômes homogènes à $n+1$ variables. Cela se fera en deux étapes : tout d'abord on montrera que X est une sous-variété analytique de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Cela résultera assez facilement du théorème de Riemann-Roch. On esquissera ensuite la démonstration du théorème GAGA (géométrie algébrique, géométrie analytique) de Serre qui garantit que toute sous-variété analytique de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est en fait projective. Ce théorème frappant est une motivation à lui seul pour introduire la cohomologie des faisceaux et l'algèbre homologique dont nous parlerons dans le paragraphe suivant.

Une fois X vue comme lieu d'annulation de polynômes homogènes dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, on peut parler de fonctions rationnelles sur X : ce sont les quotients de polynômes homogènes où le dénominateur n'est pas identiquement nul sur X. On obtiendra alors comme conséquence de GAGA un « super théorème de Liouville » affirmant que si X est compacte, toute fonction méromorphe sur X est rationnelle. Le cas particulier où $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est en fait un exercice facile d'analyse complexe disant que si f est holomorphe entière bornée par un polynôme, c'est un polynôme.

On voit donc que la théorie des surfaces de Riemann compacte est intimement liée à la géométrie algébrique.

Faisceaux et cohomologie. — L'outil principal pour relier les propriétés locales aux propriétés globales sur une surface de Riemann sera la théorie des faisceaux. Elle est abordée dans le cours Outil de la géométrie algébrique, mais nous ferons ici les rappels élémentaires nécessaires. Nous serons alors amenés à introduire les groupes de cohomologie des faisceaux, qui codent la différence entre l'existence locale de fonctions holomorphes vérifiant certaines propriétés et leur existence globale. Par exemple l'obstruction à ce qu'une fonction holomorphe inversible g sur X s'écrive $g = e^f$ avec f holomorphe sera contenue dans un $\mathbb{Z}$-module noté $H^1(X,\mathbb{Z})$. De même l'obstruction à ce qu'une fonction holomorphe g sur X ait une primitive sera contenue dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^1(X,\mathbb{C})$. Aussi si $P,Q,R \in X$, l'obstruction à ce qu'il existe pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ une fonction holomorphe f sur X vérifiant $f(P) = a, f(Q) = b, f(R) = c$ sera contenu dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel noté $H^1(X,\mathcal{O}_X(-(P)-(Q)-(R)))$.

Définir de tels groupes de cohomologie est donc naturel, mais pour que ce soit réellement utile, encore faut-il être capable de les calculer ! Ce sera l'objet du théorème de Riemann-Roch qui calculera tous les groupes du type $H^1(X,\mathcal{O}_X(-(P)-(Q)-(R)))$. C'est d'ailleurs ce théorème qui nous permettra d'algébriser les surfaces de Riemann compactes et leurs fonctions méromorphes.

On peut d'ailleurs comprendre sous le prisme de la cohomologie la différence entre les surfaces de Riemann et les variétés différentielles dans le cas compact : en géométrie différentielle, tous les groupes de cohomologie en degré > 0 de faisceaux formés de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sont nuls, et il n'y a donc peu de différence entre l'existence locale de fonctions vérifiant certaines propriétés et leur existence globale. La raison de cette annulation des groupes de cohomologie est l'existence de partitions de l'unité, qui existent en effet dans le monde $\mathcal{C}^\infty$ mais pas dans le monde holomorphe.

Exemples de surfaces de Riemann. — Il nous reste à donner quelques exemples de surfaces de Riemann.

On peut commencer par les courbes algébriques complexes : si $P(X, Y, Z)$ est un polynôme homogène vérifiant qu'il n'existe pas $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus (0, 0, 0)$ tel que $P(x, y, z) = 0$, $\partial P/\partial X(x, y, z) = 0$, $\partial P/\partial Y(x, y, z) = 0$ et $\partial P/\partial Z(x, y, z) = 0$ alors

$$\mathcal{X} = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \text{ tq } P(X, Y, Z) = 0\}$$

est une surface de Riemann compacte. Le cas le plus élémentaire est celui où $P(X, Y, Z) = Z$ et on trouve alors $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, la droite projective complexe qui est aussi appelée la sphère de Riemann. Elle est en effet homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Dans le cas non compact, on peut bien sûr considérer les ouverts de $\mathbb{C}$, qui sont des surfaces de Riemann. On peut par exemple considérer le demi-plan de Poincaré

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \Im m(z) > 0\}$$

qui est d'ailleurs isomorphe en tant que surface de Riemann au disque ouvert

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1\}$$

par l'application $\mathcal{D} \to \mathcal{H}$, $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$.

On peut enfin prendre des quotients de surfaces de Riemann par l'action de groupes discrets agissant proprement sans points fixes. Par soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau, que l'on peut supposer de la forme $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ où $\tau \in \mathcal{H}$ quitte à le dilater et à le translater. Alors le quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ est une surface de Riemann compacte, appelée courbe elliptique. Les courbes elliptiques seront étudiées en cours fondamentaux I et sont utiles dans des domaines aussi divers que l'astronomie (les longueurs d'arcs d'ellipses sont données par des fonctions méromorphes sur les courbes elliptiques), la cryptographie (les cryptosystèmes à clé publique comme RSA sont aujourd'hui basés sur les courbes elliptiques) et la théorie des nombres (la démonstration par Wiles du théorème de Fermat utilise crucialement les courbes elliptiques).

Si $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un sous groupe discret vérifiant certaines hypothèses, on pourra aussi considérer le quotient $\mathcal{H}/\Gamma$ qui est une surface de Riemann, où $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathcal{H}$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Le cas où $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ contient le sous-groupe des matrices triviales modulo N pour un certain N est notable et $\mathcal{H}/\Gamma$ s'appelle alors une courbe modulaire. Les fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}/\Gamma$ seront appelées des formes modulaires et seront étudiées dans un cours fondamental I. Les formes modulaires sont aussi utilisées dans la démonstration du théorème de Fermat.

Genre et uniformisation. — Si X est une surface de Riemann compacte, c'est une surface différentiable compacte, connexe et orientable. On peut donc lui appliquer le théorème de classification bien connu de ce type d'objets, et prouver qu'elle est homéomorphe à un tore à g trou. On appelera g le genre de X et c'est un invariant fondamental. On peut alors chercher à classifier toutes les surfaces de Riemann ayant un genre donné.

Il sera aisé de voir que $\mathbb{P}^1_C$ est l'unique surface de Riemann de genre 0. Nous verrons ensuite que toute surface de Riemann de genre 1 est une courbe elliptique.

Le difficile théorème d'uniformisation de Poincaré, que nous n'aborderons pas, garantit quant à lui que toute surface de Riemann de genre ≥ 2 est égale à $\mathcal{H}/\Gamma$ pour un certain $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Cela fait évidemment le lien entre théorie des surfaces de Riemann et théorie des groupes.

Plan du cours. — Dans le premier chapitre on introduira les définitions de base : surfaces de Riemann, morphisme, fonction et forme différentielle méromorphe. On introduira le langage des faisceaux et on en verra de nombreux exemples. On traitera extensivement le cas de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dans lequel on cherchera à tout calculer.

Dans le second chapitre, on étudiera les courbes elliptiques complexes. On montrera qu'elles sont algébriques en introduisant des formes modulaires comme les séries d'Eisenstein et le j-invariant.

Dans le troisième chapitre, on introduira les courbes algébriques complexes. Il y aura ici des liens avec le cours de Variétés algébriques, mais nous nous cantonnerons à un point de vue élémentaire.

Dans le quatrième chapitre, on étudiera les revêtements ramifiés de surfaces de Riemann. On développera des outils comme le théorème des résidus qui seront nécessaires à la suite de notre étude.

On énoncera alors le théorème de Riemann-Roch, ce qui nécessite d'introduire la cohomologie des faisceaux cohérents. On montrera des conséquences frappantes de ce théorème, comme l'algébrisation des surfaces de Riemann compactes. On esquissera notamment la preuve du principe GAGA de Serre.

Dans le dernier chapitre, on prouvera le théorème de Riemann-Roch et un des ses théorèmes compagnon, la dualité de Serre. Nous utiliserons tout l'attirail de la cohomologie des faisceaux (cohomologie de Cech et de Dolbeaut) et nous finirons avec l'énoncé de la théorie de Hodge pour les surfaces de Riemann.

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉS

2.1. Surface de Riemann

Définition 2.2. — Une surface de Riemann est un espace topologique X séparé, connexe, muni d'un recouvrement ouvert $X = \cup_{i \in I} U_i$, d'une famille $(V_i)_{i \in I}$ d'ouverts de $\mathbb{C}$, d'homéomorphismes $\phi_i : U_i \to V_i$ tels que $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ soit un biholomorphisme entre ouverts de $\mathbb{C}$.

Remarque 2.3. — Une surface de Riemann est donc en particulier une surface du point de vue de la géométrie différentielle, puisque $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ et qu'un biholomorphisme est un difféomorphisme. Elle est de dimension 2 réelle, mais de dimension 1 complexe d'où l'autre nom de courbe complexe.

On peut détailler la source et le but de $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$: sa source est $\phi_j(U_i \cap U_j)$ et son but est $\phi_i(U_i \cap U_j)$. On laissera fréquemment tomber de tels détails plus ou moins évident, mais qui alourdissent les notations. Rappelons également qu'un biholomorphisme (ou équivalence conforme) est une application holomorphe, bijective, de réciproque holomorphe.

La collection $(U_i, V_i, \phi_i)_{i \in I}$ est appelé un atlas holomorphe de X, et pour tout $i \in I$, le triplet (U_i, V_i, ϕ_i) est une carte de cet atlas.

Dans la définition d'une surface de Riemann, il est entendu que l'atlas $(U_i, V_i, \phi_i)_{i \in I}$ est pris à une relation d'équivalence près : deux atlas $(U_i, V_i, \phi_i)_{i \in I}$ et $(U'_j, V'_j, \phi_j)_{j \in J}$ sont équivalents si leur concaténation $(U_i, V_i, \phi_i)_{i \in I} \coprod (U'_j, V'_j, \phi'_j)_{j \in J}$ reste un atlas, donc si $\phi_i \circ \phi'_j$ est un biholomorphisme entre ouverts de $\mathbb{C}$ pour tous $i \in I, j \in J$.

Remarque 2.4. — On ne demande pas à X d'être un espace topologique à base dénombrable, contrairement à la définition des variétés différentielles. C'est en fait toujours vrai par un théorème de Poincaré-Volterra. On impose par contre à X d'être connexe ce qui est juste par commodité : par exemple l'anneau $\mathcal{M}(X)$ des fonctions méromorphes sur X est alors un corps. On pourrait bien sûr développer une théorie des surfaces de Riemann non connexes.

Exemple 2.5. — Soit X une surface de Riemann d'atlas $(U_i, V_i, \phi_i)_{i\in I}$ et $U \subset X$ un ouvert. Si U est connexe (ou bien si on s'autorise des variantes non connexes de la théorie) alors c'est une surface de Riemann d'atlas $(U_i \cap U, V_i \cap \phi_i(U), \phi_i)_{i\in I}$.

Exemple 2.6. — Soit $X \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Alors c'est une surface de Riemann muni d'un atlas à une carte (X, X, Id_X). Néanmoins les cartes étant prises à équivalence près, pour tout biholomorphisme ϕ de X, la structure de surface de Riemann de X est aussi définie par l'atlas (X, X, ϕ). Or on ne veut introduire que des notions dépendant de la structure de surface de Riemann, mais indépendantes du choix de l'atlas particulier. Cela impose de définir sur X des notions invariantes par application d'un biholomorphisme $\phi : X \to X$.

Par exemple il est courant en analyse complexe de parler du résidu $\mathrm{Res}_P(f) \in \mathbb{C}$ pour tout $P \in X \subset \mathbb{C}$ et f méromorphe sur X. Mais si $X = \mathbb{C}$ et $\phi(z) = 2z$ qui est évidemment un biholomorphisme de X et si $f(z) = 1/z$ alors $\mathrm{Res}_P(f) = 1$ et $\mathrm{Res}_P(f \circ \phi) = 1/2$. Donc le résidu d'une fonction méromorphe n'est pas invariant par précomposition par un biholomorphisme (ie n'est pas invariant par changement holomorphe de coordonné). En conséquence une fonction méromorphe sur une surface de Riemann générale n'aura pas de résidu !

On verra au contraire que ce sont les 1-formes différentielles méromorphes qui admettent des résidus invariants par application d'un biholomorphisme.

Remarque 2.7. — On pourrait définir de manière très similaire une variété complexe (lisse) de dimension complexe $n \geq 1$: ce serait un espace topologique X muni d'un atlas $(U_i, V_i, \phi_i)_{i\in I}$ où $V_i \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert et $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est un biholomorphisme entre ouverts de $\mathbb{C}^n$. Mais pour cela il faudrait définir la notion de biholomorphisme, donc la notion de fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. C'est possible et facile. La théorie admet néanmoins rapidement des subtilités, concernant par exemple les formules de Cauchy en dimension n. Le lecteur intéressé pourra consulter Griffiths-Harris, Principles of algebraic geometry, Chapter I ou Claire Voisin, Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, 1er chapitre.

Dans ce cours on évitera souvent de parler de variétés complexes de dimension > 1 mais elles apparaitront néanmoins entre les lignes : par exemple le fibré tangent $TX \to X$ d'une surface de Riemann sera une fibration en $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension 1, donc TX sera une variété complexe de dimension 2. Un autre exemple sera l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$ de dimension n.

2.8. Fonctions holomorphes et méromorphes

Définition 2.9. — Si X est une surface de Riemann munie d'un atlas (U_i, V_i, ϕ_i), si $P \in X$ et si $f : X \to \mathbb{C}$ est une fonction, on dit que f est holomorphe en P s'il elle l'est en une carte centrée en P. Ainsi si $i \in I$ vérifie $P \in U_i \subset X$, on demande que $f \circ \phi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{C}$ soit holomorphe.

On dit que f est holomorphe si elle est holomorphe en tout point $P \in X$.

Cette définition est intéressante car elle ne dépend ni du choix de la carte $P \in U_i$, ni de l'atlas. En effet si ϕ est un biholomorphisme entre ouverts de $\mathbb{C}$ et si g est une fonction sur un ouvert de C alors g est holomorphe si et seulement si $g \circ \phi$ est holomorphe.

Définition 2.10. — Soient X et Y deux surfaces de Riemann et $f : X \to Y$ une application. Soit $(U_i, V_i, \phi_i)_{i \in I}$ un atlas de X et $(U'_j, V'_j, \phi_j)_{j \in J}$ un atlas de Y tels que pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ vérifiant $f(U_i) \subset U'_j$. On dit que f est un morphisme de surfaces de Riemann si $\phi'_j \circ f \circ \phi_i^{-1} : V_i \to V'_j$ est holomorphe pour tout $i \in I$.

Remarque 2.11. — Ainsi une fonction holomorphe sur X est exactement un morphisme de surfaces de Riemann $X \to \mathbb{C}$, où $\mathbb{C}$ est muni de sa structure de Riemann canonique.

On définit de la même façon que les fonctions holomorphes la notion de fonction méromorphe $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$. On écrit $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ plutôt que $f : X \to \mathbb{C}$ car f n'est pas définie partout (elle est définie et à valeurs dans $\mathbb{C}$ seulement hors de son lieu polaire). On verra dans l'exemple REF que toute fonction méromorphe $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ définit exactement un morphisme de surface de Riemann $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tel que le lieu polaire de f est $F^{-1}(\infty)$.

Définition 2.12. — Si $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ est méromorphe non nulle, on définit son ordre en $P \in X$ comme étant l'entier $ord_P(f) := ord_{\phi_i(P)} f \circ \phi_i^{-1} \in \mathbb{Z}$ où $P \in U_i$.

Encore une fois cette définition ne dépend ni du choix de la carte $U_i \ni P$ ni du choix de l'atlas car l'ordre d'une fonction méromorphe est invariant par précomposition par un biholomorphisme.

Définition 2.13. — On note $\mathcal{M}(X)$ l'anneau des fonctions méromorphes sur X. C'est un corps car X est connexe. Il contient le sous-corps des constantes $\mathbb{C}$.

Remarque 2.14. — Lorsque X est compacte, il n'est pas évident que l'inclusion $\mathbb{C} \subset \mathcal{M}X$ soit stricte. Autrement dit les seules fonctions méromorphes globales pourraient être constantes (penser au théorème 2.26 de Liouville concernant les fonctions holomorphes globales). On verra grâce au théorème de Riemann-Roch que ce n'est pas le cas et que $\mathcal{M}(X)/\mathbb{C}$ est de degré de transcendance 1.

Définition 2.15. — On définit un diviseur de X comme une somme formelle $D = \sum_{x \in X} n_x \cdot [x] \in \prod_{x \in X} \mathbb{Z}$ de support discret dans X. Ici $[x]$ désigne un symbole formel, et le support Supp(D) est l'ensemble des $x \in X$ tels que $n_x = 0$.

On note $\mathrm{Div}(X)$ le groupe additif des diviseurs de X. On remarque que si X est compacte, un diviseur est à support fini (car discret dans un compact) et donc $\mathrm{Div}(X) = \mathbb{Z}[X]$ est le groupe abélien libre sur X.

Définition 2.16. — Si $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ est méromorphe non nulle, on définit son diviseur $\mathrm{div}(f) = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f) \cdot [x] \in \mathrm{Div}(X)$, qui est bien de support discret.

Remarque 2.17. — Ainsi $\mathrm{div}(f)$ détermine les pôles et les zéros de f comptés avec multiplicité (x est un zéro si $n_x > 0$ et un pôle si $n_x < 0$).

Définition 2.18. — Un diviseur $D = \sum_{P \in X} n_P \cdot [P]$ est positif (noté $D \geq 0$) si $n_P \geq 0$ pour tout $P \in X$. Pour $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$, on note $D \geq D'$ si $D - D' \geq 0$.

Ainsi f est holomorphe si et seulement si $\mathrm{div}(f) \geq 0$.
On a construit une application $\mathrm{div} : \mathcal{M}(X)^* \to \mathrm{Div}(X)$ dont on vérifie sans peine que c'est un morphisme de groupe.

Définition 2.19. — Un diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)$ est principal s'il s'écrit $D = \mathrm{div}(f)$ où $f \in \mathcal{M}(X)$ est méromorphe sur X.

Remarque 2.20. — Si D est principal, la fonction f est unique modulo multiplication par toute fonction méromorphe g vérifiant $\mathrm{div}(g) = 0$. Mais cela impose que g soit holomorphe sans zéro sur X. Ainsi f est unique à multiplication par une fonction holomorphe inversible près.

Exemple 2.21. — Si $X \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, tout diviseur à support fini est principal : prendre pour f un polynôme. On a mieux : si $X = \mathbb{C}$ ou $X = D(0,1)$ est le disque centré en 0 de rayon 1, alors tout diviseur de X est principal. Cela résulte du théorème de préparation de Weierstrass. Dans le cas où $X = D(0,1)$, le lecteur pourra également se rappeler les produits de Blaschke en analyse complexe...

Remarque 2.22. — Par contre lorsque X est compacte il est faux que tout diviseur soit principal. Nous verrons dans la proposition 5.24 qu'il faut nécessairement imposer que $\deg(D) = \sum_{x \in X} n_x = 0 \in \mathbb{Z}$. Cela n'est une condition suffisante que lorsque $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (voir l'exercice 2.66).

Pour X compacte quelconque, trouver des conditions déterminant les diviseurs principaux est connu comme le problème de Cousin (second problème multiplicatif de Cousin). Il s'agit d'une question naturelle : trouver des fonctions méromorphes à pôles et zéros prescrits, avec ordre prescrit. Ce problème a eu un rôle-clé dans le développement de l'analyse et de la géométrie complexe, notamment dans ses variantes en dimension > 1. Aucune réponse simple n'est connue. Ce problème a été reformulé par Elie Cartan en utilisant la théorie des faisceaux et comme souvent, cette reformulation n'apporte pas de réponse facile, mais elle permet de comprendre précisément la difficulté du problème.

Nous introduirons progressivement la théorie des faisceau dans ce cours, et expliquerons le rapport avec le problème de Cousin.

2.22.1. Définition purement dans les cartes des fonctions holomorphes. — L'avantage de notre définition 2.9 d'une fonction holomorphe sur X est qu'on est parti d'un objet bien définie (ie une fonction ensembliste $f : X \to \mathbb{C}$) auquel on a imposé des propriétés locales dans les cartes, ces propriétés étant de plus indépendantes du choix des cartes et atlas. Donnons maintenant une définition équivalente d'une fonction holomorphe sur X, où l'on se contente de définir des objets dans les cartes, ces objets étant assujettis à des conditions de recollement. Cela sera utile lorsqu'on parlera de formes différentielles.

Définition 2.23. — Une fonction holomorphe f sur X muni d'un atlas (U_i, V_i, ϕ_i) est la donné pour tout $i \in I$ d'une fonction holomorphe $f_i : V_i \to \mathbb{C}$ telle que $f_j = f_i \circ \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ pour tous $i, j \in I$.

Cette définition est bien sûr indépendante du choix d'un atlas. L'équation de recollement $f_j = f_i \circ \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est bien sûr équivalente à la définition du changement de base d'une fonction holomorphe sur un ouvert $V \subset \mathbb{C}$ par un changement de coordonnée (ie par un biholomorphisme $\phi : V \to V$ du type $z \mapsto z' = z(z+1)$). On a en effet $\phi^*(f) = f \circ \phi$ par définition, ce qui dans notre exemple donne $\varphi^*(f)(z') = f(z') = f(\varphi(z)) = f(z(z+1))$.

2.23.1. Propositions diverses. — Nous établissons dans cette fonctions des propositions faciles qui nous serviront tout le temps.

Proposition 2.24. — *Soit X une surface de Riemann, $P \in X$ et $f : X - \{P\} \to \mathbb{C}$ holomorphe qui est bornée au voisinage de P. Alors f s'étend en une fonction holomorphe sur X.*

Démonstration. — La question est locale autour de P, et se résout dans une carte $P \in U \subset X$ avec $\phi : U \to V \subset \mathbb{C}$. On se ramène donc à l'énoncé bien connu en analyse complexe relatif à $f \circ \phi^{-1} : V - \{\phi(P)\} \to \mathbb{C}$. □

L'unicité du prolongement analytique reste également vraie sur les surfaces de Riemann (qui sont supposées connexes par définition).

Proposition 2.25. — *Soit X une surface de Riemann et $D \subset X$ un sous-ensemble contenant un point d'accumulation. Si $f, g : X \to \mathbb{C}$ coïncident sur D, on a $f = g$ sur X.*

Démonstration. — Par hypothèse il existe un ouvert de l'atlas U_1 tel que $D \cap U_1$ contient un point d'accumulation. On peut donc appliquer l'unicité du prolongement analytique usuel sur $V_1 \subset \mathbb{C}$ et on a $f = g$ sur U_1. On peut continuer de même avec tous les ouverts U_i tels que $U_i \cap U_1 \neq \emptyset$, car $U_i \cap U_1$ contient alors un point d'accumulation, et ainsi de suite de proche en proche. □

Enfin le théorème de Liouville est fondamental pour les surfaces de Riemann compactes.

Proposition 2.26. — *Soit X une surface de Riemann compacte et f holomorphe sur X. Alors f est constante.*

Démonstration. — La fonction $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ est continue donc atteint son maximum en $P \in X$. En prenant une carte $P \in U \to V \subset \mathbb{C}$, on voit que $f \circ \phi^{-1}$ contredit le principe du maximum sur V, donc est constante. Donc f est constante sur U, puis on applique la proposition 2.25 pour en déduire qu'elle est constante partout. □

2.26.1. Faisceaux 1. — Le théorème de Liouville nous dit donc que les fonctions holomorphes globales ne sont pas intéressantes lorsque X est compact. Elles sont par contre cruciales localement, sur de petits ouverts. La théorie des faisceaux va justement nous servir à différencier les propriétés locales et globales de certains ensembles de fonctions, cela étant mis dans un cadre formel. Nous l'utiliserons tout au long de ce poly en la développant au fur et à mesure.

Définition 2.27. — Soit X un espace topologique. Un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X est la donné pour tout ouvert $U \subset X$ d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$, et la donnée pour tous ouverts $U \subset V \subset X$ d'une application $\mathrm{res}_{V/U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$. On demande que $\mathrm{res}_{U/U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$, et que pour tous $U \subset V \subset W \subset X$, on ait $\mathrm{res}_{V/U} \circ \mathrm{res}_{W/V} = \mathrm{res}_{W/U}$.

On appellera les éléments de $\mathcal{F}(U)$ les sections de $\mathcal{F}$ sur U. On notera fréquemment $H^0(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$. On peut penser aux sections de $\mathcal{F}$ sur U comme certaines fonctions généralisées, mais ce ne sont pas nécessairement des fonctions ensemblistes sur U. Cela peut par exemple être des formes différentielles, des champs de vecteurs, des sections de fibrés vectoriels etc.

Remarque 2.28. — On vient de définir les faisceaux en ensembles. On définit de même les faisceaux en groupes (ou groupes abéliens, anneaux, etc) en demandant que $\mathcal{F}(U)$ soit un groupe pour tout U, et que $\mathrm{res}_{U/V}$ soit un morphisme de groupes.

Exemple 2.29. — On dispose des préfaisceaux suivants :

- **i.** $\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des fonctions ensemblistes $U \to \mathbb{C}$, et $\mathrm{res}_{V/U}$ est la restriction des fonctions.
- **ii.** $\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des fonctions continues $U \to \mathbb{C}$.
- **iii.** Si X est une variété différentiable, $\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur U.
- **iv.** Si X est une variété différentiable, $\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des k-formes différentielles sur U.
- **v.** $\mathcal{F}(U) = \mathbb{C}$ pour tout U, et $\mathrm{res}_{V/U}$ est l'identité pour tous U, V.

vi. $\mathcal{F}(U) = \mathbb{C}^{\pi_0(U)}$ est l'ensemble des fonctions localement constantes $U \to \mathbb{C}$, et $\mathrm{res}_{V/U}$ la restriction des fonctions. On note usuellement $\mathcal{F} = \underline{\mathbb{C}}_X$, et de même en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Z}$ etc.

On voit donc que les préfaisceaux ne paramètrent pas nécessairement des fonctions, même si c'est bien sûr la situation typique qu'il faut avoir en tête.

Exemple 2.30. — Si on note $\mathcal{F}(U)$ l'ensemble des fonctions à support compact sur U, on n'obtient pas un préfaisceau. En effet la restriction ne préserve pas la compacité du support. Il y a une notion un peu exotique de cofaisceau $\mathcal{G}$, qui sont munis pour tous $U \subset V$ d'un morphisme de corestriction $\mathrm{cores}_{U,V} : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$ et notre $\mathcal{F}$ est un cofaisceau.

Remarque 2.31. — On peut dire qu'un préfaisceau est un foncteur contravariant $\mathcal{F}$: $\mathrm{Ouv}(X) \to \mathrm{Ens}$ vers la catégorie des ensembles, avec des variantes claires pour les faisceaux en groupes etc. Ici $\mathrm{Ouv}(X)$ désigne la catégorie dont les objets sont les ouverts de X, et où $\mathrm{Hom}(U, V) = \emptyset$ sauf si $U \subset V$, auquel cas $\mathrm{Hom}(U, V)$ consiste en un unique élément (qu'on peut considérer comme étant l'inclusion de U dans V).

Lorsque $\mathcal{F}$ est un préfaisceau, il n'y a *a priori* aucun lien entre $\mathcal{F}(U_i)$ pour $U_i \subset X$ parcourant un recouvrement ouvert, et $\mathcal{F}(X)$. Par exemple on peut très bien imaginer $\mathcal{F}(X) = \emptyset$ et $\mathcal{F}(U_i) \neq \emptyset$, ou au contraire $\mathcal{F}(U_i) = \{pt\}$ pour tout i alors que $\mathcal{F}(X)$ est très grand. La définition de faisceau vient imposer de telles contraintes.

Définition 2.32. — Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est un faisceau si pour tout ouvert $U \subset X$ et tout recouvrement ouvert $U = \cup_{i \in I} U_i$, on a les axiomes

i. l'application $\prod_{i \in I} \mathrm{res}_{U/U_i} : \mathcal{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ est injective.

ii. étant donné une famille $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ pour tout $i \in I$, il existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tel que $\mathrm{res}_{U/U_i}(f) = f_i$ pour tout $i \in I$ si et seulement si $\mathrm{res}_{U_i,U_{ij}}(f_i) = \mathrm{res}_{U_j,U_{ij}}(f_j)$ pour tous $i, j \in I$. On a noté $U_{i,j} = U_i \cap U_j$.

Ainsi un préfaisceau $\mathcal{F}$ est un faisceau si les éléments de $\mathcal{F}(U)$ sont "de nature locale" pour tout U : ils doivent être déterminés par leur restriction à un recouvrement par de plus petits ouverts, et inversement une famille de sections de $\mathcal{F}$ sur les termes du recouvrement dont les restrictions coïncident sur les intersections 2 à 2 doit provenir d'une section sur U. La plupart des préfaisceaux usuels sont des faisceaux :

Exemple 2.33. — On dispose des faisceaux suivants :

i. $\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des fonctions ensemblistes $U \to \mathbb{C}$.

ii. $\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des fonctions continues $U \to \mathbb{C}$.

iii. Si X est une variété différentiable, $\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur U.

iv. Si X est une variété différentiable, $\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des k-formes différentielles sur U.

v. $\mathcal{F}(U) = \mathbb{C}^{\pi_0(U)}$ est l'ensemble des fonctions localement constantes $U \to \mathbb{C}$.

Exercice 2.34. — Prouver que le préfaisceau des fonctions constantes où $\mathcal{F}(U) = \mathbb{C}$ pour tout $U \subset X$ n'est pas un faisceau.

Remarque 2.35. — On peut reformuler la définition de faisceau en disant que les applications $(\mathrm{res}_{U/U_i})_{i \in I}, (\mathrm{res}_{U_i/U_{ij}})_{i,j \in I}$ fournissent une suite exacte courte à gauche d'ensembles

$$\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_{i,j})$$

Dans cette expression, je vous laisse le soin de définir une suite exacte courte d'ensembles... C'est encore plus simple et plus usuel si $\mathcal{F}$ est un faisceau en groupes abéliens, auquel cas on peut introduire les différences $\mathrm{res}_{U_i/U_{ij}} - \mathrm{res}_{U_j/U_{ij}}$ et dire qu'on a une suite exacte courte à gauche dans le sens habituel

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_{i,j})$$

L'exemple suivant est évidemment fondamental dans la théorie des surfaces de Riemann.

Exemple 2.36. — Soit X une surface de Riemann. Si on note $\mathcal{O}_X(U) = H^0(U, \mathcal{O}_X)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U, on obtient un faisceau de groupes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. De même avec les fonctions méromorphes (mais on ne donnera pas de nom à ce faisceau).

Exemple 2.37. — Soit X une surface de Riemann et D un diviseur. On note $\mathcal{O}_X(D)$ le faisceau tel que $\mathcal{O}_X(D)(U)$ est l'ensemble des fonctions f méromorphes sur U vérifiant $D + \mathrm{div}(f) \geq 0$. C'est un faisceau sur X.

Par exemple si $D = (P) - 2(Q)$, le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ paramètre les fonctions avec pôle simple en P (ou bien holomorphes en P), zéro au moins double en Q, et holomorphes hors de P, sans spécifier leurs autres zéros. Savoir si $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$ revient donc à savoir s'il existe des fonctions méromorphes à pôles et zéros prescrits (juste dans le sens d'une inégalité).

2.38. Formes différentielles holomorphes

On va donner une variante de la définition 2.23 dans laquelle les conditions de recollement sont tordues par le jacobien du changement de coordonné.

Définition 2.39. — Soit X une surface de Riemann d'atlas $(U_i, V_i; \phi_i)$. Une 1-forme différentielle holomorphe (resp. méromorphe) ω sur X est la donné pour tout $i \in I$ de fonctions $f_i : V_i \to \mathbb{C}$ holomorphes (resp. méromorphes) telles que $f_j = (f_i \circ \phi_i \circ \phi_j^{-1}) \cdot (\phi_i \circ \phi_j^{-1})'$ pour tous $i, j \in I$.

Ainsi ω n'est *pas* une fonction $X \to \mathbb{C}$. Il n'y a pas de sens à parler de la valeur $\omega(P) \in \mathbb{C}$ si $P \in X$, car la valeur $f_i(\phi_i(P))$ dépend du choix de la carte ou de l'atlas.

Remarque 2.40. — Si X est un ouvert de $\mathbb{C}$ muni de son atlas à une carte ($X \subset \mathbb{C}$), la condition de recollement est vide et les 1-formes holomorphes sur X s'identifient canoniquement aux fonctions holomorphes. Néanmoins si ω est une 1-forme sur X (donc vue comme fonction holomorphe $\omega = f : X \to \mathbb{C}$), on impose à ω de se comporter de manière non naïve par changement de coordonné ie par application d'un biholomorphisme $\phi : X \to X$. Alors qu'une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ devient $f \circ \phi$ par le changement de coordonné ϕ (voir la définition 2.23), la forme différentielle ω devient $(\omega_\circ \phi) \cdot \phi'$. C'est pour cela qu'il y a une différence globale entre forme différentielle et fonctions (voir le théorème REF).

Cela justifie aussi que si $X \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, on préfère noter $\omega = f(z)dz$ puisque formellement $\phi^*(\omega) = f(\phi(z))d\phi(z) = f(\phi(z))\phi'(z)dz$. Dans le cas général où X est une surface de Riemann d'atlas $(U_i, V_i; \phi_i)$, une 1-forme ω sera donnée dans les cartes par $\phi_*(\omega) = (\phi_i^{-1})^*(\omega) = f_i(z)dz$ où f_i est la fonction apparaissant dans la définition 2.39.

Remarque 2.41. — Si on avait à notre disposition la notion de variété complexe de dimension deux (qui demande au préalable d'étudier les fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}^2$, voir la remarque 2.7), on pourrait définir le fibré tangent $p : TX \to X$, qui vérifie $p^{-1}(x) = T_{X,x}$ pour tout $x \in X$, et qui est un fibré vectoriel holomorphe en $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (même définition qu'en géométrie différentielle, en remplaçant les difféomorphismes par des biholomorphismes). Une 1-forme différentielle holomorphe peut alors être vue comme une section $s : X \to TX$ de p (ie une application holomorphe vérifiant $p \circ s = \mathrm{Id}_X$).

Lorsque $X \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, le fibré TX est canoniquement trivialisé et donc $TX = X \times \mathbb{C}$ de tel sorte que p soit la première projection pr_1. On note alors $dz : X \to TX = X \times \mathbb{C}$, $z \mapsto (z, 1)$ la section canonique. Tout autre section s'écrit naturellement $s = f(z)dz : z \mapsto (z, f(z))$ et on retrouve que les formes différentielles s'identifient aux fonctions.

Par contre lorsque X est une surface de Riemann quelconque, le fibré $TX \to X$ n'est plus trivial (voir le cas de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2$ et le théorème de la boule chevelue) et les fonctions ne s'identifient plus aux formes différentielles.

Remarque 2.42. — On peut faire explicitement le lien avec les formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$: une surface de Riemann est une variété différentielle de dimension deux et une 1-forme différentielle ω est holomorphe si dans les cartes lorsqu'on écrit $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$, on a en fait $a(x, y)dx + b(x, y)dy = f(x + iy)dz$ avec $dz = dx + idy$. Ainsi on demande $b(x, y) = ia(x, y)$ et que $z = x + iy \mapsto a(x, y)$ soit holomorphe.

Proposition 2.43. — *Soit X une surface de Riemann. On dispose des constructions suivantes :*

i. *Si f est une fonction holomorphe (resp. méromorphe) sur X, on a la 1-forme différentielle holomorphe (resp. méromorphe) df sur X.*

ii. *Si ω est une forme différentielle holomorphe (resp. méromorphe) et que f est une fonction holomorphe (resp. méromorphe), on a la forme différentielle $f \cdot \omega$.*

iii. *Si $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ sont deux formes différentielles méromorphes sur X, on a la fonction méromorphe ω_1/ω_2 sur X.*

Démonstration. — Introduisons un atlas $(U_i, V_i \subset \mathbb{C}, \phi)$ de X et construisons tous les objets dans les cartes.

i. Si f correspond à (f_i) avec f_i holomorphe sur V_i, on pose considère la collection $f_i'(z)$ qui vérifie maintenant l'équation de recollement des formes différentielles. C'est df par définition.

ii. Si f correspond à (f_i) et ω à (g_i), la collection $(f_i \cdot g_i)$ correspond à une forme différentielle notée $f \cdot \omega$.

iii. Si ω_1 correspond à (f_i) et ω_2 à g_i, la collection (f_i/g_i) vérifie l'équation de recollement d'une fonction notée ω_1/ω_2.

□

Corollaire 2.44. — *Notons (X) le corps des fonctions méromorphes sur X et $\mathcal{M}(X)^{\mathrm{diff}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des 1-fomes méromorphes sur X. Alors $\mathcal{M}(X)^{\mathrm{diff}}$ est un $\mathcal{M}(X)$-espace vectoriel de dimension ≤ 1 sans base canonique.*

Démonstration. — Comme $f\omega \in \mathcal{M}(X)^{\mathrm{diff}}$ si $f \in \mathcal{M}(X)$ et $\omega \in \mathcal{M}(X)^{\mathrm{diff}}$, on voit qu'on a bien un espace vectoriel. Il est de dimension puisque tous les vecteurs sont proportionnels : si $\omega_1, \omega_2 \neq 0 \in \mathcal{M}(X)^{\mathrm{diff}}$, on a $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ avec $f = \omega_1/\omega_2 \in \mathcal{M}(X)$. □

Remarque 2.45. — On verra qu'il existe toujours des formes différentielles méromorphes non nulles et la dimension de $\mathcal{M}(X)^{\mathrm{diff}}$ sur $\mathcal{M}(X)$ est donc 1. Ce n'est pas évident pour l'instant et c'est relié au fait que $\mathbb{C} \subset \mathcal{M}(X)$ est une inclusion stricte, autrement dit qu'il existe des fonctions méromorphes non constantes (voir la remarque 2.14). En effet si f est méromorphe non constante, df est une forme différentielle méromorphe non nulle.

Les fonctions holomorphes (ou méromorphes) et les formes différentielles holomorphes (ou méromorphes) ont un rôle complètement différent sur une surface de Riemann X quelconque.

Regardons tout d'abord la notion de "s'annuler ou d'avoir un pôle en $P \in X$" fixé. C'est une notion bien définir pour une fonction f, ce qui mène au diviseur $\mathrm{div}(f)$ de la définition 2.16. Il en est de même pour une forme méromorphe ω.

Lemme 2.46. — *Soit X une surface de Riemann, $P \in X$ et ω une 1-forme méromorphe sur X. Soit $P \in U_i$ un ouvert de carte où $\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}$. Notons $f_i = \phi_{i,*}(\omega)$ la fonction associée à ω sur U_i. L'entier $\mathrm{ord}_P(f_i)$ ne dépend pas du choix de la carte U_i et de l'atlas.*

Démonstration. — Comme $f_j = (f_i \cdot \phi_i \circ \phi_j^{-1}) \cdot (\phi_i \circ \phi_j^{-1})'$ par l'équation de recollement des formes différentielles et que $(\phi_i \circ \phi_j^{-1})'(z) \neq 0$ pour tout $z \in V_j$ car $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est un biholomorphisme, c'est évident. □

Définition 2.47. — On note $\mathrm{div}(\omega) = \sum_{P \in X} \mathrm{ord}_P(\omega) \cdot [P] \in \mathrm{Div}(X)$ et on l'appelle le diviseur de ω.

Ainsi ω est holomorphe si et seulement si $\mathrm{div}(\omega) \geq 0$.

Passons à présent à la notion de valeur en un point $P \in X$. Une fonction f sans pôle en P définit évidemment un nombre $f(P) \in C$. Une manière compliquée de le voir est de choisir un atlas (U_i, V_i, ϕ_i), d'identifier f à la collection $(f_i : f \circ \phi_i^{-1})_i$ et de poser $f(P) = f_i(\phi_i(P))$ pour tout i tel que $P \in U_i$. Cela ne dépend pas du choix de la carte ou de l'atlas par l'équation de recollement des fonctions.

Par contre si ω est une forme différentielle holomorphe en P, identifiée à une famille de fonctions $(f_i : V_i \to \mathbb{C})_i$, on peut considérer $f_i(\phi_i(P)) \in \mathbb{C}$ mais cela dépend du choix de i tel que $P \in U_i$, et aussi du choix de l'atlas. *Ainsi les formes différentielles n'ont pas de valeur bien définie dans $\mathbb{C}$.*

Remarque 2.48. — Evidemment la géométrie différentielle nous enseigne que $\omega(P)$ est un élément d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension un sans base, à savoir le dual de $T_P X$.

Mais les formes différentielles ont d'autres avantages sur les fonctions, comme l'existence de résidu. Soit en effet $P \in X$ et f une fonction méromorphe en P identifée à $(f_i : V_i \to \mathbb{C})$. On peut considérer $\mathrm{Res}_{\phi_i(P)}(f_i) \in \mathbb{C}$ le coefficient de $\frac{1}{z - \phi_i(P)}$ dans le développement en série de Laurent de f_i en $\phi_i(P) \in V_i$. Mais cette notion n'est *pas* invariante par changement de coordonnée holomorphe ! Autrement dit elle dépend du choix de l'indice i tel que $P \in U_i$ et du choix de l'atlas. *Sur une surface de Riemann quelconque, une fonction méromorphe n'a pas de résidu bien défini.*

Exemple 2.49. — Le problème est donc que si $V \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, si $Q \in V$ et si $\psi : V \to V$ est un biholomorphisme, si $f : V \dashrightarrow \mathbb{C}$ est méromorphe, on n'a *pas* $\mathrm{Res}_{\psi(Q)}(f) = \mathrm{Res}_Q(f \circ \psi)$. Prendre par exemple $V = \mathbb{C}, Q = 0, \psi(z) = 2z, f(z) = 1/z$!

Le calcul formel $d(2z)/(2z) = dz/z$ suggère par contre que la forme différentielle dz/z a un résidu bien défini en 0, invariant par changement de coordonnées par un biholomorphisme. On va voir dans les lignes suivantes que c'est effectivement le cas.

Soit ω une forme différentielle méromorphe en P sur X, représentée par des fonctions $f_i : V_i \dashrightarrow \mathbb{C}$ dans les cartes. Posons $\mathrm{res}_P(\omega) = \mathrm{res}_{\phi_i(P)} f_i \in \mathbb{C}$.

Lemme 2.50. — *Le nombre complexe* $\mathrm{res}_P(\omega)$ *est indépendant du choix de la carte* $P \in U_i$ *et du choix de l'atlas. Il définit un morphisme de groupes canonique*

$$\mathrm{res}_p \;:\; \mathcal{M}(X)^{\mathrm{diff}} \;\longrightarrow\; \mathbb{C}$$

Exercice 2.51. — Prouver algébriquement le lemme 2.50. Il s'agit de voir que pour tout ouvert $V \subset \mathbb{C}$, tout $Q \in V$, tout $\psi : V \to V$ un biholomorphisme, tout $f : V \dashrightarrow \mathbb{C}$ est méromorphe, on a $\mathrm{Res}_{\psi(Q)}(f) = \mathrm{Res}_Q(f \circ \psi \cdot \psi')$.

Donner ensuite une preuve de ce résultat utilisant l'analyse complexe. Quelle preuve est la plus simple ? On reviendra sur la définition du résidu avec un tout petit peu plus de détails dans le lemme 5.46.

Remarque 2.52. — Une question similaire se pose sur tout corps k pour une série de Laurent $f \in k((t)) = \mathrm{Frac}(k[[t]])$ et un automorphisme ψ de $k[[t]]$. Il est difficile de prouver l'invariance du résidu de $f(z)dz$ par pré-composition par ψ purement algébriquement. Tate (REF) a trouvé une preuve élégante reposant sur l'existence de trace de certains endomorphismes en dimension infinie, et c'est la partie dure de la (d'une...) démonstration algébrique du théorème de Riemann-Roch pour les courbes.

Enfin et de manière reliée, si $\gamma : [0, 1] \to X$ est un chemin $\mathcal{C}^\infty$ d'image $C \subset X$, une fonction holomorphe $f : X \to \mathbb{C}$ ne dispose *pas* d'une intégrale curviligne $\int_C f \in \mathbb{C}$, mais une forme différentielle holomorphe ω dispose d'une telle intégrale $\int_C \omega \in \mathbb{C}$.

Remarque 2.53. — Ce n'est donc pas pour rien qu'en analyse complexe on note plutôt $\int_C f(z)dz$!

D'ailleurs on pourrait penser définir $\int_C f := \int_0^1 f \circ \gamma(t)dt$. Quelle critique pouvez-vous formuler envers une telle définition ?

Remarque 2.54. — Il n'y a pas de 2-formes holomorphes sur les ouverts de $\mathbb{C}$ (et donc sur les surfaces de Riemann) car $dz \wedge dz = 0$. Sur les ouverts de $\mathbb{C}^2$ il y a par contre la 2-forme $dz_1 \wedge dz_2$ et sur une variété complexe de dimension deux, il faudrait également s'intéresser aux 2-formes holomorphes.

2.54.1. Coordonnée locale et formes différentielles. — Finissons par une terminologie usuelle, qui n'apporte rien de neuf à la discussion mais qui est courante.

Définition 2.55. — Soit X une surface de Riemann et $P \in X$. Une coordonnée locale sur X en P est la donnée d'un atlas (U_i, V_i, ϕ_i), d'une carte $P \in U_i$, et d'une fonction holomorphe $z_{i,P} : V_i \to \mathbb{C}$ s'annulant à l'ordre 1 en $\phi_i(P)$. Dans cette définition, on s'autorise à remplacer U_i par un ouvert plus petit contenant P.

Ainsi, vu que $V_i \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, la fonction $z - \phi_i(P)$ est une coordonnée locale en P. On compose parfois implicitement ϕ_i par la translation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z - \phi_i(P)$, et la fonction $z = \mathrm{Id}_{V_i} : V_i \to \mathbb{C}$ devient donc une coordonnée locale en P.

Remarque 2.56. — On notera bien que les coordonnées locales ne sont absolument pas canoniques ! On a le choix de l'atlas, de la carte, et de la fonction. Seuls seront intéressant des objets définis intrinsèquement sur X (par exemple des fonctions ou formes différentielles méromorphes), qu'on pourra à l'occasion écrire explicitement dans une coordonnée locale afin de faire des calculs.

Si $X \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, on a cette fois une coordonnée locale canonique en $P \in \mathbb{C}$, à savoir $z-P$. Mais toute fonction holomorphe du type $(z-P)\cdot(1+a_1(z-P)+a_2(z-P)^2+\cdots)$ conviendrait tout aussi bien.

Soit ω une 1-forme différentielle méromorphe sur X, $P \in X$ et z une coordonnée locale en P. On peut alors écrire ω grâce à cette coordonnée dans un voisinage de P sous la forme

$$\omega = \sum_{n >> -\infty}^{\infty} a_n z^n dz$$

. Répétons une dernière fois ce que cela veut dire plus canoniquement : on choisit une carte $P \in U$, $\phi : U \to V \subset \mathbb{C}$ telle que $\phi(P) = 0$ et on écrit $\phi^*(\omega)$ comme 1-forme méromorphe sur V. L'holomorphie de ω se traduit par $a_n = 0$ si $n < 0$.

2.56.1. Faisceaux 2. — On a définit dans la section **2.26.1** la notion de faisceaux en groupes abéliens ou en anneau sur une surface de Riemann X. Le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions est bien sûr un faisceau en anneau.

Définition 2.57. — Soit X une surface de Riemann. Un faisceau en groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur X est un faisceau en $\mathcal{O}_X$-modules si pour tout ouvert $U \subset X$, le groupe $\mathcal{F}(U)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{O}_X(U)$-module, et que pour $V \subset U$ les applications de restrictions $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ sont compatibles à cette structure de module et aux applications de restriction $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$.

Exemple 2.58. — On a dans tous les cas un faisceau d'anneau et un faisceau en modules sur ce faisceau en anneaux :

i. X est un espace topologique, le faisceau en anneaux $\underline{C}_X$ des fonctions localement constantes et le faisceau en $\underline{C}_X$-modules $\underline{\mathcal{C}}_X$ des fonctions continues.

ii. X est un espace topologique, le faisceau en anneaux $\underline{\mathcal{C}}^b_X$ des fonctions continues bornées et le faisceau en $\underline{\mathcal{C}}^b_X$-modules $\underline{C}_X$ des fonctions continues.

iii. Si X est une variété différentielle, le faisceau en anneaux $\underline{\mathcal{C}}^\infty_X$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et le faisceau en $\underline{\mathcal{C}}^\infty_X$-modules des k-formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$.

iv. X est une surface de Riemann, le faisceau en anneaux $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes et le faisceau en $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{O}_X(D)$ pour D un diviseur (voir l'exemple 2.37).

v. X est une surface de Riemann, le faisceau en anneaux $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes et le faisceau en $\mathcal{O}_X$-module Ω^1_X des formes diffférentielles holomorphes.

Définition 2.59. — Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux faisceaux sur X. Un morphisme de faisceaux $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est la donnée pour tout ouvert $U \subset X$ d'une application $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ vérifiant $\mathrm{res}_{\mathcal{G},U/V} \circ f_U = f_V \circ \mathrm{res}_{\mathcal{F},U/V}$ pour tous $V \subset U$. De même pour un morphisme de faisceaux en groupes abéliens où on demande à f_U d'être un morphisme de groupes abéliens pour tout U.

Exercice 2.60. — Soit X une surface de Riemann.

i. Ecrire la définition d'un morphisme de faisceaux en $\mathcal{O}_X$-modules.

ii. Prouver que les formes différentielles holomorphes définissent un faisceau Ω^1_X en $\mathcal{O}_X$-modules.

iii. Prouver que la différentielle $f \mapsto df$ de la proposition 2.43 définit un morphisme de faisceaux $d : \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X$. Est-ce un morphisme de faisceaux en $\underline{\mathbb{C}}_X$-modules ? En $\mathcal{O}_X$-modules ?

iv. Définir en général le noyau d'un morphisme $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de faisceaux, en prenant garde qu'on veut obtenir un faisceau.

v. Identifier le noyau de $d : \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X$. Est-ce un faisceau en $\mathcal{O}_X$-modules ?

2.61. Etude extensive de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Considérons l'espace topologique $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. On le munit d'une structure de surface de Riemann (appelée sphère de Riemann) de la manière suivante. Soit $S = (0, 0, -1)$ et $N = (0, 0, 1)$ les pôles sud et nord. On considère les projections stéréographiques qui sont des homéomorphismes

$$\phi_N \ : \ \mathbb{S}^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, (x, y, z) \mapsto \frac{x + iy}{1 - z}$$

$$\phi_S \ : \ \mathbb{S}^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, (x, y, z) \mapsto \frac{x - iy}{1 + z}$$

On a alors $\phi_N \circ \phi_S^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^{-1}$. Le changement de carte est donc bijectif. Toutefois la vision $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ n'est bien sûr pas adaptée à l'analyse complexe et mène à des formules lourdes. On préfère donc utiliser la droite projective complexe qu'on va maintenant décrire.

Notons $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\})/\mathbb{C}^*$ où on agit par homothétie. Notons $[X,Y] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ la classe de $(X,Y) \neq (0,0)$. C'est une coordonnée homogène, ce par quoi on veut dire que $[X,Y] = [\lambda \cdot X, \lambda \cdot Y]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

On voit que $\phi : U = \{[X,Y] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \mid Y \neq 0\} \to \mathbb{C}, [X,Y] \mapsto X/Y$ est une bijection d'inverse $\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, z \mapsto [z,1]$. De plus si on munit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de la topologie quotient induite par celle de $\mathbb{C}^2$, on se rend compte que c'est même un homéomorphisme.

De même, on note $\psi : V = \{[X,Y] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \mid X \neq 0\} \to \mathbb{C}, [X,Y] \mapsto Y/X$, qui est une bijection d'inverse $\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, z \mapsto [1,z]$. On remarque que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = U \cup V$. On notera $0 = 0_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} = [0,1] \in U$ et $\infty = \infty_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} = [1,0] \in V$. On a $\phi(0) = \psi(\infty) = 0 \in \mathbb{C}$, ce qui se traduit par le fait que (U,ϕ) et (V,ψ) sont deux carte envoyant respectivement $0_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ et $\infty_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ sur $0 \in \mathbb{C}$. La composée de ces deux bijections $\psi \circ \phi^{-1}$ (et aussi $\phi \circ \psi^{-1}$) est $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^{-1}$.

Notons $\mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_2$ deux copies de $\mathbb{C}$. On désignera par $z_1, z_1', \dots \in \mathbb{C}_1$ des éléments de la première copie et par $z_2, z_2', \dots \in \mathbb{C}_2$ des éléments de la seconde. Considérons la relation d'équivalence $\sim$ suivante sur $\mathbb{C}_1 \coprod \mathbb{C}_2$ où $z_1 \sim z_2$ si et seulement si $z_1, z_2 \neq 0$ et $z_1 = z_2^{-1}$, où $z_1 \sim z_1'$ si et seulement si $z_1 = z_1'$ et où $z_2 \sim z_2'$ si et seulement si $z_2 = z_2'$. Notons $\mathbb{C}_1 \coprod_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}_2$ le quotient $(\mathbb{C}_1 \coprod \mathbb{C}_2)/\sim$. On a donc une bijection $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_1 \coprod_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}_2$, qui envoie le premier facteur $\mathbb{C}_1$ bijectivement sur U, et le second $\mathbb{C}_2$ sur V. Là aussi un petit travail avec la topologie quotient montre que c'est un homéomorphisme.

Exercice 2.62. — Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{C}_1 \coprod \mathbb{C}_2$ où $z_1 \sim z_2$ si et seulement si $z_1, z_2 \neq 0$ et $z_1 = z_2$, où $z_1 \sim z_1'$ si et seulement si $z_1 = z_1'$ et où $z_2 \sim z_2'$ si et seulement si $z_2 = z_2'$. Montrer que $(\mathbb{C}_1 \coprod \mathbb{C}_2)/\sim$ muni de la topologie quotient n'est pas séparé.

Au final on a muni $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ d'une surface de Riemann obtenue en recollant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$ le long des ouverts $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C}^*$, identifiés par l'application $z \mapsto z^{-1}$. C'est exactement la même construction que celle qu'on a effectué pour $\mathbb{S}^2$ et on obtient donc un isomorphisme de surfaces de Riemann

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2$$

Si on note $0 := [0,1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et $\infty := [1,0] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, cet isomorphisme envoie 0 sur N et ∞ sur S. Il envoie U sur $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ et ϕ sur ϕ_N, et envoie V sur $\mathbb{S}^2 - \{S\}$ et ψ sur ϕ_S

La morale est que tout objet (fonction holomorphe, méromorphe, forme différentielle) sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ déterminera un objet de même nature dans la carte $0 \in U \to \mathbb{C}$, qu'on écrira dans une coordonnée z, et un objet de même nature dans la carte $\infty \in V \to \mathbb{C}$ qu'on écrira dans la coordonnée z'. Ces objets se correspondront par le changement de variable $z' = 1/z$, le changement de variable étant fait de manière différente selon qu'il s'agit d'une fonction ou d'une forme différentielle.

Ainsi z est une coordonnée locale sur l'ouvert $U \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dans le sens de la définition 2.55, qui s'annule en 0. Et $z' = 1/z$ est une coordonnée locale sur V qui s'annule en ∞.

2.62.1. Fonctions méromorphes. — On peut décrire complètement toutes les fonctions méromorphes sur la droite projective.

Théorème 2.63. — *Le corps des fonctions méromorphes $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ est canoniquement isomorphe au corps $\mathbb{C}(z)$ des fractions rationnnelles en la variable z.*

Démonstration. — Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. On en déduit une fonction $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ méromorphe dans la carte (U, ϕ).

Supposons pour expliquer l'idée que $f \circ \phi^{-1}$ est holomorphe, ie que f n'a pas de pôles sur U. Alors $f \circ \phi^{-1}$ est entière, donnée par une série $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$ de rayon de convergence infini. Écrivons la condition de méromorphie de f en $\infty \in V$. Elle est équivalente à la méromorphie de $f \circ \psi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Mais $(f \circ \psi^{-1})(z') = (f \circ \phi^{-1})(\phi \circ \psi^{-1}(z')) = (f \circ \phi^{-1})(1/z') = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^{-n}$. Cette somme n'a donc qu'un nombre fini de termes non nuls, et $f \circ \phi^{-1}$ est un polynôme.

Dans le cas général, on écrit

$$f \circ \phi^{-1}(z) = g(z) \cdot \prod_i \frac{1}{(z - a_i)^{n_i}}$$

en introduisant les pôles $a_i \in \mathbb{C}$ de $f \circ \phi^{-1}$ et leurs multiplicités n_i, et où g est entière sur $\mathbb{C}$. On applique alors l'argument précédent à g, et on obtient que g est un polynôme, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 2.64. — Ainsi $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})/\mathbb{C}$ est une extension de degré de transcendance 1. On verra que c'est le cas pour toute surface de Riemann compacte (mais rappelons encore que ce n'est même pas évident qu'il existe une fonction méromorphe non constante sur une surface de Riemann compacte générale).

Le théorème 2.63 permet de tout savoir sur les fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$: leur diviseur, le nombre de leurs zéros et pôles, etc. On a par exemple la proposition suivante, dont le premier point est une autre preuve, explicite, du théorème de Liouville.

Proposition 2.65. — *On a les égalités suivantes*

i. $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}) = \mathbb{C}$

ii. $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(k \cdot (\infty)) = \mathbb{C}[z]_{deg \leq k}$ *si* $k \geq 0$, *et est nul si* $k < 0$.

iii. $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(k \cdot (0)) = \mathbb{C}[z^{-1}]_{deg \leq k}$ *si* $k \geq 0$, *et est nul si* $k < 0$.

iv. *$H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(b\cdot(\infty) - a\cdot(0)) = z^a \cdot \mathbb{C}[z]_{deg\leq b-a}$ si $b \geq a$, et est nul si $b < a$.*

Démonstration. — Tout a été prouvé lors de la démonstration du théorème 2.63. Par exemple si f est holomorphe sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, elle est holomorphe sur U donc s'écrit dans cette carte $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. La méromorphie en ∞ se traduit par $a_n = 0$ si $n >> 0$ et l'holomorphie en ∞ se traduit par $a_n = 0$ pour tout $n > 0$, d'où le premier point. Les autres sont similaires. □

Exercice 2.66. — Soit $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$.

i. Ecrire explicitement $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(D))$.

ii. En déduire que cet espace est nul si $\deg(D) < 0$ et qu'il est de dimension $\deg(D)+1$ sinon.

iii. Prouver que pour tout $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^*$, le diviseur $\mathrm{div}(f)$ est de degré nul.

iv. Prouver réciproquement que si D est de degré nul, il existe $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^*$ tel que $D = \mathrm{div}(f)$. Ainsi le problème de Cousin admet une réponse extrêmement simple sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (voir la remarque 2.22).

Remarque 2.67. — Soit X une surface de Riemann compacte. On définira son genre $g \in \mathbb{N}$, qui sera nul pour $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Le théorème de Riemann-Roch nous montrera que $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$ si $\deg(D) < 0$, et garantira que $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ est de dimension $1 - g + \deg(D)$ si $\deg(D) > 2g - 2$.

La formule $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{M}(X)^*$ sera toujours vraie. Par contre tout diviseur de degré nul ne sera pas principal. On introduira au contraire le quotient $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X)/\{\mathrm{div}(f),\ f \in \mathcal{M}(X)^*\}$ appelé groupe de Picard de X. Le morphisme de groupes abéliens $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ passe au quotient en $\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ puisque $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$. On notera alors $\mathrm{Pic}^0(X) = \mathrm{Ker}(\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z})$. Ce groupe, qui quantifie l'obstruction au problème de Cousin, ne sera pas nul et on le calculera pour les courbes elliptiques. L'exercice montre par contre que $\mathrm{Pic}^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = 0$ et $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}$.

Exercice 2.68. — Soit X une surface de Riemann. Prouver que toute fonction méromorphe $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ s'étend par continuité en $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, qui est un morphisme de surfaces de Riemann, puis que cette construction fournit une bijection entre l'ensemble des fonctions méromorphes sur X et l'ensemble des morphismes de surfaces de Riemann de X vers $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Remarque 2.69. — Un tel résultat est faux lorsque X est de dimension > 1. Par exemple si $X = \mathbb{C}^2$, $f(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$ qui est en effet une fonction méromorphe à deux variables, on a nécessairement $\tilde{f} : X - \{z_2 = 0\} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $(z_1, z_2) \mapsto [z_1, z_2]$. Cette fonction ne s'étend pas par continuité en $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ car $[0, 0] \notin \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

2.69.1. Formes différentielles. — Passons à la description explicite des formes différentielles méromorphes sur la droite projective.

Définition 2.70. — La forme différentielle dz sur $\mathbb{P}^1_C$ est l'unique 1-forme différentielle méromorphe ω vérifiant $\phi^*(\omega) = dz$. Autrement dit dans la carte $\phi : U \to \mathbb{C}$, la forme dz sur U correspond à la fonction constante 1 sur $\mathbb{C}$.

Lemme 2.71. — *La forme différentielle dz a un pôle double de résidu nul en $\infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. En particulier elle n'est pas holomorphe sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — Pour ne pas faire trop d'abus de notations, appelons plutôt ω cette forme sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Il faut expliciter ω dans la carte $\psi : V \to \mathbb{C}$. Mais par la règle de changement de variable des formes différentielles (*ie* l'équation fonctionnelle qu'elles satisfont lors d'un changement de carte), si on note $f_U = 1$ la fonction associée à ω dans la carte U et f_V la fonction associée à ω dans la carte V, on a $f_V = (f_U \circ \phi \circ \psi^{-1}) \cdot (\phi \circ \psi^{-1})$. Comme $\phi \circ \psi^{-1}(z) = 1/z$, cela veut dire $f_V(z') = f_U(1/z') \cdot \frac{\partial(1/z')}{\partial z'} = -1/z'^2$. $\square$

Exercice 2.72. — Calculer le diviseur de la forme différentielle zdz sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Idem pour $\frac{dz}{z}$. Que vaut la somme des résidus de $\frac{dz}{z}$?

Théorème 2.73. — *Il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^{\text{diff}} = \mathbb{C}(z)dz$ où l'on rappelle que $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^{\text{diff}}$ désigne le $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$-espace vectoriel des formes différentielles méromorphes.*

Démonstration. — C'est tautologique puisque $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^{\text{diff}}$ est un $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$-espace vectoriel de dimension ≤ 1, qui n'est pas nul puisque $dz \neq 0$, et qui est donc isomorphe à $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \cdot dz$, en notant que $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$ par le théorème 2.63. $\square$

Corollaire 2.74. — *Il n'existe pas de forme différentielle holomorphe non nulle sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Ainsi $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}) = 0$.*

Démonstration. — Si $\omega = R(z)dz$ est holomorphe avec $R(z) \in \mathbb{C}(z)$, l'holomorphie sur U garantit que $R \in \mathbb{C}[z]$. Mais l'holomorphie de ω sur V se traduit alors par le fait que $R(1/z')d(1/z') = -1/z'^2 R(1/z')dz'$ est holomorphe, donc par le fait que $-1/z'^2 R(1/z') \in \mathbb{C}[z']$. La seule possibilité est $R(z) = 0$. $\square$

Remarque 2.75. — On voit bien que globalement les formes différentielles sont différentes des fonctions puisque les constantes sont holomorphes sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. On verra que si X est une surface de Riemann compacte de genre g, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(X, \Omega^1_X)$ est de dimension g. Ainsi $H^0(X, \Omega^1_X)$ caractérise le genre de X, ce qui n'est pas le cas pour $H^0(X, \mathcal{O}_X)$.

Exercice 2.76. — Soit ω une forme différentielle méromorphe sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Prouver que $\deg(\mathrm{div}(\omega)) = -2$. En déduire à nouveau que ω ne peut pas être holomorphe.

Remarque 2.77. — Il s'agit encore d'une différence sensible entre formes différentielles et fonctions méromorphes (dont le diviseur est de degré nul sur toute surface de Riemann compacte). Lorsque X est compacte de genre g et ω est méromorphe sur X, on verra que $\deg(\mathrm{div}(\omega)) = 2g - 2$.

Exercice 2.78. — Prouver les points suivants.

i. Trouver une preuve algébrique du fait que $\sum_{P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \mathrm{Res}_P(\omega) = 0$ pour tout forme méromorphe ω sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

ii. Trouver une preuve analytique de ce même fait. On pourra écrire $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2$ et appliquer le théorème des résidus.

iii. En déduire une nouvelle preuve de $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ pour toute fonction méromorphe f sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

CHAPITRE 3

COURBES ET FONCTIONS ELLIPTIQUES

Nous allons donner un nouvel exemple de surfaces de Riemann compactes, qui sont de la forme $\mathbb{C}/\Lambda$ pour $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. Commençons donc par une construction générale de surface de Riemann quotient.

3.1. Quotients

Soit G un groupe discret agissant sur une surface de Riemann X. On dit que l'action est propre si le quotient X/G muni de la topologie quotient est séparé. On dit que l'action est holomorphe si pour tout $g \in G$, l'application $a_g : X \to X, x \mapsto g * x$ est un morphisme de surface de Riemann (auquel cas sa réciproque $a_{g^{-1}}$ reste holomorphe). On dit que l'action est sans point fixe si pour tout $x \in X$, on a $\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \,|\, g*x = x\} = \{e_G\}$. Lorsque l'action de G sur X est sans points fixes,

Sous les hypothèses plus faible que G est un groupe discret agissant par homéomorphismes sur un espace topologique X, on dispose de l'ensemble quotient X/G et de la projection $\pi : X \to X/G$. On munit X/G de la topologie quotient, dont les ouverts sont les $V \subset X/G$ tels que $\pi^{-1}(V) \subset X$ est ouvert. De manière équivalente (en utilisant $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{g\in G}\, g * U$), on peut dire que les ouverts de X/G sont exactement les $\pi(U)$ pour $U \subset X$ ouvert. L'application π est donc continue et ouverte. C'est une application quotient, ce qui veut dire que pour tout espace topologique Y et toute application ensembliste $f : X/G \to Y$, on a f continue si et seulement si $f \circ \pi$ continue.

Remarque 3.2. — Dans le cas où $\sim$ est une relation d'équivalence sur un espace topologique X, on munit $Y = X/\sim$ de la topologie quotient qui est la meilleure topologie rendant $\pi : X \to Y$ continue. Ainsi $V \subset Y$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(V) \subset X$ est ouvert. L'application π alors une application quotient dans le sens précédent. Ce qui change par rapport au cas d'une relation d'équivalence associée à l'action d'un groupe, c'est que π n'est pas nécessairement ouverte.

Plus généralement, si $\pi : X \to Y$ est n'importe quelle surjection d'un espace topologique vers un ensemble, on peut munir Y de la topologie quotient, pour laquelle π devient continue et une application quotient, mais n'est pas ouverte. C'est une généralisation illusoire puisque si on pose $x \sim x'$ lorsque $\pi(x) = \pi(x')$, on obtient une relation d'équivalence sur X dont le quotient est Y.

Exercice 3.3. — Trouver un espace topologique X et une relation d'équivalence $\sim$ telle que l'application quotient $\pi : X \to X/\sim$ ne soit pas ouverte. Définir une notion de relation d'équivalence ouverte, qui garantit que π est ouverte. Vérifier que les relations d'équivalence associées à l'action d'un groupe par homéomorphismes sont ouvertes.

Revenons à l'action par homéomorphismes d'un groupe discret G sur un espace topologique X. On vérifie que l'action est propre si et seulement si X/G est un espace topologique séparé. On vérifie également que si l'action est sans point fixe, alors $\pi : X \to X/G$ est un revêtement topologique : pour tout $y \in X/G$, il existe un voisinage $y \in V \subset X/G$ et un homéomorphisme $\pi^{-1}(V) = V \times G$ faisant se correspondre π et la première projection pr_V.

Repassons enfin au cas le plus restrictif où X est une surface de Riemann. La proposition suivante est naturelle. Elle garantit que l'application $\pi : X \to X/G$ est une application quotient dans la catégorie des surfaces de Riemann.

Proposition 3.4. — *Si un groupe discret G agit sur une surface de Riemann X proprement, holomorphiquement et sans point fixe, il existe une unique structure de Riemann sur X/G rendant la projection $\pi : X \to X/G$ holomorphe et telle que pour toute surface de Riemann Y et toute application ensembliste $f : X/G \to Y$, on a f holomorphe si et seulement si $f \circ \pi$ holomorphe.*

L'application $f \mapsto \pi^*(f) := f \circ \pi$ induit une bijection de l'ensemble des fonctions holomorphes (resp. méromorphes) $f : X/G \to \mathbb{C}$ vers l'ensemble des fonctions holomorphes (resp. méromorphes) $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ qui sont G-invariantes, la bijection réciproque étant le passage au quotient $\tilde{f} \mapsto \tilde{\tilde{f}}$. Si f et $\tilde{f}$ se correspondent, pour tout $P \in X$ on a $\mathrm{ord}_P(\tilde{f}) = \mathrm{ord}_{\pi(P)}(f)$ et on a $\pi^{-1}(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(\tilde{f})$, qui est un diviseur G-invariant sur X.

L'application $\omega \mapsto \pi^*(\omega)$ induit une bijection de l'ensemble des formes différentielles holomorphes (resp. méromorphes) ω sur X/G vers l'ensemble des formes différentielles holomorphes (resp. méromorphes) $\tilde{\omega}$ sur X qui sont G-invariantes. Si ω et $\tilde{\omega}$ se correspondent, pour tout $P \in X$ on a $\mathrm{ord}_P(\tilde{\omega}) = \mathrm{ord}_{\pi(P)}(\omega)$ et on a $\pi^{-1}(\mathrm{div}(\omega)) = \mathrm{div}(\tilde{\omega})$, qui est un diviseur G-invariant sur X.

Démonstration. — Cette proposition est en fait immédiate : en utilisant que $\pi : X \to X/G$ est un homéomorphisme local, on transporte les cartes de X en des cartes de X/G, et vérifier que cela forme un atlas est immédiat. Il en est de même de toutes les autres propriétés. □

Remarque 3.5. — Il faut détailler la définition de fonctions et de formes différentielles G-invariantes sur X. Rappelons qu'on note $a_g : X \to X$ l'action de $g \in G$.

Une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est G-invariante si $a_g^*(f) = f$ pour tout $g \in G$, ie $f \circ a_g = g$. Cela veut donc dire $f(g * x) = f(x)$ pour tous $g \in G$, $x \in X$, ce qui est la définition naïve.

Une forme différentielle ω sur X est G-invariante si $a_g^*(\omega) = \omega$ pour tout $g \in G$. On prendra garde au fait que, si on exprime ω dans des cartes au moyen d'une fonction ($\omega = f(z)dz$ dans une coordonnée locale z) alors par définition $a_g^*(\omega)$ correspond à la fonction $(f \circ a_g) \cdot a_g'$. L'équation fonctionnelle de G-invariance au niveau des formes est donc tordue par la dérivée de l'action.

Remarque 3.6. — On verra en (REF) un théorème plus fort, qui s'applique au cas de stabilisateurs finis.

Exercice 3.7. — Soit $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im(\tau) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\tau \in \mathcal{H}$, on pose $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ et on vérifie que cela fait une action propre par biholomorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$.

i. Calculer $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\tau)$ en fonction de $\tau \in \mathcal{H}$.

ii. Posons $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$. Calculer $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})}(\tau)$ en fonction de $\tau \in \mathcal{H}$.

On en déduit que l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$ n'est pas libre, et la proposition 3.4 ne s'applique pas. Néanmoins le théorème (REF) s'appliquera et munira $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'une structure de surface de Riemann.

3.8. Courbes elliptiques

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau, c'est à dire un sous-$\mathbb{Z}$-module discret qui $\mathbb{R}$-engendre $\mathbb{C}$. Il est facile de voir que $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ comme groupe abélien. Alors Λ agit par translation sur $\mathbb{C}$, et cette action est sans point fixe, par biholomorphisme, et propre. De plus l'espace topologique quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ est compact. On peut donc appliquer la proposition 3.4 et obtenir une structure de surface de Riemann compacte sur $\mathbb{C}/\Lambda$.

Définition 3.9. — Une courbe elliptique complexe est une surface de Riemann compacte de la forme $\mathbb{C}/\Lambda$ pour $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau.

Remarque 3.10. — Il est clair que $\mathbb{C}/\Lambda$ est homéomorphe (et même difféomorphe) au tore de dimension deux $(\mathbb{S}^1)^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, et est donc une surface (réelle) compacte orientable de genre 1. Nous reverrons ces notions dans le chapitre (REF) et nous dirons qu'une courbe elliptique est de genre 1. De plus nous montrerons (REF) que toute surface de Riemann de genre 1 est une courbe elliptique complexe.

Remarque 3.11. — Une courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ vient avec le point marqué $0_{\mathbb{C}/\Lambda} = 0_{\mathbb{C}} \bmod \Lambda$. En toute rigueur une courbe elliptique complexe sera donc une surface de Riemann compacte de genre 1 avec un point marqué.

Remarque 3.12. — Il est clair que $\mathbb{C}/\Lambda$ est un groupe abélien, et que la loi de groupe $(\mathbb{C}/\Lambda)^2 \to \mathbb{C}/\Lambda$ est une morphisme de variétés complexe (mais encore une fois, donner un sens précis à cette assertion demande de définir la surface complexe $(\mathbb{C}/\Lambda)^2$ donc d'étudier les fonctions holomorphes sur les ouverts de $\mathbb{C}^2$). On verra (REF) que les seules surfaces de Riemann compactes munies d'une loi de groupe holomorphe sont les courbes elliptiques complexes.

Toutes les courbes elliptiques complexes sont donc difféomorphes entre elles. Elles ne sont par contre pas isomorphes en tant que surfaces de Riemann et nous allons à présent voir lorsqu'il existe un isomorphisme $\mathbb{C}/\Lambda \simeq \mathbb{C}/\Lambda'$ entre surfaces de Riemann.

Remarque 3.13. — La situation est analogue pour les couronnes $C(r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$. Pour tous $r < R$ et $r' < R'$, les couronnes $C(r, R)$ et $C(r', R')$ sont difféomorphes, mais elles ne sont conformément équivalentes (ie biholomorphes, ie isomorphes comme surface de Riemann) que si $R/r = R'/r'$.

Proposition 3.14. — *Soient $\Lambda, \lambda' \subset \mathbb{C}$ deux réseaux et $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\lambda'$ un morphisme de surfaces de Riemann vérifiant $f(0) = 0$. Alors il existe $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $a \cdot \Lambda \subset \Lambda'$ tel que $f(z \bmod \Lambda) = az \bmod \Lambda'$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Remarque 3.15. — On peut toujours se ramener à $f(0) = 0$ quitte à composer par une translation. Ainsi tout morphisme de $\mathbb{C}/\Lambda$ dans $\mathbb{C}/\Lambda'$ est une application affine de $\mathbb{C}$ passée au quotient.

Démonstration. — Si $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda'$ est holomorphe, elle se relève en $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe vérifiant $\tilde{f}(\Lambda) \subset \Lambda'$ et $\tilde{f}(0) = 0$. On a donc $\tilde{f}(z + \omega) - \tilde{f}(z) \in \Lambda'$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \Lambda$. Comme Λ' est discret on en déduit que $\tilde{f}(z + \omega) - \tilde{f}(z)$ est constant en z donc que $\tilde{f}'(z + \omega) = \tilde{f}'(z)$. Donc $\tilde{f}' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et Λ-périodique donc constante égale à $\alpha \in \mathbb{C}$ par le théorème de Liouville. Donc $\tilde{f}(z) = \alpha \cdot z + \beta$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Comme $\tilde{f}(0) = 0$ on a $\beta = 0$ donc $\tilde{f}(z) = \alpha \cdot z$ puis $f(z) = \alpha \cdot z$. Comme $\tilde{f}$ passe au quotient, il est clair que $\alpha \cdot \Lambda \subset \Lambda'$. $\square$

Remarque 3.16. — On a utilisé dans cette démonstration que pour toute surface de Riemann X, son revêtement universel $\tilde{X}$ est muni d'une surface de Riemann rendant la projection $\pi : \tilde{X} \to X$ holomorphe. Il s'agit d'une réciproque (valable pour tout revêtement topologique, pas seulement pour le revêtement universel) à la proposition 3.4 qui est aussi facile à démontrer, en transportant les cartes par l'homéomorphisme local π.

On a également utilisé que pour cette structure de surface de Riemann de $\tilde{X}$, la propriété universelle du revêtement universel vaut dans la catégorie des surfaces de Riemann : en fixant $x \in X$ et $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tel que $\pi(\tilde{x}) = x$, pour toute surface de Riemann simplement connexe Z munie d'un point $z \in Z$ et toute application holomorphe $f : Z \to X$ vérifiant $f(z) = x$, il existe une unique application holomorphe $\tilde{f} : Z \to \tilde{X}$ vérifiant $\pi \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f}(z) = \tilde{x}$.

Corollaire 3.17. — *Soient $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{C}$ deux réseaux.*

i. *Tout morphisme $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda'$ vérifiant $f(0) = 0$ est un morphisme de groupes. Si f est non nul, il est surjectif de noyau fini.*

ii. *Il existe un isomorphisme $\mathbb{C}/\Lambda \simeq \mathbb{C}/\Lambda'$ de surfaces de Riemann si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a \cdot \Lambda = \Lambda'$.*

Démonstration. — Si $f(0) = 0$ alors $f(z) = az$ où $a \cdot \Lambda \subset \Lambda'$. Il est clair que $f(z + z') = f(z) + f(z')$. Si $f \neq 0$ alors $a \neq 0$ et le noyau de f est $\frac{1}{a}\Lambda'/\Lambda$, qui est un groupe abélien fini.

Si f est un isomorphisme envoyant 0 sur 0, il est donc de la forme $f(z) = az$ où $a\cdot\Lambda = \Lambda'$. Réciproquement si $a \cdot \Lambda = \Lambda'$, la multiplication par a est bien un isomorphisme de $\mathbb{C}/\Lambda$ sur $\mathbb{C}/\Lambda'$. $\square$

Remarque 3.18. — Soit $a \in \mathbb{C}^*$. En posant $a = re^{i\theta}$, on voit que $a \cdot \Lambda$ est obtenue en dilatant et en tournant Λ. Il est donc visuel de repérer deux réseaux donnant naissance à des courbes elliptiques isomorphes.

Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$, que l'on munit de la $\mathbb{C}^*$-action par homothétie de rapport complexe. Notons $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$ l'application $\tau \mapsto \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau$, qui est bien un réseau car $\mathrm{Im}(\tau) \neq 0$. L'application ϕ n'est pas injective car il existe $\tau, \tau' \in \mathcal{H}$ tels que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau'$ (en trouver...), et elle n'est pas surjective car tout réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ne contient pas $\mathbb{Z}$.

Exercice 3.19. — Vérifier que ϕ passe au quotient en $\bar{\phi} : \mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{R}/\mathbb{C}^*$, qui est de plus bijective. Ici l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$ est celle donnée dans l'exercice 3.7.

Corollaire 3.20. — *L'application $(\tau \in \mathcal{H}) \mapsto \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau)$ induit une bijection entre $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques complexes (où on impose aux isomorphismes d'envoyer 0 sur 0).*

Remarque 3.21. — On a dit que $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sera muni d'une structure de surface de Riemann quotient, bien que l'action ait des stabilisateurs non triviaux. Ainsi l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques complexes est lui-même muni d'une structure de surface de Riemann. Il s'agit là du premier cas de la philosophie des espace de modules.

Néanmoins la présence de ces stabilisateurs posera de nombreux problèmes (voir les formules compliquées de dimension des espaces de formes modulaires dans le cours correspondant), et rend la surface de Riemann $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ un peu naïve. Une meilleure solution, plus abstraite, consiste en l'introduction du champ de Riemann quotient $[\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$, aussi appelé orbifold, et qui est une version analytique-complexe d'un champ algébrique. Ici $[\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$ n'est pas un ensemble muni d'une topologie puis d'un atlas holomorphe, mais une catégorie. Les objets de cette catégorie sont les $\tau \in \mathcal{H}$, et $\mathrm{Hom}(\tau, \tau') = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid g \cdot \tau = \tau'\}$. En particulier les stabilisateurs peuvent être vus comme les groupes d'automorphismes de cette catégorie. La théorie des champs permet de donner un sens à une "topologie" sur une telle catégorie, puis à un atlas.

3.22. Algébrisation

D'après la proposition 3.4, les fonctions méromorphes f sur $\mathbb{C}/\Lambda$ s'identifient aux fonctions méromorphes $\tilde{f}$ sur $\mathbb{C}$ qui sont Λ-périodique, donc telles que $\tilde{f}(z+\lambda) = \tilde{f}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \Lambda$. De plus les ordres des pôles et zéros sont préservés par une telle identification.

De même les formes différentielles ω sur $\mathbb{C}/\Lambda$ s'identifient aux formes différentielles $\tilde{\omega}$ sur $\mathbb{C}$ invariantes par translation. Notons $a_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z+\lambda$ le morphisme d'action de λ. En posant $\tilde{\omega} = f(z)dz$ (car $\mathbb{C}$ est muni d'un atlas à une carte, et il existe une identification globale entre formes différentielles et fonctions), la condition d'invariance par translation de $\tilde{\omega}$ se réécrit $a_\lambda^*(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il vient $(f \circ a_\lambda) \cdot a'_\lambda = f$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Mais pour l'action par translation, $a'_\lambda = 1$!

Ainsi les 1-formes méromorphes (resp. holomorphes) sur $\mathbb{C}/\Lambda$ s'obtiennent par passage au quotient de $f(z)dz$ où f est holomorphe (resp. méromorphe) sur $\mathbb{C}$ et Λ-périodique. En tenant de plus compte du théorème de Liouville qui garantit que les fonctions holomorphes Λ-périodiques sont constantes, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.23. — *La forme obtenue par passage au quotient de dz est holomorphe sans zéro sur $\mathbb{C}/\Lambda$. On la notera encore dz. Les seules formes différentielles holomorphes sur $\mathbb{C}/\Lambda$ sont de la forme $a \cdot dz$ où $a \in \mathbb{C}$.*

Remarque 3.24. — La situation est complètement différente de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, où on disposait d'une 1-forme méromorphe aussi notée dz, mais qui avait un pôle double à ∞. On retrouve la dichotomie selon le genre soulignée dans la remarque 2.75 : $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est de genre nul donc n'a pas de forme différentielle holomorphe, mais $\mathbb{C}/\Lambda$ est de genre 1 et admet un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 de telles formes.

On voit aussi que $\mathrm{div}(dz)$ est nul dans $\mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$, ce qui est cohérent avec le fait que le diviseur d'une forme différentielle méromorphe sera de degré $2g-2$ sur une surface de Riemann compacte de genre g.

Pour produire des fonctions méromorphes ou des formes différentielles méromorphes sur $\mathbb{C}/\Lambda$, il reste à produire des fonctions méromorphes $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui sont Λ-périodiques. On va bien sûr chercher à partir de $\tilde{g}$ méromorphe sur $\mathbb{C}$ puis poser $\tilde{f}(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \tilde{g}(z+\lambda)$ mais la convergence n'est pas évidente. On introduit dans cette perspective la fonction de Weierstrass

$$\wp_\Lambda(z) \;=\; \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\,.$$

Remarque 3.25. — On va voir que $\wp_\Lambda$ est invariante par translation de Λ ie $\wp_\Lambda(z+\lambda) = \wp_\Lambda(z)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Le candidat le plus naïf vérifiant cette invariance aurait été $\sum_{\omega\in\Lambda} 1/(z-\omega)^2$. Malheureusement comme on somme sur $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ et pas sur $\mathbb{Z}$ comme dans les sommes de Riemann habituelles, cette série ne converge pas. On obtient la convergence en retranchant $1/\omega^2$, d'où la définition de $\wp$.

Lemme 3.26. — *La fonction $\wp_\Lambda$ converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}-\Lambda$. Elle définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}-\Lambda$ et qui a un pôle double de résidu nul en tout $\lambda \in \Lambda$.*

Lemme 3.27. — *On a $\wp_\Lambda(z+\lambda) = \wp_\Lambda(z)$ pour tous $(z,\lambda) \in \mathbb{C}\times\Lambda$.*

Démonstration. — On peut donc dériver $\wp_\Lambda$ terme à terme et on trouve $\wp'_\Lambda(z) = -2\cdot \sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$ qui est clairement invariante par translation de Λ. On en déduit $\wp_\Lambda(z+\lambda) = \wp_\Lambda(z)+c(\lambda)$ pour tous $(z,\lambda)\in\mathbb{C}\times\Lambda$ avec $c(\lambda)\in\mathbb{C}$ indépendant de z. En posant $z=-\lambda/2$ et en utilisant la parité de $\wp_\Lambda$ on en déduit $c(\lambda)=0$. $\square$

On introduit ensuite la série d'Eistenstein non normalisée de poids $2k \in \mathbb{N}$

$$G_{2k}(\Lambda) \;=\; \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}}\,.$$

Remarque 3.28. — La fonction G_{2k} est définie sur l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$ et est homogène de poids $-2k$, c'est à dire que $G_{2k}(c\cdot\Lambda) = c^{-2k}\cdot G_{2k}(\Lambda)$ pour tout $c\in\mathbb{C}^*$. On peut aussi voir G_{2k} comme une fonction sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z\in\mathbb{C} | \Im(z)>0\}$ en posant

$$G_{2k}(\tau) \;=\; G_{2k}(\mathbb{Z}+\tau\cdot\mathbb{Z}) \;=\; \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(n+m\tau)^{2k}}$$

Alors $G_{2k} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est une forme modulaire de poids $2k$ pour le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$G_{2k}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k} \cdot G_{2k}(\tau) \quad \forall\, \tau \in \mathcal{H}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\,.$$

De plus, puisque $G_{2k}(\tau+1)G_{2k}(\tau)$, en posant $q = e^{2i\pi\tau}$, on peut appliquer la théorie de Fourier discrète et développer $G_{2k}(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n$. On voit par calcul direct que $a_n = 0$ pour tout $n < 0$, et cette condition est aussi requise dans la définition d'une forme modulaire.

Lemme 3.29. — *La série qui définit $G_{2k}(\Lambda)$ avec $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ou $G_{2k}(\tau)$ avec $\tau \in \mathcal{H}$ converge absolument pour tout $k > 1$ et la fonction $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $\tau \mapsto G_{2k}(\tau)$ est holomorphe.*

On pose enfin $g_2(\Lambda) = 60\cdot G_4(\Lambda)$ et $g_3(\Lambda) = 140\cdot G_6(\Lambda)$, normalisations qui sont justifiées par l'énoncé suivant.

Proposition 3.30. — *On a $\wp'_\Lambda(z)^2 = 4\cdot\wp_\Lambda(z)^3 - g_2(\Lambda)\cdot\wp_\Lambda(z) - g_3(\Lambda)$ pour tout $z \in \mathbb{C}-\Lambda$.*

Démonstration. — On considère $z \mapsto \wp'_\Lambda(z)^2 - 4\cdot\wp_\Lambda(z)^3 + g_2(\Lambda)\cdot\wp(z) + g_3(\Lambda)$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}-\Lambda$ et qui est Λ-périodique. De plus un développement limité montre qu'elle est holomorphe près de 0 et s'annule en 0. On en déduit qu'elle est holomorphe sur le compact $\mathbb{C}/\Lambda$ donc bornée par le théorème de Liouville, donc nulle. □

L'application $(\mathbb{C}-\Lambda)/\Lambda \to \mathbb{C}^2$, $z \mapsto (\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z))$ a donc son image inclue dans la courbe algébrique affine C_Λ^{aff} formée des $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant l'équation polynomiale $y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda)$. Pour étendre cette application à $\mathbb{C}/\Lambda$ il faut chasser les pôles de $\wp_\Lambda$ et de $\wp'_\Lambda$, ce est possible en remplaçant la courbe affine par sa version projective.

Notons pour cela $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^3 - \{0\})/C^*$ muni de la topologie quotient, qui est compact. On notera $[X,Y,Z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ un élément, et on a donc $[X,Y,Z] = [aX,aY,aZ]$ pour tout $a \in \mathbb{C}^*$. Notons $C_\Lambda^{\mathrm{proj}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'ensemble des $[X,Y,Z]$ vérifiant l'équation homogène

$$YZ^2 = 4X^3 - g_2(\Lambda)XZ - g_3(\Lambda)Z^3\,.$$

Remarque 3.31. — Il n'existe pas de fonction bien définie $\mathrm{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, $[X,Y,Z] \mapsto P(X,Y,Z)$ si P est un polynôme homogène. En effet $P(X,Y,Z)$ dépend du choix de $(X,Y,Z) \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$, et pas seulement de son image dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Il y aurait de toute manière un problème car une telle fonction serait holomorphe sur la surface complexe compacte $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, donc bornée par la version correspondante du théorème de Liouville.

Par contre la condition $P(X,Y,Z) = 0$ défini sans ambiguité une fermé de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ lorsque P est homogène. Ce sous-ensemble est compact pour la topologie induite. On verra dans le chapitre suivant que sous une condition de lissité de P, il peut de plus être muni d'une structure de surface de Riemann.

Proposition 3.32. — *L'application* $(\mathbb{C}-\Lambda)/\Lambda \to C_\Lambda^{\mathrm{proj}}$, $z \mapsto [\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z), 1]$ *s'étend par continuité en une application* $\mathbb{C}/\Lambda \to C_\Lambda^{\mathrm{proj}}$ *qui envoie* 0 *sur* $[0 : 1 : 0]$.

Démonstration. — Par Λ-périodicité, on se ramène à étudier l'application en 0. On sait que $\wp_\Lambda(z) = o(1/z^2)$ et $\wp'_\Lambda(z) = o(1/z^3)$. Ainsi si $z \to 0$, on a $[\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z), 1] = [z^3\wp_\Lambda(z), z^3\wp'_\Lambda(z), z^3] \to [0, 1, 0]$. □

On pose $\Delta(\Lambda) = g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2$ qui est le discriminant usuel du polynôme $4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda)$ et il s'annule donc si et seulement si ce polynôme a une racine de multiplicité ≥ 2.

Remarque 3.33. — Si par le dictionnaire usuel on voit Δ comme une fonction $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$, on obtient une forme modulaire de poids 12 pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Lorsqu'on la développe en série de $q = e^{2i\pi\tau}$ par 1-périodicité on a $\Delta(q) = \sum a_n q^n$ et un calcul fait en cours de formes modulaires montrera que $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. La condition $a_0 = 0$ s'appellera la "cuspidalité" de Δ. En fait $k = 12$ est le plus petit entier pour lequel il existe une forme cuspidale non nulle de poids k pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, et Δ est unique avec cette propriété à un scalaire près.

Remarque 3.34. — Le lecteur montrera en cours de formes modulaires que

$$\Delta(q) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$$

à une constante près. En développant ce produit infini et en introduisant une notation pour les coefficients, il vient $\Delta(q) = \sum_{n\geq 1}\tau(n)q^n$ où la fonction $n \mapsto \tau(n)$ est appelée fonction de Ramanujan. D'après Deligne, on a l'importante estimation $|\tau(p)| \leq 2\cdot p^{11/2}$ pour tout p premier. Une telle estimation est beaucoup moins anecdotique qu'il n'y paraît : elle reste vraie pour toute forme cuspidale de poids k en remplaçant 11 par $k-1$. Et surtout, même si ce n'est pas du tout clair dans cette formulation un peu naïve, cette estimation est une variante de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis ! Connue sous le nom de conjecture de Weil, une telle hypothèse a servi de fil conducteur à Grothendieck pour développer la cohomologie étale, et a finalement été prouvée par Deligne dans la plus grande généralité possible.

Remarque 3.35. — Ramanujan a remarqué que $\tau(n) \cong \sigma_{11}(n)$ mod 691 pour tout entier n. Ici $\sum_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ est une fonction arithmétique usuelle. Cette congruence n'est pas non plus un hasard, et a donné lieu aux conjectures de Bloch-Kato sur les nombres premiers divisant certaines valeurs spéciales de fonctions ζ ou L. Ainsi la fonction Δ est à ce point fondamentale qu'aucune coïncidence n'a lieu avec elle : le moindre énoncé d'apparence anecdotique la concernant n'est que la face cachée d'un iceberg de la géométrie arithmétique, concernant ultimement tous les motifs sur $\mathbb{Q}$.

3.35.1. Exercices. — Le lecteur pourra s'exercer sur les fonctions elliptiques dans les exercices suivants.

Exercice 3.36. — Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. On appelle *fonction elliptique* relativement à Λ toute fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est Λ-périodique. On note $\mathbb{C}(\Lambda)$ le corps des fonctions elliptiques pour Λ.

Pour toute fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et tout $w \in \mathbb{C}$ on note $\mathrm{ord}_w(f) \in \mathbb{Z}$ l'ordre du zéro ou du pôle de f en w et on note $\mathrm{res}_w(f)$ son résidu.

i. Soit $f \in \mathbb{C}(\Lambda)$. Montrer par l'analyse complexe que

$$\sum_{w \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{res}_w(f) = 0 \tag{3.36.a}$$

$$\sum_{w \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_w(f) = 0 \tag{3.36.b}$$

$$\sum_{w \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_w(f) \cdot w \in \Lambda \tag{3.36.c}$$

ii. Exprimer ces propriétés à l'aide de $\mathrm{Pic}^0(\mathbb{C}/\Lambda)$ et $\mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda)$.

iii. Prouver qu'une fonction elliptique a au moins deux pôles (avec multiplicité) dans $\mathbb{C}/\Lambda$ et qu'elle a autant de zéros (avec multiplicités). On appelle ce nombre ≥ 2 l'ordre de la fonction elliptique.

iv. Montre que $\mathbb{C}(\Lambda) = \mathbb{C}(\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda)$ donc que toute fonction elliptique s'écrit comme fraction rationnelle en $\wp_\Lambda$ et $\wp'_\Lambda$. On pourra se ramener à supposer la fonction f paire puis introduire une fonction elliptique $g(z)$ qui est une fraction rationnelle en $\wp_\Lambda(z)$ et qui a exactement les mêmes zéros et pôles que f avec la même multiplicité.

v. Vérifier que l'extension $\mathbb{C}(\Lambda)/\mathbb{C}$ est de degré de transcendance 1 (mais n'est pas purement transcendante).

vi. On considère la fonction σ de Weierstrass définie par

$$\sigma_\Lambda(z) = z \cdot \prod_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}}$$

Prouver que σ_Λ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec zéros simples en $z \in \Lambda$ et pas d'autres zéros.

vii. Prouver que $\frac{d^2 \log \sigma_\Lambda(z)}{dz^2} = -\wp_\Lambda(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} - \Lambda$.

viii. Prouver que pour tout $\omega \in \Lambda$ il existe $a_\omega, b_\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\sigma_\Lambda(z + \omega) = e^{a_\omega z + b_\omega} \cdot \sigma_\Lambda(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

ix. En déduire la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}(\Lambda)^* \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow 0$$

puis qu'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Pic}^0(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathbb{C}/\Lambda$.

x. Prouver que pour tous $z, a \in \mathbb{C} - \Lambda$ on a

$$\wp_\Lambda(z) - \wp_\Lambda(a) = -\frac{\sigma_\Lambda(z+a)\cdot\sigma_\Lambda(z-a)}{\sigma_\Lambda(z)^2\cdot\sigma_\Lambda(a)^2}.$$

xi. Prouver que $\wp'_\Lambda(z) = -\sigma_\Lambda(2z)/\sigma(z)^4$.

xii. Prouver que $\sigma_\Lambda(nz)/\sigma(z)^{n^2} \in \mathbb{C}(\Lambda)$ pour tout entier n.

xiii. (Théorème de Riemann-Roch pour les courbes elliptiques) Soit $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$. Prouver à l'aide des fonctions elliptiques que $H^0(\mathbb{C}/\Lambda, \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\Lambda}(D)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $\deg(D)$ si $\deg(D) \geq 0$, et est nul si $\deg(D) < 0$.

Exercice 3.37. — Soit (ω_1, ω_2) une base de Λ. Posons $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

i. Prouver que $\wp'_\Lambda(\omega_i/2) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

ii. Montrer que les trois nombres $\wp_\Lambda(\omega_i/2)$ sont distincts pour $i = 1, 2, 3$.

iii. En déduire que $\Delta(\Lambda) \neq 0$. On a noté $\Delta(\Lambda) = g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2$. On pourra faire le lien avec le discriminant de $4x^3 - g_2(\Lambda)\cdot x - g_3(\Lambda)$.

iv. Soit C_Λ^{aff} la courbe dans $\mathbb{C}^2$ d'équation $y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda)$. Prouver en utilisant les résultats de l'exercice précédent sur les fonctions elliptiques que le morphisme

$$(\mathbb{C} - \Lambda)/\Lambda \to C_\Lambda^{\mathrm{aff}},\ z \mapsto (\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z))$$

est surjectif.

v. Prouver de même qu'il est bijectif.

De même pour la bijectivité avec la courbe projective. On a donc réussi à algébriser $\mathbb{C}/\Lambda$ en la courbe projective $C_\Lambda^{\mathrm{proj}}$. On verra (REF) que cela n'a rien de miraculeux car toutes les surfaces de Riemann compactes sont algébrisables. Il s'agira en effet d'une conséquence du théorème de Riemann-Roch.

Remarque 3.38. — Ainsi la théorie des courbes elliptiques peut être développée d'une manière complètement algébrique, en étudiant les courbes d'équation $y^2 = 4x^3 - ax - b$ vérifiant $a^3 - 27b^2 \neq 0$. Cela permet par exemple de définir les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$, dont parle la conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer, ou les courbes elliptiques sur $\mathbb{F}_p$, qui sont couramment utilisées en cryptographie dans des variantes de l'algorithme RSA.

Remarque 3.39. — Si $g \geq 2$ et $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ est un réseau, c'est à dire un sous-$\mathbb{Z}$-module isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$ tel que $\mathbb{C}^g = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, le tore complexe $\mathbb{C}^g/\Lambda$ n'est pas toujours algébrisable. Lorsqu'il est algébrisable, on dira que c'est une variété abélienne de genre g sur $\mathbb{C}$. Le caractère non automatiquement algébrique explique pourquoi la théorie des variétés abéliennes est plus difficile que celle des courbes elliptiques.

3.40. Invariant j

Le j-invariant est un nombre complexe qui caractérise la classe d'isomorphisme d'une courbe elliptique. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. Rappelons qu'on a noté $\Delta(\Lambda) = g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2 \neq 0$ qui vérifie $\Delta(c \cdot \Lambda) = c^{-12}\Delta(\Lambda)$. On pose alors $j(\Lambda) = 1728 \cdot g_2(\Lambda)^3/\Delta(\Lambda)$ qui vérifie $j(c \cdot \Lambda) = j(\Lambda)$. Ainsi j est une fonction sur l'ensemble des classes d'homothéties de réseau, c'est à dire une fonction $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ qui est holomorphe.

Remarque 3.41. — On ne peut pas dire que j est une forme holomorphe de poids 0 car elle n'est pas holomorphe à l'infini. Elle a en fait un pôle simple en l'infini et son q-développement commence par $1/q + 744 + 196884q + \cdots$. L'intérêt de la normalisation par 1728 est de rendre le résidu égal à un.

Remarque 3.42. — Les coefficients du q-développement de j sont eux aussi des objets magiques : le Moonshine de Borcherds les relie aux dimensions des représentations irréductibles du fameux groupe simple de plus grand cardinal, le Monstre !

La proposition suivante demande un peu plus de travail. Elle sera vue en cours de formes modulaires et/ou de courbes elliptiques.

Proposition 3.43. — *La fonction j induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$. Autrement dit les courbes elliptiques $\mathbb{C}/\Lambda$ et $\mathbb{C}/\Lambda'$ sont isomorphes si et seulement si $j(\Lambda) = j(\Lambda')$ et pour tout $j \in \mathbb{C}$ il existe $\Lambda \subset \mathbb{C}$ tel que $j(\Lambda) = j$.*

Corollaire 3.44. — *La fonction j induit une bijection $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$.*

Remarque 3.45. — Lorsqu'on munit $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de la structure de surface de Riemann quotient, c'est de plus un isomorphisme. On retrouve ici le contenu de la remarque 3.21, dans laquelle on affirmait que cette surface de Riemann était naïve. En effet, que pourrait-on attendre d'intéressant de la surface de Riemann $\mathbb{C}$? La bonne perspective qui rend $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ plus intéressante est de la remplacer par le champ quotient $[\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$.

CHAPITRE 4

COURBES ALGÉBRIQUES COMPLEXES

Après avoir vu le cas de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ puis de $\mathbb{C}/\Lambda$ dans les chapitres précédents, il nous faut maintenant construire des surfaces de Riemann compactes plus générales. Ce sera le cas des courbes algébriques complexes projectives lisses.

4.1. Cas affine

Avant de parler de courbes algébriques projectives lisses, il faut parler de courbes algébriques affines lisses. Rappelons tout d'abord le théorème des fonctions implicites dans le monde holomorphe.

Théorème 4.2. — *Soit $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme. Notons $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ Soit $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{X}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$. Alors il existe une fonction holomorphe $g : U \to \mathbb{C}$ où $x_0 \in U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, telle qu'il existe un voisinage V de (x_0, y_0) dans C vérifiant*

$$\mathcal{X} \cap V \;=\; \{(z, g(z),\; z \in U)\}$$

Ainsi le lieu d'annulation $\mathcal{X}$ de f est localement le graphe d'une fonction holomorphe g. On a bien sûr un énoncé symétrique si on suppose $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$ et l'on trouve alors $\mathcal{X} \cap V = \{(h(z), z),\; z \in U)\}$.

Remarque 4.3. — Le théorème vaut bien sûr pour une fonction holomorphe à deux variables f quelconque, pas seulement pour un polynôme. Mais les courbes algébriques seront par définition associées à un polynôme. Le lieu d'annulation d'une fonction holomorphe à deux variables s'appellerait plutôt une variété analytique complexe, et sera étudié dans le cours de théorie de Hodge.

Définition 4.4. — Soit $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme.

i. La courbe algébrique affine plane complexe associée à f est $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.

ii. On dit que f est lisse (ou régulier, ou non-singulier) en $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{X}$ si $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$.

iii. On dit que la courbe $\mathcal{X}$ est lisse (ou régulière, ou non-singulière) en $P \in \mathcal{X}$ si f l'est.

iv. On dit que $\mathcal{X}$ est lisse si elle l'est en tout point.

Remarque 4.5. — La condition $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$ est assez évidente d'un point de vue de la géométrie différentielle. Notons bien qu'on ne demande cette condition qu'en les points $P = (x_0, y_0)$ vérifiant $f(x_0, y_0) = 0$. On peut donc reformuler la lissité en disant que les équations $f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ n'ont pas de solution commune.

Proposition 4.6. — *Soit $\mathcal{X}$ une courbe algébrique complexe plane affine lisse associée à un polynôme f irréductible. Elle est canoniquement munie d'une structure de surface de Riemann.*

Démonstration. — On munit $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ de la topologie induite, qui est séparée. Il faut maintenant produire explicitement un atlas. Soit $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{X}$.

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$, par le théorème des fonctions implicites, il existe $x_0 \in U_P \subset \mathbb{C}$ et $P \in V_P \subset \mathcal{X}$ tel que $V_P = \{(z, g(z)),\ z \in U_P\}$. Considérons la première projection $\phi_P : V_P \to V_P, (x, y) mapsto x$. C'est un homéomorphisme de réciproque $U_P \to V_P, z \mapsto (z, g(z))$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$, il existe $y_0 \in U'_P \subset \mathbb{C}$ et $P \in V'_P \subset \mathcal{X}$ tel que $V'_P = \{(h(z)z),\ z \in U'_P\}$. Considérons la première projection $\psi_P : V'_P \to U'_P, (x, y) mapsto y$. C'est un homéomorphisme de réciproque $U'_P \to V'_P, z \mapsto (h(z), z)$.

Il faut prouver que la collection des (U_P, V_P, ϕ_P) et des (U'_P, V'_P, ψ_P) forme un atlas lorsque P varie dans $\mathcal{X}$. On recouvre déjà $\mathcal{X}$ par l'hypothèse de lissité. Si P et Q vérifient $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, on doit calculer $\phi_P \circ \phi_Q^{-1} : V_Q \to V_P$. Mais c'est l'identité $z \mapsto z$! De même si P et Q vérifient $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$.

Le cas le plus intéressant est celui où $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(Q) \neq 0$. On doit alors calculer $\phi_P \circ \psi_Q^{-1} : V'_Q \to V_P$. Mais c'est la composée de $z \mapsto (h(z), z)$ avec la première projection, donc c'est $z \mapsto h(z)$. Ainsi $\phi_P \circ \psi_Q^{-1}$ est bien holomorphe, et en fait biholomorphe en renversant le rôle de P et Q. On obtient donc un atlas de surfaces de Riemann.

Il reste à vérifier que $\mathcal{X}$ est connexe, car cela figure dans nos axiomes des surfaces de Riemann. C'est loin d'être trivial, et c'est en fait ici que l'irréductibilité de f est utile. Voir par exemple Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 2, Chapter VII, ğ 2.2, Theorem 1 ou Milne, Algebraic Geometry, prop 15.1 `https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AG15.pdf`. □

Remarque 4.7. — Le lecteur très attentif qui aura regardé la référence à Shafarevich verra que la preuve de la connexité repose sur le théorème de Riemann-Roch, qui sera un des derniers ingrédients prouvés dans ce cours. Cela ne pose toutefois pas de problèmes de circularité dans l'approche.

Remarque 4.8. — Une telle surface de Riemann $\mathcal{X}$ n'est jamais compacte. En effet sinon son image par $pr_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ serait compacte. Mais cette image est $\mathbb{C}$ car pour tout $x \in C$, le polynôme $f(x, Y)$ a des racines en Y par le théorème de D'Alembert-Gauss s'il est non constant. Et $f(x, Y)$ est constant en Y pour tout $x \in \mathbb{C}$ si et seulement si $f \in \mathbb{C}[x]$. Dans ce cas on voit directement que le lieu d'annulation de f dans $\mathbb{C}^2$ est non compact.

Remarque 4.9. — Dans le cas où f est singulier (ie non-lisse) on peut voir que l'ensemble S des P tels que $f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$ est un ensemble fini. Dans ce cas $\mathcal{X} - S$ est une surface de Riemann.

Exemple 4.10. — On a déjà rencontré des courbes affines dans l'étude des courbes elliptiques puisque $(\mathbb{C}-\Lambda)/\Lambda$ est en bijection avec $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $y^2 = 4x^3-g_2(\Lambda)x-g_3(\Lambda)$ où $\Delta(\Lambda) \neq 0$.

Exercice 4.11. — Soit $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme. Prouver que $y^2 - h(x)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[x, y]$ si et seulement si h n'est pas un carré, et que $y^2 - h(x)$ est lisse si et seulement si h est sans racines multiples.

4.12. Cas projectif

Remplacer les courbes affines par leurs variantes projectives permettra d'obtenir des surfaces de Riemann compactes. Rappelons déjà que $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^3-0)/\mathbb{C}^*$ muni de la topologie quotient. On note $[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ la classe de $(X, Y, Z) \in \mathbb{C}^3 - 0$. Même si nous n'avons pas défini formellement cette notion, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est une variété complexe de dimension deux munie de l'atlas $U_0 = \{[X, Y, Z] \mid X \neq 0\} \to \mathbb{C}^2$, $[X, Y, Z] \mapsto (Y/X, Z/X)$ de réciproque $\mathbb{C}^2 \to U_0$, $(a, b) \mapsto [1, a, b]$, et de même avec $U_1 = \{[X, Y, Z] \mid Y \neq 0\}$ et $U_2 = \{[X, Y, Z] \mid Z \neq 0\}$.

Définition 4.13. — Soit $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène. On dit qu'il est lisse (ou régulier ou non-singulier) si le système $F = \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial Z} = 0$ n'a pas de solution $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$ dans $\mathbb{C}^3$.

Le lemme suivant contient la formule d'Euler pour les polynômes homogènes. La preuve est directe en remarquant que la question est linéaire et en faisant le calcul sur les monômes. Il n'y a bien sûr aucun analogue pour les polynômes non homogènes, une dérivée ne déterminant pas le polynôme originel sans primitivation.

Lemme 4.14. — *Soit $F \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ homogène de degré d. Alors $F = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}$.*

Corollaire 4.15. — *Soit $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ homogène lisse. Alors sa déshomogéinisation $f(u,v) = F(1,u,v) \in \mathbb{C}[u,v]$ est lisse dans le sens de la définition 4.4. De même par permutation des variables.*

Démonstration. — On raisonne par contraposée. Si $(u_0,v_0) \in \mathbb{C}^2$ est solution de $f = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0$, il suffit de prouver que $[1,u_0,v_0]$ est solution de $F = \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial Z} = 0$. On a déjà $F(1,u_0,v_0) = f(u_0,v_0) = 0$. Aussi $\frac{\partial F}{\partial Y}(1 : u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial Z}(1 : u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) = 0$. C'est moins clair pour $\frac{\partial F}{\partial X}(1 : u_0,v_0)$ et l'astuce est d'utiliser la formule d'Euler pour exprimer cette quantité en terme de F, de $\frac{\partial F}{\partial Y}$ et de $\frac{\partial F}{\partial Z}$. En effet si F est de degré d, on a

$$\frac{\partial F}{\partial X}(1 : u_0, v_0) \;=\; \left(d \cdot F - u_0 \cdot \frac{\partial F}{\partial Y} - v_0 \cdot \frac{\partial F}{\partial Z}\right)(1, u_0, v_0) \;=\; 0$$

□

Remarque 4.16. — On a en fait prouvé que F est lisse dans le sens homogène si et seulement si ses trois déshomogéinisations $F(1,u,v)$, $F(u,1,v)$ et $F(u,v,1)$ sont lisses dans le sens usuel.

Proposition 4.17. — *Soit $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ homogène lisse. Alors $\mathcal{X} = \{[X,Y,Z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \mid F(X,Y,Z) = 0\}$ est canoniquement muni d'une structure de surface de Riemann compacte. On dit que $\mathcal{X}$ est une courbe algébrique complexe plane projective lisse.*

Démonstration. — Rappelons qu'on a noté U_0, U_1, U_2 les trois ouverts isomorphes à $\mathbb{C}^2$ recouvrant $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. D'après la proposition 4.6 et le corollaire précédent, $\mathcal{X} \cap U_i$ est muni d'un atlas de surface de Riemann pour $i = 0..2$. On vérifie aisément que ces atlas sont compatibles sur $\mathcal{X} \cap U_i \cap U_j$, d'où le résultat. La compacité est claire en tant que fermé dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ qui est compact. □

Remarque 4.18. — Il faut néanmoins vérifier que $\mathcal{X}$ est connexe, ce qui peut sembler surprenant car on n'a pas demandé à F d'être irréductible. Mais un résultat basique (exercice !) garantit qu'un polynôme homogène lisse est nécessairement irréductible, et toujours d'après Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 2, Chapter VII, ğ 2.2, $\mathcal{X}$ est alors connexe pour la topologie complexe.

Remarque 4.19. — Dans le cadre affine, le polynôme $f(x,y) = (x-y)(x-y-1)$ est lisse et réductible. Son lieu d'annulation $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ consiste en deux droites parallèles. Par contre le polynôme homogène $F(X,Y,Z) = (X-Y)(X-Y-Z)$ n'est pas lisse. Son lieu d'annulation $\bar{\mathcal{X}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ consiste en l'adhérence de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, c'est à dire en deux droites projectives qui se rencontrent à l'infini. Bref le fait qu'un polynôme homogène lisse est irréductible, mais que c'est faux dans le cas non homogène est relié à la différence entre géométrie projective et affine.

4.20. Fonctions méromorphes

4.20.1. Cas affine. — Si $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ est le lieu d'annulation de $f \in \mathbb{C}[x, y]$ lisse irréductible, il résulte du lemme 4.21 que la fraction rationnelle $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ est une fonction méromorphe sur $\mathcal{X}$ pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que f ne divise pas Q.

Lemme 4.21. — *Soit $Q \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que $Q(x, y) = 0$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tels que $f(x, y) = 0$, où f est irréductible. Alors f divise Q.*

Démonstration. — C'est une conséquence directe du Nullstellensatz [?], qui garantit qu'une puissance de Q est dans l'idéal engendré par f. Donc $Q^r = fg$ avec $g \in \mathbb{C}[x, y]$. Mais $\mathbb{C}[x, y]$ est factoriel, donc f irréductible est premier donc vérifie le lemme d'Euclide-Gauss, donc $f|Q^r$ implique $f|Q$. □

Corollaire 4.22. — *Le corps des fonctions méromorphes $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ contient le corps* $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[x, y]/(f))$.

Remarque 4.23. — Toutes les fonctions méromorphes ne sont pas de ce type : prendre $sin(z)$ si $\mathcal{X} = \mathbb{C}$.

Remarque 4.24. — L'anneau $\mathbb{C}[x, y]/f$ est intègre car f est irréductible donc premier car $\mathbb{C}[x, y]$ est factoriel, donc l'idéal (f) est premier. Par Frac on désigne bien sûr son corps des fractions. On voit que l'extension $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[x, y]/f)/\mathbb{C}$ est de type fini (ie engendré par un nombre fini d'éléments, soit x et y) de degré de transcendance un. Par exemple si $f(x, y) \neq x$, alors f ne divise pas x donc le morphisme $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x, y]/f$ est injectif, et il passe aux corps des fractions en une injection

$$\mathbb{C}(x) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[x, y]/f)$$

qui est une extension algébrique de degré fini : à $\mathbb{C}(x)$ on adjoint une variable y assujettie à la relation $f(x, y) = 0$.

4.24.1. Cas projectif. — Si $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est le lieu d'annulation de $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ homogène lisse, toute fraction rationnelle $\frac{P(X,Y,Z)}{Q(X,Y,Z)}$ homogène de degré nul définit une fonction méromorphe sur $\mathcal{X}$ si Q ne divise pas f. Il faut en effet vérifier que Q n'est pas identiquement nul sur $\mathcal{X}$. Mais cela se teste sur les trois courbes affines $\mathcal{X} \cap U_i$, $i = 0..2$. Et $Q(X, Y, Z) = 0$ pour tous $[X, Y, Z] \in \mathcal{X} \cap U_1$ si et seulement si $Q(1, u, v) = 0$ pour tous $(u, v) \in \mathcal{Y}$, où $\mathcal{Y} \subset \mathbb{C}^2$ est la courbe affine définie par l'annulation de $f(u, v) = F(1, u, v)$.

En utilisant le lemme 4.21 dans les trois cartes, on voit donc que Q est identiquement nul sur $\mathcal{X}$ si et seulement si F divise X.

Remarque 4.25. — Le lecteur prendra garde que si $\frac{P(X,Y,Z)}{Q(X,Y,Z)}$ définit une fonction méromorphe sur $\mathcal{X}$, ce n'est pas le cas de $P(X,Y,Z)$ ou de $Q(X,Y,Z)$ indépendamment. En effet ils ne sont pas homogènes de degré nul, donc ne définissent même pas des fonctions ensemblistes sur $\mathcal{X}$ ou sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Reprenons tout simplement le cas $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \{[X,Y]\}$ pour expliquer cela plus en détail. Le lecteur verra en géométrie algébrique qu'il existe pour tout $k \geq 0$ un faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules dont les section globales sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont les les polynômes homogènes de degré k en X et Y. C'est un exemple de faisceau "abstrait" qui ne paramètre pas des fonctions, puisque X n'est pas une fonction ensembliste sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Disons-le autrement : le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ n'est pas canoniquement plongé dans le faisceau des fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Mais tout choix d'un point $P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ définit le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k \cdot (P))$ qui est cette fois plongé dans le faisceau des fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, puisqu'il paramètre des fonctions méromorphes de diviseur $\geq -k \cdot (P)$. Il se trouve que les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k \cdot (P))$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ sont non canoniquement isomorphes en tant que faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-modules, ce qui permet de plonger $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ dans le faisceau des fonctions méromorphes, donc de voir ses sections globales comme des fonctions méromorphes.

Par exemple on a dit que par définition $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = \mathbb{C} \cdot X + \mathbb{C} \cdot Y$ qui ne s'injecte pas dans $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$. Si on choisit $P = \infty = [1,0] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, on a par contre $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1 \cdot (\infty))) = \mathbb{C}[z]_{deg\leq 1} = \mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot X/Y$, qui est bien plongé dans $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$. Il se trouve que pour $P = \infty$, l'isomorphisme $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \to H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1 \cdot (\infty)))$ est l'application $\mathbb{C} \cdot X + \mathbb{C} \cdot Y \mapsto \mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot X/Y$, $f \mapsto f/Y$.

Si par contre on avait choisi $P = 0 = [0,1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, on aurait toujours $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = \mathbb{C} \cdot X + \mathbb{C} \cdot Y$ mais cette fois $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1 \cdot (\infty))) = \mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot Y/X$ qui s'injecte dans $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$. L'isomorphisme correspondant au niveau des sections globales est $\mathbb{C} \cdot X + \mathbb{C} \cdot Y \mapsto \mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot Y/X$, $f \mapsto f/X$.

On résume cette discussion fastidieuse en que tous les faisceaux ne paramètrent pas des fonctions, ie ne sont pas plongés dans le faisceau des fonctions méromorphes. Le même faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ admet plusieurs plongements dans le faisceau des fonctions méromorphes, qui au niveau des sections globales reviennent à diviser un polynôme homogène de degré k par un polynôme homogène fixé de degré k ; le résultat est une fonction rationnelle homogène de degré nul, donc effectivement une fonction méromorphe.

Comme on vient de le dire, si $R(X,Y,Z)$ est une fraction rationnelle homogène de degré nul, la fonction méromorphe qu'elle définit sur $\mathcal{X}$ devient égale à $R(1,u,v)$ sur la courbe affine $\mathcal{X} \cap U_1$. Réciproquement toute fraction rationnelle $S(u,v)$ dont le dénominateur n'est pas divisible par $F(1,u,v)$ définit la fonction méromorphe $S(Y/X, Z/X)$ sur $\mathcal{X} \cap U_1$, dont on vérifie immédiatement qu'elle s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathcal{X}$. On a donc montré la proposition suivante.

Proposition 4.26. — *Le corps des fonctions méromorphes* $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ *contient les trois corps isomorphes* $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[y,z]/F(1,y,z)$, $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[x,y]/F(x,y,1)$ *et* $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[x,z]/F(x,1,z)$.

Remarque 4.27. — L'isomorphisme $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[y,z]/F(1,y,z)$, $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[a,b]/F(a,b,1)$ correspond à un changement de cartes entre les cartes U_0 et U_3 de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, donc s'écrit explicitemment $a = 1/z$, $b = y/z$. En effet $(y,z) \in \mathbb{C}^2$ s'envoie sur $[1,y,z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \cap U_0$ via la réciproque de la carte U_0, puis $[1,y,z] = [1/z, y/z, 1]$ sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \cap U_0 \cap U_2$, qui s'envoie sur $(1/z, y/z)$ par la carte U_2.

Remarque 4.28. — On verra comme conséquence du théorème GAGA que toute fonction méromorphe sur $\mathcal{X}$ une courbe algébrique plane projective est en fait une fonction rationnelle. Ainsi $\mathcal{M}(\mathcal{X}) = \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[y,z]/F(1,y,z)$. En particulier l'extension $\mathcal{M}(\mathcal{X})/\mathbb{C}$ est de type fini et de degré de transcendance un.

Exemple 4.29. — On a déjà vu que $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(x)$. De même la courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ est algébrique isomorphe à $C_\Lambda^{\mathrm{proj}}$ par l'exercice 3.37 (quoiqu'on n'a alors prouvé que le caractère bijectif de $\mathbb{C}/\Lambda \to C_\Lambda^{\mathrm{proj}}$, et qu'il faudra attendre le chapitre suivant pour vérifier que c'est bien un isomorphisme de surfaces de Riemann). Dans l'exercice 3.36, on avait également montré que $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est une extension de degré de transcendance un de $\mathbb{C}$, égale au corps des fractions de $\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - 4x^3 + g_2(\Lambda)x + g_3(\Lambda)$.

4.30. Formes différentielles

Dans le cas affine où $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ est défini par l'annulation de $f \in \mathbb{C}[x,y]$ irréductible lisse, dx et dy des symboles formels assujetis à la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \ = \ 0$$

. Notons $K = \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[x,y]/f)$. On voit alors que les K-espaces vectoriels $K \cdot dx$, $K \cdot dy$ et $K \cdot dx + K \cdot dy$ sont égaux, et sont de dimension 1.

Remarque 4.31. — La relation

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \ = \ 0$$

s'obtient en différentiant l'équation $f(x,y) = 0$ tautologiquement vérifiée sur X. On voit qu'en toute généralité les K-espaces vectoriels $K \cdot dx$ et $K \cdot dy$ ne sont égaux que si $f(x,y) \neq x, y$. Si $f(x,y) = x$ alors $dx = 0$ et si $f(x,y) = y$ alors $dy = 0$.

Lemme 4.32. — *Le module des 1-formes différentielles méromorphes* $\mathcal{M}(\mathcal{X})^{\mathrm{diff}}$ *contient* $K \cdot dx$.

Remarque 4.33. — L'inclusion $K \cdot dx \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})^{\text{diff}}$ est stricte, puisque l'inclusion $K \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$ l'était déjà. Penser par exemple à la forme $sin(x)dx$ sur $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ muni de la coordonnée x. Par contre puisque $\mathcal{M}(\mathcal{X})^{\text{diff}}$ est un $\mathcal{M}(\mathcal{X})$-espace vectoriel de dimension ≤ 1, on voit que $\mathcal{M}(\mathcal{X})^{\text{diff}} = \mathcal{M}(\mathcal{X}) \cdot dx = \mathcal{M}(\mathcal{X}) \cdot dy$.

Dans le cas projectif où $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est défini par l'annulation de $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ homogène lisse, posons $f(x, y) = F(x, y, 1)$, $g(y, z) = F(1, y, z)$ et $h(x, z) = F(x, 1, z)$. Notons $K_z = \text{Frac}(\mathbb{C}(x, y]/f)$, $K_x = \text{Frac}(\mathbb{C}[y, z]/g)$ et $K_y = \text{Frac}(\mathbb{C}[x, z]/h)$ dont on a déjà dit qu'il s'agit de 3 corps isomorphes. On a alors les 6 espaces vectoriels isomorphes

i. $K_z \cdot dx$ et $K_z \cdot dy$ où dx, dy sont des symboles vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = 0$

ii. $K_x \cdot dy$ et $K_x \cdot dz$ où dy, dz sont des symboles vérifiant $\frac{\partial g}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot dz = 0$

iii. $K_y \cdot dx$ et $K_y \cdot dz$ où dx, dz sont des symboles vérifiant $\frac{\partial h}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot dz = 0$

Lemme 4.34. — *Ces 6 espaces vectoriels sont isomorphes à un même sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(\mathcal{X})^{\text{diff}}$. En particulier $\mathcal{M}(\mathcal{X})^{\text{diff}} \neq 0$.*

Remarque 4.35. — Il résultera là encore de GAGA que $\mathcal{M}(\mathcal{X})^{\text{diff}} = K_z \cdot dx$, donc que toute forme différentielle méromorphe est rationnelle.

Exemple 4.36. — Si $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, on a déjà vu que $\mathcal{M}(\mathcal{X})^{\text{diff}} = \mathbb{C}(z)dz$. Si $\mathcal{X} = \mathbb{C}/\Lambda = C_{\Lambda}^{\text{proj}}$, on a aussi vu que $\mathcal{M}(\mathcal{X})^{\text{diff}} = K \cdot dx = K \cdot dy$ en notant $K = \text{Frac}(\mathbb{C}[x, y]/y^2 - 4x^3 + g_2(\Lambda)x + g_3(\Lambda))$.

4.37. Spectre maximal et topologie de Zariski

Cette partie ne sera pas abordée en cours, et constitue l'objet du cours de variétés algébriques.

Dans cette partie, qui est une introduction à la géométrie algébrique avec le point de vue des variétés sur un corps algébriquement clos, on se cantonne au cas affine pour simplifier. Le cas général (par exemple projectif) s'obtiendrait par recollement, et ce n'est pas le plus dur.

Nous avons défini les courbes algébriques planes lisses $\mathcal{X}$ comme lieu d'annulation de $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ dans $\mathbb{C}^2$. Mais nous les avons muni de la topologie induite (on dira la topologie complexe pour la différencier de la topologie de Zariski à venir), dont une base d'ouverts sont les boules $\{(x, y) \in \mathcal{X} \text{ tq } |x - x_0| < r,\ |y - y - 0| < R\}$, qui n'a rien d'algébrique car elle n'est pas donnée par des égalités ou des non-égalités polynomiales. On a utilisé cette topologie pour construire l'atlas de surface de Riemann, ce qui en retour muni $\mathcal{X}$ d'un faisceau de fonctions holomorphes. Là encore les sections de ce faisceau sur de petits ouverts n'ont rien d'algébrique. Désignons donc par $\mathcal{X}^{\text{an}} = (\mathcal{X}, \text{Compl}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dashv\backslash})$ le triplet formé de l'ensemble $\mathcal{X}$ muni de sa topologie complexe notée Compl et du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dashv\backslash}$ des fonctions holomorphes pour cette topologie. Ici "an" veut dire analytique-complexe, qui est un autre mot pour holomorphe. Par définition, $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est un espace localement annelé, c'est à dire un espace topologique muni d'un faisceau d'anneau.

Définition 4.38. — La topologie de Zariski (notée Zar) sur $\mathcal{X}$ est la topologie dont une base d'ouverts est $U(f) = \{(x,y) \in \mathcal{X} \mid g(x,y) \neq 0\}$ où $g \in \mathbb{C}[x,y]$ est un polynôme.

Remarque 4.39. — La même définition muni $\mathbb{C}^2$ d'une topologie de Zariski, mais également $\mathbb{C}^n$ et tout sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$ défini par l'annulation de fonctions polynômiales $f_1, \cdots, f_r \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, sans aucune hypothèse d'irréductibilité ou de lissité. Notons dans ce dernier cas $I = (f_1, \cdots, f_r) \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ l'idéal engendré. L'ouvert $U(f)$ de $\mathcal{X}$ ne dépend que de l'image de $g \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ dans $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]/I$.

Dans le cas d'une courbe algébrique plane, la topologie de Zariski sur $\mathcal{X}$ est tout simplement celle dont les fermés sont les unions finies de points, et les ouverts leurs complémentaires.

Remarque 4.40. — La topologie de Zariski est non séparée car l'intersection de deux ouverts non vides est non vide (et même dense). Elle est moins fine que la topologie complexe, donc le morphisme identité $(\mathcal{X}, \mathrm{Compl}) \to (\mathcal{X}, \mathrm{Zar})$ est continu mais n'est pas un homéomorphisme.

Définition 4.41. — On munit l'espace topologique $(\mathcal{X}, \mathrm{Zar})$ du faisceau d'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}}$ défini par

Dans ce cas particulier d'une courbe algébrique plane, cela définit complètement le faisceau puisque tout ouvert est dans la base, car complémentaire d'un nombre fini de points. Dans le cas plus général où $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$ est défini par l'annulation d'un idéal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, on pose de manière similaire mais cela ne définit le faisceau d'anneau que sur la base d'ouverts. On le définit sur tout ouvert en forçant la propriété de faisceau à être vérifiée : si $U = \cup_i U(g_i)$, on définit $H^0(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}})$ comme le noyau de la flèche de restriction

$$\prod_i H^0(U(g_i), \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}}) \to \prod_{i,j} H^0(U(g_i) \cap U(g_j), \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}})$$

Vu que $U(g_i) \cap U(g_j) = U(g_i \cdot g_j)$, on définit donc $H^0(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}})$ comme le noyau de la flèche induite par les flèches évidents $A[1/g] \to A[1/gh]$, où on a noté $A = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]/I$ pour alléger.

Remarque 4.42. — En particulier, $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}}) = A$, qui est bien formé de fonctions polynômiales, d'où le symbole alg utilisé.

Exercice 4.43. — Montrer que $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ est un ouvert de Zariski de $\mathbb{C}^2$ qui n'est pas dans la base d'ouverts. Calculer $H^0(\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}^{\mathrm{alg}})$.

Exercice 4.44. — Vérifier que pour tout $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$ défini par l'annulation d'un idéal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, le préfaisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}}$ défini auparavant est bien un faisceau. Ainsi il faut vérifier que si $U(g) = \cup_i U(g_i)$ sont dans la base d'ouvert, la suite

$$0 \to A[\frac{1}{g}] \to \prod_i A[\frac{1}{g_i}] \to \prod_{i,j} A[\frac{1}{g_i \cdot g_j}]$$

est exacte.

Remarque 4.45. — Soit $I \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ un idéal. D'après le théorème 4.58, le sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$ des $(x_1, \cdots, x_n)$ tels que $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ pour tout $f \in I$ est bien sûr déterminé par I, mais détermine seulement $\sqrt{I}$ en retour. En effet $\sqrt{I}$ est l'ensemble des $g \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ identiquement nuls sur $\mathcal{X}$.

Or d'après la remarque 4.42, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}}$ permet de retrouver A en prenant les sections globales, donc $I = \mathrm{Ker}(k[X_1, \cdots, X_n] \to A)$.

C'est donc que l'espace topologique $\mathcal{X}$ ne détermine pas le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}}$, ni l'algèbre A, mais seulement sa réduction.

Remarque 4.46. — Que l'espace topologique ne détermine pas le faisceau d'anneau n'est pas si choquant : penser aux sphères exotiques en géométrie différentielle. Sur l'espace topologique $\mathbb{S}^7$ il existe plusieurs structures différentielles non équivalentes, donc plusieurs faisceaux de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ non égaux. En géométrie différentielle, l'objet fondamental n'est pas l'espace topologique $\mathbb{S}^7$ mais l'espace localement annelé $(\mathbb{S}^7, \underline{\mathcal{C}}_X^\infty$.

On dispose au final d'un espace localement annelé $\mathcal{X}^{\mathrm{alg}} = (\mathcal{X}, \mathrm{Zar}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}})$.

Si on revient dans le cas où $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ est défini par l'annulation d'un polynôme lisse irréductible, on dispose de l'identité de $\mathcal{X}$ qui est un morphisme d'espace localement annelé $\mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}^{\mathrm{alg}}$. Cela veut juste dire que l'identité $(\mathcal{X}, \mathrm{Compl}) \to (\mathcal{X}, \mathrm{Zar})$ est continue et que pour tout ouvert Zariski $U \subset \mathcal{X}$, on dispose d'un morphisme canonique (l'inclusion évidente des fonctions rationnelles sans pôles dans les fonctions holomorphes)

$$H^0(U,\ \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}}) \ \hookrightarrow\ H^0(U,\ \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{an}})$$

.

Appelons désormais une courbe algébrique plane lisse irréductible un espace localement annelé $\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}$ où $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ est défini par l'annulation d'un polynôme lisse irréductible. Le contenu de la proposition 4.6 peut se reformuler en l'existence d'un foncteur de la catégorie des courbes algébriques planes lisses irréductibles vers la catégorie des surfaces de Riemann, qui envoie l'espace localement annelé $\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}$ sur $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$, qui est obtenu à partir de $\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}$ en conservant l'ensemble $\mathcal{X}$, en remplaçant la topologie de Zariski par la topologie complexe, et en remplaçant le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{alg}}$ des fonctions algébriques pour la topologie de Zariski par le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{an}}$ des fonctions holomorphes pour la topologie complexe.

Pour parler de foncteur, il aurait fallu d'abord parler de morphisme. Si $\mathcal{X}_f \subset \mathbb{C}^2$ est défini par l'annulation de $f \in \mathbb{C}[A, B]$ et $\mathcal{X}_g \subset \mathbb{C}^2$ est défini par l'annulation de $g \in \mathbb{C}[X, Y]$, on appelle morphisme $\phi : \mathcal{X}_f^{\mathrm{alg}} \to \mathcal{X}_g^{\mathrm{alg}}$ la donnée d'un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\psi : \mathbb{C}[X, Y]/(g) \to \mathbb{C}[A, B]/(f)$. Bien sûr, ψ est défini par les polynômes $\psi(X), \psi(Y) \in \mathbb{C}[A, B]$, qui définissent en retour une application $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(a, b) \mapsto (\psi(a), \psi(b))$.

Lemme 4.47. — *Soit $\psi : \mathbb{C}[X, Y]/(g) \to \mathbb{C}[A, B]/(f)$ un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres. Alors l'application $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(a, b) \mapsto (\psi(a), \psi(b))$ vérifie $g(\phi(a, b)) = 0$ pour tous $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $f(a, b) = 0$, donc induit une application continue $\phi : \mathcal{X}_f \to \mathcal{X}_g$.*

Démonstration. — C'est une conséquence du corollaire 4.55, puisque $\psi : \mathbb{C}[X, Y]/(g) \to \mathbb{C}[A, B]/(f)$ induit une application $\mathrm{Spm}(\mathbb{C}[A, B]/(f)) \to \mathrm{Spm}(\mathbb{C}[X, Y]/(g))$, $\mathfrak{m} \mapsto \psi^{-1}(\mathfrak{m}$, où on vérifie que $\psi^{-1}(\mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[X, Y]/(g)$ est maximal grâce au lemme suivant. $\square$

Lemme 4.48. — *Soit A, B deux k-algèbres de type fini, où k est un corps algébriquement clos et $\psi : A \to B$ un morphisme de k-algèbres. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \subset B$, l'idéal $\psi^{-1}(\mathfrak{m}$ est maximal dans A.*

Démonstration. — On a une injection $k \subset A/\psi^{-1}(\mathfrak{m} \subset B/\mathfrak{m}$ mais il résulte du Nullstellensatz 4.51 que $B/\mathfrak{m} = k$ donc $A/\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ et $\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ est maximal. $\square$

Remarque 4.49. — Si $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est l'injection canonique, l'image réciproque de $0_{\mathbb{Q}}$ est première non maximale. C'est exactement le genre de phénomène qui fait qu'en théorie générale des schémas, on remplace le spectre maximal par le spectre premier. Dans le cas des algèbres de type fini sur un corps, le spectre maximal suffit.

Remarque 4.50. — Si une application polynômiale $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ vérifie $g(\phi(a, b)) = 0$ pour tous $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $f(a, b) = 0$, le morphisme induit $\psi : \mathbb{C}[X, Y] \to \mathbb{C}[A, B]$ ne passe pas nécessairement au quotient en $\psi : \mathbb{C}[X, Y]/g \to \mathbb{C}[A, B]/f$. C'est le cas si f et g sont irréductibles d'après le théorème 4.58.

On retrouve là aussi que les morphismes d'espaces localement annelés $\mathcal{X}_f^{\mathrm{alg}} \to \mathcal{X}_g^{\mathrm{alg}}$ correspondent à une donnée plus forte que simplement celle d'une application polynômiale de $\mathcal{X}_f$ dans $\mathcal{X}_g$, à moins d'une hypothèse additionnelle sur f et g

On peut alors justifier la fonctorialité de $\mathcal{X}^{\mathrm{alg}} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$: l'application $\phi : \mathcal{X}_f \to \mathcal{X}_g$, $(a, b) \mapsto (\psi(a), \psi(b))$ continue pour la topologie de Zariski est également continu pour la topologie complexe, et induit un morphisme de surfaces de Riemann $\phi^{\mathrm{an}} : \mathcal{X}_f^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}_g^{\mathrm{an}}$.

Plus généralement si $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$ est défini par l'annulation d'un idéal $I \subset \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ et $\mathcal{Y} \subset \mathbb{C}^m$ est défini par l'annulation d'un idéal $J \subset \mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_m]$, on appelle morphisme $\phi : \mathcal{X}^{\mathrm{alg}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{alg}}$ la donnée d'un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\psi : \mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_m]/J \to \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]/I$. On vérifie qu'il induit une application $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ continue pour la topologie de Zariski, bref que $g(\psi(x_1), \cdots, \psi(x_n)) = 0$ pour tout $g \in J$ et pour tous $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ pour tout $f \in I$.

4.50.1. Reformulation via le spectre maximal. — Le lien avec les idéaux maximaux est déjà clair, de part l'utilisation à plusieurs reprises du Nullstellensatz. Par le corollaire 4.55, on peut remplacer $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, f(x_1, \cdots, x_n) = 0 \forall f \in I\}$ pour tout idéal $I \subset \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ par le spectre maximal $\mathrm{Spm}(\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n])$, puisque $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (X_1 - x_1, \cdots, X_n - x_n)$ induit une bijection entre ces deux ensembles. On peut donc transporter les ouverts de Zariski du côté gauche en des sous-ensembles du côté droit, ie munir $\mathrm{Spm}(\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]/I)$ de la topologie de Zariski. On vérifie sans peine que l'ouvert $U(g)$ correspond à $\{\mathfrak{m} \mid f \notin \mathfrak{m}\}$.

Ainsi au final on peut redéfinir les variétés algébriques affines complexes comme les $\mathrm{Spm}(A)$ pour A une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, muni de la topologie engendrée par les $U(f) = \{\mathfrak{m} \mid f \notin \mathfrak{m}\}$ et du faisceau d'anneau dont les sections sur $U(f)$ est $A[1/f]$.

Terminons sur un panorama des différentes variantes des objets affines de géométrie algébrique disponibles dans la littérature :

i. La plus élémentaire consiste à parler des sous-ensemble $\mathcal{X}_I \subset k^n$ définis par l'annulation des éléments d'un idéal $I \subset k[X_1, \cdots, X_n]$. Ici k est un corps algébriquement clos. C'est l'approche du chapitre I de Hartshorne, Algebraic Geometry. Dans cette approche il faut sans cesse utiliser le théorème 4.58. La variété $\mathcal{X}_I$ ne dépend que de $\sqrt{I}$, l'anneau des fonctions algébriques globales sur $\mathcal{X}_I$ est $k[X_1, \cdots, X_n]/\sqrt{I}$, les morphismes $\mathcal{X}_I \to \mathcal{X}_J$ correspondent bijectivement aux morphismes de k-algèbres $k[Y_1, \cdots, Y_m]/\sqrt{J} \to k[X_1, \cdots, X_n]/\sqrt{I}$.

ii. Une variante existe lorsque k est parfait non algébriquement clos. On fixe $\bar{k}$ une clôture algébrique. Dans ce cas on fixe $I \subset k[X_1, \cdots, X_n]$ un idéal et on définit $\mathcal{X}_I \subset \bar{k}^n$ comme le sous-ensemble des points annulés par tous les $f \in I$, muni de son action canonique de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. C'est un point de vue élémentaire développé dans le chapitre 1 de Silvermann, Arithmetic of Elliptic Curves.

iii. Que k soit algébriquement clos ou pas, on peut définir $\mathcal{X}_I$ comme le spectre maximal de $k[X_1, \cdots, X_n]/I$ muni de sa topologie de Zariski et de son faisceau d'anneaux dont les section globales sont $k[X_1, \cdots, X_n]/I$. C'est au final le point de vue adopté dans toute notre discussion. Ici le faisceau d'anneau est porteur d'une information plus riche que l'espace topologique, car il dépend de I et pas juste de $\sqrt{I}$. De même les morphismes $\mathcal{X}_I \to \mathcal{X}_J$ sont par définition associés aux morphismes de k-algèbres $k[Y_1, \cdots, Y_m]/J \to k[X_1, \cdots, X_n]/I$. C'est également le point de vue développé dans `https://webusers.imj-prg.fr/~daniel.juteau/juteau_files/LePotier.pdf`. En vérité les trois points de vue précédents posent de sérieux problèmes mathématiques à divers stades de la théorie.

iv. Le meilleur point de vue, qui est à la fois le plus général et le plus abstrait, est bien sûr celui de Grothendieck que vous verrez en cours de schémas. On regarde ici l'ensemble des idéaux premiers $\mathrm{Spec}(A)$ de toute anneau A (y compris $\mathbb{Z}[x,y]/(y^2 - 4x^3 - 1)$, ce qui a des applications arithmétiques évidentes) muni de sa topologie de Zariski et d'un faisceau d'anneaux dont les sections globales sont A. Les morphismes $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ sont associés aux morphismes d'anneaux $B \to A$ dans l'autre sens. Voir la remarque 4.49 pour comprendre pourquoi les idéaux maximaux doivent être remplacés par les idéaux premiers lorsque A n'est plus une algèbre de type fini sur un corps.

4.50.2. Annexe : les théorèmes Nullstellensatz. — Il s'agit plus d'une marque déposée de théorèmes que d'un énoncé individuel. Le lecteur trouvera les démonstrations absentes dans tous les livres d'algèbre commutative. Soit k un corps algébriquement clos. Soit A une k-algèbre de type fini. En choisissant une présentation $k[X_1, \cdots, X_n] \to A$ et en notant I le noyau, on en déduit que A est isomorphe à $k[X_1, \cdots, X_n]/I$. Par noethérianité de $k[X_1, \cdots, X_n]$, l'idéal $I = (f_1, \cdots, f_r)$ est de plus engendré par un nombre fini de polynômes. On notera alors $\mathrm{Spm}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A.

Théorème 4.51. — *L'application $k^n \to \mathrm{Spm}(k[X_1, \cdots, X_n])$ qui envoie $(x_1, \cdots, x_n)$ sur $(X_1 - x_1, \cdots, X_n - x_n)$ est bijective.*

Remarque 4.52. — C'est complètement faux si k n'est pas algébriquement clos : l'idéal $(X^2 + 1)$ est maximal dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 4.53. — Ainsi l'idéal maximal correspondant à $(x_1, \cdots, x_n)$ est l'idéal $\mathfrak{m}$ des $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ tels que $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$. En effet $\mathfrak{m}$ est maximal comme noyau du morphisme d'algèbre $k[X_1, \cdots, X_n] \to k$, $f \mapsto f(x_1, \cdots, x_n)$, et contient clairement $(X_1 - x_1, \cdots, X_n - x - n)$ qui est aussi maximal, d'où l'égalité. L'enjeu du Nullstellensatz est de prouver que tout idéal maximal est de ce type.

Remarque 4.54. — Pour tout $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$, notons $V(f) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in k^n \mid f(x_1, \cdots, x_n) = 0$. La bijection réciproque $\mathrm{Spm}(k[x_1, \cdots, X_n]) \to k^n$ est alors $\mathfrak{m} \mapsto \cap_{f \in \mathfrak{m}} V(f)$ et tout l'enjeu de la preuve est de vérifier que cette intersection est un singleton.

Corollaire 4.55. — *Soit $I = (f_1, \cdots, f_r)$ un idéal de $k[X_1, \cdots, X_n]$. L'application*

$$\{(x_1, \cdots, x_n) \in k^n \mid f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \, \forall i = 1 \ldots r\} \to \mathrm{Spm}(k[X_1, \cdots, X_n]/I)$$

qui envoie $(x_1, \cdots, x_n)$ sur $(X_1, \cdots, X_n)$ est bijective de réciproque $\mathfrak{m} \mapsto \cap_{f \in \mathfrak{m}} V(f)$.

Démonstration. — L'application de passage au quotient $\pi : k[X_1, \cdots, X_n] \to k[X_1, \cdots, X_n]/I$ induit (via π^{-1}) une bijection entre les idéaux maximaux de $k[X_1, \cdots, X_n]/I$ et les idéaux maximaux de $k[X_1, \cdots, X_n]$ contenant I. Il suffit donc de prouver que

$(X_1 - x_1, \cdots, X_n - x_n)$ contient I si et seulement si $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ pour tout $f \in I$. Or si $(X_1 - x_1, \cdots, X_n - x_n)$ contient I, tout $f \in I$ s'écrit $f = \sum_i (X_i - x_i) g_i$ donc s'annule en $(x_1, \cdots, x_n)$. Réciproquement si $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ pour tout $f \in I$ alors I est inclus dans $\{f \in k[X_1, \cdots, X_n] \mid f(x_1, \cdots, x_n) = 0\}$ qui est égal à $(X_1 - x_1, \cdots, X_n - x_n)$ par la remarque 4.53. □

Remarque 4.56. — L'idéal I détermine évidemment $\mathrm{Spm}(k[X_1, \cdots, k_n]/I)$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in k^n \mid f(x_1, \cdots, x_n) = 0 \, \forall f \in I\}$. On n'a jamais dit que la réciproque était vraie ! Et c'est évidemment faux sans hypothèse sur I : $I = x^2 \subset k[x]$ vérifie $\mathrm{Spm}(k[X]/I) = \{(X)\} = \mathrm{Spm}(k[X]/X)$, et de manière équivalente $\{x \in k \,|x^2 = 0\} = \{x \in k \,|x = 0\}$. Le problème est que l'idéal I n'est pas radiciel.

Rappelons qu'un anneau B est réduit si $b^n = 0$ implique $b = 0$ lorsque $b \in B, n > 0$. Un idéal I d'un anneau A est radiciel si A/I est un anneau réduit. Cela est équivalent à demander que $a^n \in I$ implique $a \in I$. Tout idéal I de A est inclus dans un plus petit idéal radiciel noté $\sqrt{I}$. On a $\sqrt{I} = \{f \in A \mid \exists n > 0 \mid f^n \in I\}$. Ainsi $A/\sqrt{I}$ est le plus gros quotient réduit de A/I.

Exemple 4.57. — Si $A = k[x]$ et $I = (x^2)$, le quotient $A/I = k[x]/x^2$ n'est pas réduit puisque $x \neq 0$ mais $x^2 = 0$. Le radical $\sqrt{I}$ de I est (x) et le quotient $k[x]/(x) = k$ est bien réduit.

L'importance de $\sqrt{I}$ dans les théorèmes Nullstellensatz est que $\mathrm{Spm}(A/I)$ détermine exactement $\sqrt{I}$ par le résultat suivant.

Théorème 4.58. — *Soit $I \subset k[X_1, \cdots, X_n]$ un idéal. Alors $\sqrt{I} = \cap_{\mathfrak{m} \supset I} \mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ parcourt les idéaux maximaux de $k[X_1, \cdots, X_n]$ contenant I. De manière équivalente par le théorème 4.55, la racine $\sqrt{I}$ est l'ensemble des $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ s'annulant sur l'ensemble des $(x_1, \cdots, x_n) \in k^n$ vérifiant $g(x_1, \cdots, x_n) = 0$ pour tout $g \in I$.*

Corollaire 4.59. — *En utilisant la bijection entre idéaux de $k[X_1, \cdots, X_n]$ contenant J et idéaux de $k[X_1, \cdots, X_n]/J$, on en déduit que le même théorème vaut pour les idéaux I de $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]/J$, donc pour les idéaux de toute k-algèbre de type fini.*

CHAPITRE 5

REVÊTEMENTS RAMIFIÉS

5.1. Morphismes de surfaces de Riemann

Soit X une surface de Riemann et $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe (qui n'est donc définie que sur un ouvert de X). Rappelons qu'on a vu dans l'exercice 2.68 que f s'étend uniquement en $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Donnons d'ailleurs l'argument pour résoudre cet exercice : dans une carte on écrit $f(z) = g(z)/h(z)$ avec g, h holomorphes qui ne s'annulent pas simultanément. On considère alors dans cette carte $\tilde{f}(z) = [g(z), h(z)] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et on vérifie que cette construction se recolle.

Proposition 5.2. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann. Alors c'est une application ouverte.*

Démonstration. — L'ouverture d'une application continue se teste localement. Or dans les cartes c'est un théorème bien connu d'analyse complexe. □

Proposition 5.3. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme injectif de surfaces de Riemann. Il induit un isomorphisme de surfaces de Riemann $X = f(X)$ sur son image.*

Démonstration. — On a bien une bijection $f : X- > f(X)$ et $f(X) \subset Y$ est une surface de Riemann car c'est un ouvert par la proposition 5.2. Or la réciproque d'une fonction holomorphe bijective est holomorphe, comme il résulte du théorème d'inversion locale holomorphe. □

Proposition 5.4. — *Soit X une surface de Riemann compacte et $f : X \to Y$ un morphisme non constant. Il est surjectif et Y est compact.*

Démonstration. — Comme f est ouverte de source compacte et de but séparé, son image est ouverte et fermée. Comme Y est connexe on a le résultat. □

Proposition 5.5. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme non constant alors pour tout $y \in Y$, la fibre $f^{-1}(y) \subset Y$ est discrète, et non vide si X est compact.*

Démonstration. — Soit $x \in X$ un antécédant de y. Considérons une coordonnée locale z sur X centrée en x et z' une coordonnée locale sur Y centrée en y (voir la définition 2.55). Soit $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z'^m$ l'écriture de f dans ces coordonnées locales. Comme $f(x) = y$ on a $g(0) = 0$ donc $a_0 = 0$. Comme f est non constant, on a $g \neq 0$. Si $x \in U \subset X$ est l'ouvert sur lequel z est défini, on en déduit que $f^{-1}(y) \cap U = g^{-1}(0)$. Mais les zéros d'une fonction holomorphe non nulle sont discrets. □

5.5.1. Multiplicité et degré. — Grâce à la forme normale des morphismes de surface de Riemann, nous verrons que la somme des multiplicités dans les fibres est constante.

***Proposition 5.6* (forme normale des morphismes).** — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de surfaces de Riemann non constant et $P \in X$. Il existe un unique entier $m = m(P) \geq 1$ tel que pour toute carte $\phi' : U' \to V' \subset \mathbb{C}$ de Y telle que $f(P) \in \mathcal{U}'$ et $\phi'(f(P)) = 0$, il existe une carte $\phi : U \to V \subset \mathbb{C}$ de X telle que $P \in U$ et $\phi(P) = 0$, et telle que $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^m$.*

Autrement dit pour toute coordonnée locale z' sur Y centrée en $f(P)$ il existe une coordonnée locale z de X centrée en P telle que dans ces coordonnées locales f soit $z \mapsto z'^m$.

Démonstration. — En effet soit $\psi : U \to V \subset \mathbb{C}$ n'importe quelle carte de X centrée en P. On a $g(z) = \phi' \circ f \circ \psi^{-1}(z) = \sum_{i=m} c_i z^m$, et on vient donc de définir m comme la valuation z-adique de g. On a donc $c_m \neq 0$. Donc $g(z) = z^m h(z)$ où h est holomorphe et $h(0) \neq 0$. Donc quitte à rapetisser U et V, il existe l holomorphe sur V telle que $h(z) = l(z)^m$. Donc $g(z) = (zl(z))^m$. Notons $k(z) = zl(z)$. On a $k'(0) \neq 0$ donc par le théorème des fonctions implicites holomorphes, k est inversible quitte à rapetisser V. Donc $\phi = k \circ \psi$ est une nouvelle carte de X centrée en P. On a

$$\phi' \circ f \circ \phi^{-1}(z) = \phi' \circ f \circ \psi^{-1} \circ k^{-1}(z) = g \circ k^{-1}(z) = z^m$$

Il reste à prouver que m est unique, donc ne dépend pas des cartes ϕ' et ψ choisies. Mais pour tout $P' \neq P$ assez proche de P, on voit que $f(P')$ a exactement m antécédants dans U'. Donc m a une caractérisation topologique indépendante du choix des cartes, donc est bien défini. □

Définition 5.7. — On note $\mathrm{mult}_P(f)$ cet entier $m \geq 1$ et on l'appelle la multiplicité de f en P.

Proposition 5.8. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann. L'ensemble des $P \in X$ de multiplicité > 1 est discret dans X.*

Démonstration. — En effet, pour toute expression $g(z)$ de f dans des cartes, on a $\mathrm{mult}_P(f) = 1 + \mathrm{ord}_{\phi(P)}(g')$. Mais les zéros de la fonction holomorphe g' sont discrets. $\square$

Définition 5.9. — On dit que P est un point de ramification de f s'il est de multiplicité $>$ 1. On dit alors que $Q = f(P)$ est un point de branchement de f.

Proposition 5.10. — *Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ la courbe algébrique plane d'équation $f(x, y) = 0$ avec $f \in \mathbb{C}[x, y]$ lisse irréductible. Le morphisme $\pi = \mathrm{pr}_1 : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x$ en $P = (x_0, y_0)$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$. On a $\mathrm{mult}_P(\pi) = 1 + \mathrm{ord}_P \frac{\partial f}{\partial y}$.*

Démonstration. — Il est sous-entendu dans la proposition que π n'est pas constant, donc que f n'est pas un polynôme uniquement en x. C'est la condition qui garantit que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathcal{X}$ (exercice : le prouver en utilisant le Nullstellensatz). Par définition, $\mathrm{ord}_P \frac{\partial f}{\partial y}$ est l'ordre en P de la fonction holomorphe $\frac{\partial f}{\partial y}$ restreinte à la surface de Riemann $\mathcal{X}$.

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$, alors par construction de la structure de Riemann sur $\mathcal{X}$, une carte au voisinage de P est fournie par π. Dans cette carte, π devient l'identité d'un ouvert de $\mathbb{C}$ donc est non ramifiée.

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$ par lissité, et $\mathrm{pr}_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto y$ est une carte au voisinage de P. Sa réciproque $\mathbb{C} \to \mathcal{X}$ (définie seulement sur un voisinage de y_0 dans $\mathbb{C}$) est $z \mapsto (g(z), z)$ avec g holomorphe vérifiant $f(g(z), z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ dans un voisinange de y_0. En dérivant il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g(z), z)g'(z) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(z), z) \; = \; 0$$

En évaluant en $z = y_0$ il vient bien $g'(y_0)$ puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$. Mais dans la carte pr_2, l'application $\pi = \mathrm{pr}_1$ devient $z \mapsto g(z)$. Donc $\mathrm{mult}_P(\pi) = 1 + \mathrm{ord}_{y_0}(g') > 1$. $\square$

Remarque 5.11. — On a bien sûr un énoncé symétrique pour la seconde projection $\mathrm{pr}_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$.

La démonstration de la proposition suivante est laissée en exercice à partir du cas affine traité juste avant.

Proposition 5.12. — *Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ une courbe projective plane définie par l'annulation de F homogène lisse. L'application $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $[X, Y, Z] \mapsto [X, Y]$ est ramifié en $P = [X_0, Y_0, Z_0]$ si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$. De plus $\mathrm{mult}_P(\pi) = 1 + \mathrm{ord}_P(\frac{\partial F}{\partial Z})$.*

Remarque 5.13. — Attention, l'application $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $[X, Y, Z] \mapsto [X, Y]$ n'est pas définie sur tout $\mathcal{X}$ mais seulement sur l'ouvert où $(X, Y) \neq (0, 0)$. Il faut également, et c'est plus important, faire attention à la définition non triviale de $\mathrm{ord}_P(\frac{\partial F}{\partial Z})$. En effet $\frac{\partial F}{\partial Z}$ est un polynôme homogène de degré d non nul en général. Il ne définit donc pas une fonction holomorphe sur $\mathcal{X}$!

On appelle alors $\mathrm{ord}_P(\frac{\partial F}{\partial Z})$ l'ordre en P de la fonction holomorphe $\frac{1}{G} \cdot \mathrm{ord}_P(\frac{\partial F}{\partial Z})$ sur $\mathcal{X}$, où G est n'importe quel polynôme homogène de degré d non nul en P. On vérifie que cela ne dépend pas du choix de G.

Si $\frac{\partial F}{\partial Z}$ n'est pas une fonction ensembliste sur $\mathcal{X}$, c'est néanmoins une section de la restriction à $\mathcal{X}$ du faisceau localement libre $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$, voir la remarque 4.25. En général, on peut définir l'ordre en P de toute section d'un faisceau localement libre de rang un sur une surface de Riemann, en divisant au préalable cette section par une section non nulle en P, afin d'obtenir une fonction holomorphe définie au voisinage de P.

Remarque 5.14. — La proposition 5.12 admet des variantes par permutation des variables. Par exemple $\mathcal{X} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $[X, Y, Z] \mapsto [Y, Z]$ est ramifié si $(\frac{\partial F}{\partial X})(P) = 0$.

Proposition 5.15. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme non constant entre surfaces de Riemann compactes. La fonction $Y \to \mathbb{N}$ qui envoie Q sur $\sum_{P \in f^{-1}(Q)} \mathrm{mult}_Q(f)$ est une constante notée* $\deg(f)$ *et appelée le degré de f.*

Démonstration. — Notons $D \subset \mathbb{C}$ une boule ouverte centré en 0. Pour tout $m \geq 1$, l'application $f : D \to D$, $z \mapsto z^m$ vérifie évidemment $\sum_{P \in f^{-1}(Q)} \mathrm{mult}_Q(f) = m$ qui est constant sur D.

Notons $D_1, \cdots, D_k$ des copies disjointes de la boule ouverte centrée en 0. L'application $f : D_1 \coprod \cdots \coprod D_k \to D$ qui envoie $z_1 \in D_1$ sur $z_1^{m_1}$, $z_2 \in D_2$ sur $z_2^{m_2}$,..., $z_k \in D_k$ sur $z_k^{m_k}$ vérifie aussi $\sum_{P \in f^{-1}(Q)} \mathrm{mult}_Q(f) = \sum_{i=1}^k m_i$ qui est constant sur D.

On va se ramener à ce cas. En effet si $Q \in Y$ soit $f^{-1}(Q) = \{P_1, \cdots, P_n\}$. Soit z' une coordonnée locale en Q sur Y. D'après la proposition 5.6, il existe des coordonnées locales z_i en P_i sur X et des entiers m_i pour tous $1 \leq i \leq n$ tels que dans ces coordonnées, $g(z_i) = z'^{m_i}$. Ainsi localement autour des P_i, l'application f est du type précédent.

Pour conclure, il reste juste à voir que pour tout voisinage $P_i \in U_i \subset X_i$ et tout voisinage $Q \in U' \in Y$, on a que pour tout $Q' \in U'$ assez proche de Q, tous les antécédants de Q' par f sont dans $\cup_{i=1}^n U_i$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite $x_k \in X$ telle que $f(x_k)$ converge vers Q dans Y mais $x_k \notin \cup_{i=1}^n U_i$. Comme X est compact, quitte à extraire on peut supposer que x_k converge vers $x \in X$. Mais f est continue donc $f(x) = Q$ donc x est un des P_i, par exemple P_1. Dans ce cas $x_k \in U_1$ pour k assez grand. □

Remarque 5.16. — Autrement dit le nombre dans les fibres est constant lorsqu'on les compte avec multiplicité.

Remarque 5.17. — La proposition est bien sûr prise en défaut si X n'est pas compacte : prendre par exemple l'injection d'un ouvert X dans Y. Voir la remarque 5.20 pour un contre-exemple plus intéressant.

Remarque 5.18. — Soit $f : X \to Y$ non constant entre surfaces de Riemann compactes. Soit $S \subset X$ l'ensemble fini des $P \in X$ de multiplicité ≥ 2. Alors $f : X - S \to f(X - S)$ est un revêtement au sens topologique, ie une application surjective qui est un homéomorphisme local, telle qu'il existe un ensemble discret F tel que pour tout ouvert assez petit V du but, $f^{-1}(V)$ est homéomorphe à $V \times F$ telle que f soit la projection sur V. Ici F est fini par compacité de $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in Y$, et le degré de f est égal au cardinal de F.

On dit que $f : X \to Y$ est un revêtement ramifié, de lieu de ramification $S \subset X$.

Un exemple de revêtement ramifié est $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $[X, Y] \mapsto [X^2, Y^2]$. Son degré est 2, il est ramifié exactement en 0 et en $\infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Remarque 5.19. — On peut noter un parallèle avec la théorie de la ramification dans les corps de nombres : si L/K est une extension de corps de nombres et $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ est un idéal maximal, on décompose $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_L$ en produit d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_L$, soit

$$\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_L = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{P}_i^{e_i}$$

En notant $f_i = [\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}_i : \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}]$, on sait que $\sum_{i=1}^{r} e_i f_i = [L : K]$ qui est donc constant en $\mathfrak{p}$.

La théorie des schémas nous apprend que ce n'est pas juste une analogie mais exactement le même phénomène que dans les surfaces de Riemann ! En effet les formules précédentes reviennent à étudier la ramification du morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ entre schémas réguliers de dimension un, c'est à dire entre courbes.

Dans le cadre des surfaces de Riemann on ne voit pas le terme f_i mais c'est parce que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, contrairement au corps fini $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Notons en effet $\mathcal{O}_{Y,Q}$ l'anneau local de Y en Q. C'est l'anneau des couples (U, f) où $Q \in U \subset Y$ est un ouvert et f est holomorphe sur U. On identifie de plus (U, f) et (V, g) si f et g coïncident sur un ouvert. Alors $\mathcal{O}_{Y,Q}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_Q = \{(U, f) \mid f(Q) = 0\}$. L'évaluation en Q fournit un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{Y,Q}/\mathfrak{m}_Q = \mathbb{C}$$

De même pour tout antécédant $P \in X$ de Q, on dispose de $\mathcal{O}_{X,P}$ et de son idéal maximal $\mathfrak{m}_P$. L'analogue de l'entier f de la théorie algébrique des nombres est le degré de l'extension $(\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P)/(\mathcal{O}_{Y,Q}/\mathfrak{m}_Q)$ et c'est donc 1 !

On voit aussi que la définition de l'entier e de la théorie algébrique des nombres et de notre entier $m = \mathrm{mult}_P(f)$ sont exactement les mêmes : en choisissant un paramètre local z en P et z' en Q, on obtient que $\mathfrak{m}_P$ est principal engendré par z, et $\mathfrak{m}_P$ est principal engendré par z'. Comme par forme normale de f, on a $f(z') = z^m$, on voit que $\mathfrak{m}_Q \cdot \mathcal{O}_{X,P} = z' \cdot \mathcal{O}_{X,P} = z^m \cdot \mathcal{O}_{X,P} = \mathfrak{m}_P^m$.

Remarque 5.20. — Le fait que la somme des multiplicités est constante dans les fibres est fortement relié au caractère lisse des surfaces de Riemann (qui sont localement homéomorphes à un ouvert de $\mathbb{C}$). Lorsqu'on développe la théorie des courbes algébriques planes plus en détail que nous avons fait, on introduit également les courbes singulières, qui sont définies par l'annulation d'un polynôme $f \in \mathbb{C}[x, y]$ non nécessairement lisse et irréductible. Considérons $\mathcal{Y} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = 0\}$ qui est l'union des axes de coordonnées dans $\mathbb{C}^2$. Ce n'est donc pas une surface de Riemann. Considérons $\mathcal{X} = \mathbb{C} \coprod \mathbb{C}$ qui est une surface de Riemann au défaut de connexité près. Comme d'habitude on va noter $\mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_2$ les deux facteurs de l'union disjointe. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ qui envoie $x_1 \in \mathbb{C}_1$ sur $(x_1, 0)$ et $x_2 \in \mathbb{C}_2$ sur $(0, x_2)$. Alors f est surjective, est un isomorphisme au dessus de $\mathcal{Y}_(0, 0)$ mais $f^{-1}(0, 0)$ est de cardinal 2.

Plus généralement la normalisation d'une courbe algébrique singulière $\mathcal{Y}$ est une courbe lisse $\mathcal{X}$ (donc une surface de Riemann aux problèmes de connexité près), et le morphisme de normalisation $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est génériquement un isomorphisme mais pas un isomorphisme.

5.20.1. Conséquences. — Le fait que la somme des multiplicités dans les fibres soit constante a des conséquences intéressantes.

Proposition 5.21. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre surfaces de Riemann compactes. Alors f est un isomorphisme si et seulement si* $\deg(f) = 1$).

Démonstration. — SI f est de degré un, il est injectif puis on applique les propositions 5.3 et 5.4. □

Corollaire 5.22. — *Soit X une surface de Riemann compacte et f une fonction méromorphe sur X avec un unique pôle, qui est simple. Alors $\tilde{f}$ induit un isomorphisme entre X et $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — En effet $\tilde{f}$ est de degré un, comme on le voit en considérant la fibre de $\infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. □

Remarque 5.23. — Autrement dit si X n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, toute fonction méromorphe a au moins deux pôles comptés avec multiplicités. On a déjà vu cela lorsque $X = \mathbb{C}/\lambda$ dans l'exercice 3.36. Cela fournit pour tout $X \neq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ une obstruction au problème de Cousin différente du degré (voir la remarque 5.26) puisque le diviseur $(P) - (Q)$ n'a aucune chance d'être principal.

La proposition suivante est fondamentale. On en donnera une autre démonstration par le théorème des résidus. Lorsque $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ou $X = \mathbb{C}/\Lambda$, on l'a déjà prouvée à la main.

Proposition 5.24. — *Soit f méromorphe non constante sur une surface de Riemann compacte X. Alors* $\sum_{P\in X} \mathrm{ord}_P(f) = 0$.

Démonstration. — Soit $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ le morphisme associé. Notons $0 = [0,1]$ et $\infty = [1,0]$ les points usuels de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Alors par construction de $\tilde{f}$ on a

$$\sum_{P\in X} \mathrm{ord}_P(f) = \sum_{P\in \tilde{f}^{-1}(0)} \mathrm{mult}_P(f) - \sum_{P\in \tilde{f}^{-1}(\infty)} \mathrm{mult}_P(f) = \deg(f) - \deg(f) = 0$$

□

Corollaire 5.25. — *Le degré d'un diviseur principal est nul sur une surface de Riemann compacte. Le morphisme* $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ *se factorise donc en* $\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$.

Remarque 5.26. — Il y a ainsi une obstruction évidente au problème de Cousin (voir la remarque 2.22) sur une surface de Riemann compacte : si D est de degré non nul, il n'existe pas de fonction méromorphe de pôles et zéros d'ordre prescrit par D. Cette obstruction est grossière. La présence de $\mathrm{Pic}^0(X)$ est une obstruction plus fine, puisque ce groupe quantifie l'obstruction pour un diviseur de degré nul à être principal.

On a par définition une suite exacte courte de groupes abéliens $0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z} \to 0$. Cette suite est non canoniquement scindée par le choix de $P \in X$. En effet, considérer l'application $s : \mathbb{Z} \to \mathrm{Div}(X)$, $n \mapsto n \cdot (P)$. Ainsi $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}^0(X) \times \mathbb{Z}$.

Lorsque $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ on a montré que $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Pic}^0(X) = 0$. Ici l'obstruction au problème de Cousin est exactement le degré.

Lorsque $X = \mathbb{C}/\Lambda$ on a prouvé dans l'exercice 3.36 que $\mathrm{Pic}^0(X) = \mathbb{C}/\Lambda$ en tant que groupe abélien. Il y a donc une obstruction plus fine au problème de Cousin.

Lorsque X est compacte de genre g, on verra que $\mathrm{Pic}^0(X)$ est un tore complexe de dimension g, ie le quotient de $\mathbb{C}^g$ par un réseau Λ. Ce tore s'appelle la Jacobienne de X. De plus, il existe une forme bilinéaire B entière sur Λ vérifiant des axiomes (relations bilinéaires de Riemann) qui garantissent que $\mathbb{C}/\Lambda$ est en fait une variété algébrique projective de dimension g. On dit alors que c'est une variété abélienne (voir la remarque 3.39).

Lorsque $g = 1$, on a algébrisé $\mathbb{C}/\Lambda$ via les fonctions $\wp_\Lambda$ et $\wp'_\Lambda$. Lorsque $g > 1$ c'est plus compliqué et on algébrise $\mathbb{C}^g/\Lambda$ par des fonctions θ qui sont des sommes sur Λ d'exponentielles quadratiques, et la forme B intervient dans leur définition (REF Birkenhake-Lange, Mumford).

5.27. Triangulations et genre

Soit S une variété différentielle réelle de dimension deux. Rappelons qu'une triangulation est une décomposition $S = \cup_{i\in I} S_i$ où S_i est muni d'un homéomorphisme vers un triangle de $\mathbb{R}^2$ (on dira que S_i est un triangle de S, et on pourra parler de ses sommets et de ses arrêtes) telle que S_i et S_j

i. sont disjoints,

ii. ou se rencontrent en une arrête commune,

iii. ou se recontrent en un sommet commun.

Pour les deux propositions suivantes, le lecteur pourra consulter [**BG**, III.2].

Définition 5.28. — Soit S compacte munie d'une triangulation finie. Soit s le nombre de sommets, a le nombre d'arrêtes, t le nombre de triangle. Alors $\chi(S) = s - a + t$ est indépendant du choix de la triangulation.

Proposition 5.29. — *Supposons de plus S compacte orientable. Elle est alors homéomorphe à un tore à g-trous et on a $\chi(S) = 2 - 2g$.*

Il reste à prouver qu'une surface de Riemann est orientable et admet une triangulation, et on obtiendra la définition de son genre lorsqu'elle est compacte.

Proposition 5.30. — *Soit X une surface de Riemann. C'est une variété différentielle réelle orientable.*

Démonstration. — On va donner deux démonstrations (en fait la même démonstration dite en des termes différents).

Soit $TX \to X$ le fibré tangent $\mathcal{C}^\infty$. C'est donc un fibré vectoriel en $\mathbb{R}$-espace vectoriels de dimension deux. La structure de surface de Riemann sur X induit une structure de $\mathbb{C}$-fibré vectoriel sur TX. On le considère ici comme un $\mathbb{C}$-fibré vectoriel $\mathcal{C}^\infty$, ce qui veut dire qu'il existe un recouvrement $X = \cup U_i$ et un isomorphisme $\phi_i : TX|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}$ tel que $\phi_i \circ \phi_j : U_{ij} \times \mathbb{C} \to U_{ij} \times \mathbb{C}$ soit du type $(x, v) \mapsto \psi_{ij}(x), g_{ij}(x)v$ où ψ_{ij} est $\mathcal{C}^\infty$ sur U_{ij} et $g_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ est $\mathcal{C}^\infty$. Bien sûr c'est aussi un $\mathbb{C}$-fibré vectoriel holomorphe, ce qui veut dire que ψ_{ij} et g_{ij} sont holomorphes. Ainsi on dispose d'un endomorphisme de fibré $\cdot \times i : TX \to TX$ qui induit la multiplication par i sur T_xX pour tout $x \in X$. Le fibré tangent est donc muni d'une notion de rotation d'angle $+\pi/2$, donc de la notion de base directe et X est orientable.

Pour l'autre démonstration, on introduit un atlas de surfaces de Riemann dont les changements de cartes sont des difféomorphismes $\phi : U \to V$, $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$ entre ouverts de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Ces difféomorphismes sont holomorphes, ce qui se traduit par les équations de Cauchy-Riemann. Ainsi pour tout $(x, y) \in U$, la différentielle $d_{(x,y)}\phi$ est un élement de $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Donc la différentielle des changements de carte est de déterminant > 0, ce qui est aussi une définition de l'orientabilité de X. □

Proposition 5.31. — *Toute surface de Riemann est triangularisable.*

Démonstration. — Un théorème de Rado garantit que toute surface topologique à base dénombrable de voisinage est triangularisable, et le théorème de Poincaré-Voltera garantit que les surfaces de Riemann sont à base compacte de voisinages. □

Remarque 5.32. — Si on suppose que X est compacte et qu'il existe une fonction méromorphe non constante sur $\mathbb{C}$, donc un morphisme non constant de X vers $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, on peut considérer l'image inverse d'une triangulation de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et prouver facilement que X est triangularisable. Voir [**BG**, prop.III.1.4].

Néanmoins, et nous avons déjà insisté à plusieurs reprises sur ce point, il n'est pas du tout évident qu'une surface de Riemann compacte (a priori non algébrique) admette des fonctions méromorphes non constantes.

Corollaire 5.33. — *Toute surface de Riemann compacte est homéomorphe à un tore à g trous. On appelle g le genre de X.*

Exemple 5.34. — Si $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ qui est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$, elle est de genre nul. Si $X = \mathbb{C}/\Lambda$, elle est de genre 1. On verra que toute surface de Riemann compacte de genre 0 et 1 est de ce type (REF).

5.34.1. Formule de Riemann-Hurwitz. — Cette formule est fondamentale pour calculer le genre de surfaces de Riemann.

***Proposition 5.35* (Riemann-Hurwitz).** — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme non constant entre surfaces de Riemann compactes. Notons d le degré de f et g_X et g_Y les genres de X et Y. Alors*

$$2g_X - 2 \;=\; d \cdot (2g_Y - 2) + \sum_{P \in X} (\mathrm{mult}_P(f) - 1)$$

Démonstration. — La faire en exercice en comparant des triangulations de X et Y. Voir aussi [**BG**][th.III.3.1] □

Remarque 5.36. — Il existe plusieurs définitions équivalentes du genre, et chacune donne naissance à une preuve différente de la formule de Riemann-Hurwitz. Listons-les avec leurs avantages respectifs.

i. La définition topologique via les triangulations a l'avantage de la simplicité et de son caractère intuitif. Toutefois ce ne sera pas cette définition du genre qui sera utile dans le théorème de Riemann-Roch.

ii. On peut aussi définir $2g - 2$ comme le degré du diviseur de toute forme différentielle méromorphe sur X. On verra dans (REF) l'équivalence avec la définition topologique. L'inconvénient est que pour l'instant on ne sait pas qu'il existe une forme différentielle méromorphe non nulle. L'avantage sera clair lors de l'énoncé de Riemann-Roch. On peut alors prouver Riemann-Hurwitz de la manière suivante : si $f : X \to Y$ est non constant et ω est une forme différentielle méromorphe sur Y, supposons que $\mathrm{div}(\omega)$ est disjoint des points de branchements de f (on peut toujours s'y ramener en multipliant ω par une fonction méromorphe, une fois qu'on sait qu'il y a des fonctions méromorphes non constantes). En utilisant la forme normale de f (proposition 5.6), puisque $d(z^m) = mz^{m-1}dz$ on voit que

$$\mathrm{div}(f^*\omega) \;=\; f^{-1}(\mathrm{div}(\omega)) \;+\; \sum_{P\in X}(\mathrm{mult}_P(f) - 1)$$

d'où la formule en passant au degré puisque $\deg_X(f^{-1}(D)) = \deg(f)\cdot\deg_Y(D)$ pour tout diviseur D de Y de support disjoint des points de branchements. Le lecteur pourra chercher le lien avec la suite exacte courte des différentielles de Hartshorne, Algebraic Geometry, ch IV prop.2.1.

iii. On peut définir g comme la dimension de $H^0(X, \Omega^1_X)$ donc comme le nombre de formes différentielles holomorphes linéairement indépendantes sur X. Toutefois il n'est pas du tout évident que cet espace est de dimension finie (on le prouvera dans le théorème de Riemann-Roch).

iv. On peut définir g comme la dimension de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Ce n'est pas la définition la plus intuitive mais elle est très utile. Elle nécessite de savoir ce qu'est la cohomologie. Elle nécessite aussi de connaître la finitude de ce groupe de cohomologie (qui sera prouvée via l'analyse fonctionnelle holomorphe lors de la preuve du théorème de Riemann-Roch). La formule de Riemann-Hurwitz résulte alors de la suite longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X \to \sum_{P\in X} \mathcal{O}_{f(P)}^{\mathrm{mult}_P(f)-1} \to 0$$

qui résulte immédiatement de la forme normale de f. Tous les termes et symboles utilisés ne sont pas définis ici.... Voir les cours de théorie des schémas et des faisceaux.

v. On verra que toutes les définitions du genre sont équivalentes de la manière suivante : la dualité de Serre garantira que les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie $H^0(X, \Omega^1_X)$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ sont duaux donc ont même dimension. Le théorème de Riemann-Roch impliquera alors que $\deg(\omega) = 2g - 2$ pour toute forme différentielle méromorphe ω. Enfin la théorie de Hodge fournira un isomorphisme

$$H^1(X, \mathbb{C}) \;=\; H^0(X, \Omega^1_X) \oplus H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

où $H^1(X, \mathbb{C})$ est la cohomologie singulière (de manière équivalente, de De Rham) à coefficients complexe de X. Si X est homéomorphe à un tore à g trous, cet espace vectoriel est de dimension $2g$ d'où l'égalité de tous les genres.

Remarque 5.37. — Il faut retenir de la formule de Riemann-Hurwitz que si $f : X \to Y$ est non constant alors $g_X \geq g_Y$. Si $g_X = g_Y > 1$ alors nécessairement f est de degré un donc est un isomorphisme (proposition 5.21). En général, la différence entre g_X et g_Y est d'autant plus grande que f est ramifiée de grand degré.

Remarque 5.38. — Le cas de genre 0 et 1 est à part. Par exemple l'application $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}Lambda, z \mapsto nz$ est de degré n^2 (pourquoi ?), non ramifiée et n'est pas un isomorphisme. Aussi l'application $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $[X, Y] \mapsto [X^2, Y^2]$ est de degré 2, ramifiée en 2 points et cela est compatible avec Riemann-Hurwitz.

Nous pouvons enfin calculer le genre d'une surface de Riemann compacte associée à une courbe projective plane lisse.

Proposition 5.39. — *Soit $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène lisse de degré d et $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ la surface de Riemann associée. Son genre est $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.*

Démonstration. — Si $d = 1$ c'est évident car $\mathcal{X}$ est une droite projective isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. On suppose donc $d > 1$.

On utilise la formule de Riemann-Hurwitz pour le morphisme $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $[X, Y, Z] \mapsto [X, Y]$. On peut déjà supposer qu'il est défini sur tout $\mathcal{X}$, ie que $[0, 0, 1] \notin \mathcal{X}$ en précomposant par un élément bien choisi de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ agissant sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Il faut ensuite calculer $\sum_{P \in \mathcal{X}} (\mathrm{mult}_P(\pi) - 1)$. D'après la proposition 5.12 on a $\mathrm{mult}_P(\pi) - 1 = \mathrm{ord}_P \frac{\partial F}{\partial Z}|_{\mathcal{X}}$, où cet ordre est défini dans la remarque **??**.

On veut donc calculer $\sum_{P \in \mathcal{X}} \mathrm{ord}_P \frac{\partial F}{\partial Z}|_{\mathcal{X}}$. Déjà $\frac{\partial F}{\partial Z}|_{\mathcal{X}}$ n'est pas identiquement nul car F est lisse homogène donc irréductible, donc non divisible par $\frac{\partial F}{\partial Z}$. Remarquons que parler de la nullité de $\frac{\partial F}{\partial Z}|_{\mathcal{X}}$ a un sens même si $\frac{\partial F}{\partial Z}|_{\mathcal{X}}$ ne définit pas une fonction ensembliste sur $\mathcal{X}$ (cf. la remarque 5.13, c'est en fait une section d'un faisceau localement libre de rang un non plongé dans le faisceau des fonctions méromorphes).

On affirme alors (et cette affirmation demanderait plus de géométrie algébrique pour être complètement justifiée) que $\sum_{P \in \mathcal{X}} \mathrm{ord}_P \frac{\partial F}{\partial Z}|_{\mathcal{X}}$ est le nombre de points de l'intersection de $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y} = \{P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \mid \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0\}$, comptés avec multiplicité (et il faut justement une certaine quantité de géométrie algébrique pour définir cette multiplicité). Le théorème de Bezout garantit que ce nombre est le produit des degrés des deux polynômes homogènes, d'où la réponse. □

Remarque 5.40. — Le lecteur pourra consulter le paragraphe sur le résultant de `https://en.wikipedia.org/wiki/Bézout%27s_theorem` pour une preuve élémentaire du théorème de Bezout, et une définition des multiplicités.

Remarque 5.41. — Si on avait défini le genre comme la dimension de $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ on obtiendrait une preuve plus simple grâce à quelques connaissances cohomologiques sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

En effet, la multiplication par F définit un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$, où $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)(U)$ est l'ensemble des fonctions rationnelles homogènes de degré $-d$ sans pôle sur U. On alors une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \to 0$$

et on conclut en passant à la suite longue de cohomologie, en utilisant le calcul (que vous verrez en cours de géométrie complexe ou de schémas II) de $H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d))$ pour tous n, i, d.

Remarque 5.42. — On retrouve que les côniques définies par l'annulation d'un polynôme homogène lisse de degré 2 dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sont de genre 1, donc isomorphes à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

5.43. Intégration et théorème des résidus

5.43.1. Chemin et intégrales. —

Définition 5.44. — Soit X une surface de Riemann.

i. Un chemin γ sur X est une application $\gamma : [0,1] \to X$ continue et $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.

ii. Un reparamétrage de γ est $\gamma \circ \alpha$ où $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ est continue, $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, envoie 0 sur 0 et 1 sur 1.

iii. L'opposé $-\gamma$ de γ est $-\gamma(t) = \gamma(1-t)$.

Soit $P \in X$ et $S \subset X$ un sous-ensemble tel que $P \notin \bar{S}$, où $\bar{S}$ est l'adhérence de S dans X. Il existe alors un chemin $\gamma : [0,1] \to X - (S \cup \{P\})$ tel que γ est injectif, tel que $\mathrm{Im}(\gamma)$ est inclus dans le domaine d'une carte $\phi : U \to V \subset X$, tel que $\phi \circ \gamma$ est d'indice 1 en $\phi(P)$ et tel que $U \subset X - S$. On dira que γ est un *petit chemin* autour de P qui évite S. On note alors $\mathrm{Int}(\gamma)$ la composante connexe de $X - \mathrm{Im}(\gamma)$ qui contient P.

Un autre fait évident est que pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to X$, il existe une partition $\gamma = \gamma_1 \coprod \gamma_2 \coprod \cdots \coprod \gamma_r$ (avec une définition assez claire de la partition d'un chemin : écrire $[0,1] = [0, a_1] \cup [a_1, a_2]$ puis redilater $[a_i, a_{i+1}]$ vers $[0,1]$ pour obtenir γ_i) telle que l'image de γ_i soit inclue dans le domaine de carte de X pour tout $1 \leq i \leq r$. En effet, $[0,1]$ est compact.

Soit ω une 1-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $\mathrm{Im}(\gamma)$ dans X. On définit

$$\int_\gamma \omega \;=\; \sum_i \int_0^1 a_i(\alpha_i(t), \beta_i(t))\alpha_i'(t) + b_i(\alpha_i(t), \beta_i(t))\beta_i'(t)dt \;\in\; \mathbb{C}$$

où on a partitionné $\gamma = \gamma_1 \coprod \cdots \coprod \gamma_i$ pour que $\mathrm{Im}(\gamma_i)$ soit inclus dans le domaine d'une carte ϕ_i, où $\phi_i \circ \gamma_i(t) = (\alpha_i(t), \beta_i(t))$ et où $\phi_*(\omega) = a_i(x,y)dx + b_i(x,y)dy$. Cela ne dépend pas de la partition choisie ni des cartes.

Lemme 5.45. — *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

i. *On a* $\int_{\gamma\circ\alpha}\omega = \int_\gamma \omega$ *pour tout reparamétrisation* α.

ii. *On a* $\int_{-\gamma}\omega = -\int_\gamma \omega$.

iii. *Si* f *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* X *on a* $\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$.

iv. *Pour tout* $f : X \to Y$, *tout chemin* γ *sur* X *et tout* ω *sur* Y, *si on note* $f_*(\gamma) = f\circ\gamma$ *on a* $\int_{f_*(\gamma)}\omega = \int_\gamma f^*\omega$.

Soit ω une 1-forme différentielle méromorphe sur X et $P \in X$. Soit $\phi : U \to V \subset \mathbb{C}$ une carte centrée en P, donc telle que $\phi(P) = 0$. Posons $\phi_*(\omega) = \sum_{n>>-\infty} a_n z^n dz$. On note $\mathrm{Res}_P(\omega) = a_{-1}$.

Lemme 5.46. — *Le nombre* $\mathrm{Res}_P(\omega) \in \mathbb{C}$ *est indépendant du choix de la carte. En fait pour tout petit chemin* γ *autour de* P *qui évite les autres pôles de* ω, *on a*

$$\mathrm{Res}_P(\omega) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \omega$$

On peut aussi intégrer des 2-formes $\mathcal{C}^\infty$ sur des triangles. Rappelons qu'un triangle de X est un fermé muni d'un homéomorphisme vers un triangle de $\mathbb{C}$. Lorsque T est inclus dans le domaine d'une carte, si ω est une 2-forme sur X on définit tout de suite $\iint_T \omega \in \mathbb{C}$ par passage à la carte. De même pour tout triangle en le partitionnant en plus petits triangles inclus dans le domaine d'une carte. De même pour tout sous-ensemble $D \subset X$ triangularisable.

Rappelons de plus que si $T \subset X$ est un triangle, on dispose du chemin $\partial T \subset X$. Si $D \subset X$ est un sous-ensemble muni d'une triangulation finie, on obtient ∂D qui est un élément du groupe libre sur les chemins de X. Bien sûr ∂D dépend du choix de la triangulation mais toutes les intégrales qu'on écrira n'en dépendront plus. Pour tout 1-forme ω sur X, l'intégrale $\int_{\partial D}\omega \in \mathbb{C}$ est bien définie.

***Proposition 5.47* (Stokes).** — *Si* $D \subset X$ *est un fermé muni d'une triangulation finie, et* ω *est une* 1*-forme* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* X *on a*

$$\iint_{\partial D} \omega \;=\; \iint_D dw$$

Démonstration. — Par linéarité, raffiner la triangulation pour que les triangles soient inclus dans le domaine de cartes, puis utiliser le théorème de Stokes pour les triangles de $\mathbb{C}$. □

***Théorème 5.48* (des résidus).** — *Soit* ω *une* 1*-forme méromorphe sur* X *une surface de Riemann compacte. On a* $\sum_{P\in X}\mathrm{Res}_P(\omega) = 0$.

Démonstration. — Soient $P_1, \cdots, P_n$ les pôles de ω. C'est un ensemble fini car discret dans X compact. Soit γ_i un petit chemin autour de P_i qui évite les P_j pour tous $i \neq j$. Soit U_i l'intérieur de γ_i et $D = X - \cup_i U_i$ qui est fermé dans X donc compact, donc muni d'une triangulation finie par le théorème de Rado. On a

$$\begin{aligned}
\sum_i \mathrm{Res}_{P_i}(\omega) &= \frac{1}{2i\pi}\sum_i \int_{\gamma_i} \omega \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\sum_i \int_{-\gamma_i} \omega \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} \omega \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_{D} d\omega
\end{aligned}$$

Mais comme ω est holomorphe sur un voisinage de D, on a $d\omega = 0$. En effet dans des cartes, $\omega = f(z)dz$ avec f holomorphe, et

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dz = 0$$

En effet $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = 0$ est équivalent aux équations de Cauchy-Riemann garantissant l'holomorphie de f. □

On en déduit une seconde preuve du fait fondamental suivant en appliquant le théorème des résidus à df/f.

Corollaire 5.49. — *Soit f méromorphe sur X compacte. On a $\sum_{P \in X} \mathrm{ord}_P(f) = 0$.*

CHAPITRE 6

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH ET COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX

Le théorème de Riemann-Roch va être l'énoncé fondamental non trivial permettant d'étudier les surfaces de Riemann compactes, par exemple de les plonger dans un espace projectif et d'obtenir leur algébricité.

On peut donner des énoncés et même des preuves du théorème de Riemann-Roch sans cohomologie des faisceaux, au prix de complifications artificielles des deux. Vu l'importance en géométrie et topologie de cette théorie cohomologique, nous choisissons au contraire de développer le formalisme de base, quitte à admettre certaines boîtes noires. Et l'on verra alors le théorème de Riemann-Roch comme une des premières illustrations de la puissance de ce formalisme.

6.1. Cohomologie des faisceaux

6.1.1. Suite exacte courte. — La cohomologie va quantifier à quel point une suite exacte courte de faisceaux reste exacte au niveau des sections globales. Il faut donc d'abord étudier les suites exactes courtes de faisceaux.

Définition 6.2. — Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ trois faisceaux en groupes abéliens sur X. Une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

est la donnée de deux morphismes de faisceaux $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ et $g : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3$ tels que pour tout ouvert $U \subset X$, il existe $U = \cup_{i\in I} U_i$ avec U_i ouvert telle que pour tout $i \in I$, les applications f_{U_i} et g_{U_i} induisent une suite exacte courte de groupes abéliens

$$0 \to \mathcal{F}_1(U_i) \to \mathcal{F}_2(U_i) \to \mathcal{F}_3(U_i) \to 0$$

Remarque 6.3. — Ainsi pour nous une suite exacte courte de faisceau est une suite courte qui est exacte sur des ouverts assez petits. ATTENTION ! Il ne s'agit pas de la définition officielle d'une suite exacte courte de faisceaux, mais d'une version légèrement plus forte qui a l'avantage de la simplicité. Le lecteur pourra voir les quantificateurs qu'on a échangé par rapport à la définition officielle donnée par exemple dans le cours Outils de la géométrie algébrique. Toutes les suites exactes rencontrées dans ce cours le seront dans notre sens fort.

Remarque 6.4. — Le point crucial est qu'on n'a pas demandé que la suite

$$0 \to \mathcal{F}_1(U) \to \mathcal{F}_2(U) \to \mathcal{F}_3(U) \to 0$$

est exacte pour tout ouvert U de X, mais seulement pour des ouverts assez petits. En particulier on n'a pas une suite exacte courte au niveau des sections globales. Cela sera évident sur tous les exemples à venir.

Exercice 6.5. — Si $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ est une suite exacte courte de faisceaux sur X, montrer que pour toute ouvert $U \subset X$, la suite $0 \to \mathcal{F}_1(U) \to \mathcal{F}_2(U) \to \mathcal{F}_3(U)$ est exacte. Autrement dit le seul point pris en défaut est la surjectivité de $\mathcal{F}_2(U) \to \mathcal{F}_3(U)$.

Exemple 6.6. — Soit X une surface de Riemann. On a alors les suites exactes courtes de faisceaux

i. $0 \to \underline{\mathbb{C}}_X \to \mathcal{O}_X \overset{d}{\to} \Omega^1_X \to 0$ où $\underline{\mathbb{C}}_X$ est le faisceau des fonctions localement constantes et d est l'opérateur de différentiation. La surjectivité de d sur des petits ouverts U_i contractiles est bien connu, mais cette surjectivité est évidemment fausse sur des ouverts quelconques.

ii. $0 \to 2i\pi \cdot \underline{Z}_X \to \mathcal{O}_X \overset{exp}{\to} \mathcal{O}^*_X \to 0$ où $\exp(f) = e^f$ et où est le faisceau en groupe multiplicatif des fonctions holomorphes ne s'annulant pas. La surjectivité locale de exp est claire sur des ouverts contractiles, puisqu'il existe des logarithmes complexes, mais fausse en général.

iii. $0 \to \mathcal{O}^*_X \to \underline{M}^*_X \overset{div}{\to} \underline{Div}_X \to 0$ où $\underline{M}^*_X$ est le faisceau en groupe multiplicatif des fonctions méromorphes non nulles (sur U il vaut $\mathcal{M}(U)^*$) et $\underline{Div}_X$ est le faisceau des diviseurs (sur U il vaut $\mathrm{Div}(U)$. Cette suite est exacte car sur un disque ouvert de $\mathbb{C}$, l'analyse complexe prouve que tout diviseur est principal.

iv. $0 \to \underline{\mathbb{C}}^*_X \to \mathcal{O}^*_X \overset{dlog}{\to} \Omega^1_X \to 0$ où $\mathrm{dlog}(f) = df/f$. Le lecteur pourra prouver que c'est bien une suite exacte courte.

v. $0 \to \mathcal{O}_X(-(P)) \to \mathcal{O}_X \overset{\phi}{\to} \mathcal{O}_P \to 0$ où $P \in X$ et $\phi(P) = f(P)$. Par définition, $\mathcal{O}_P$ est le faisceau *gratte-ciel* en P, tel que $\mathcal{O}_P(U) = \mathbb{C}$ si $P \in U$ et $\mathcal{O}_P(U) = 0$ sinon. Cette suite est même exacte au niveau des section globales car pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe f (constante !) telle que $f(P) = \lambda$.

Remarque 6.7. — Il y a des variantes plus intéressantes du dernier exemple. Si $P \neq Q \in X$ on a une suite exacte courte $0 \to \mathcal{O}_X(-(P)-(Q)) \to \mathcal{O}_X \overset{\phi}{\to} \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_Q \to 0$ où $\phi(f) = (f(P), f(Q))$. Cette fois elle n'est plus exacte au niveau des sections globales si X est compacte.

De même pour tout diviseur effectif $D \geq 0$, on a une suite exacte courte $0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_D \to 0$. Ici $\mathcal{O}_D = \oplus_i \mathcal{O}_P^{n_i}$ si $D = \sum n_i(P_i)$. Ici la définition de ϕ dépend du choix de paramètres locaux z_i en P_i pour tout i. On peut alors écrire $f \in \mathcal{O}_X(U)$ comme une série $g_i(z_i)$ et $\phi(f) = (f(P_i) = g_i(0), g_i'(0), \cdots, g^{(n_i-1)_i(0)})_i$. Cette suite est surjective lorsque U est biholomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$ car l'interpolation de Lagrange montre qu'il existe un polynôme avec valeurs arbitraires des dérivées fixées.

De même lorsque $D \geq 0$ est effectif on a une suite exacte courte $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(D) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_D \to 0$ où cette fois $\phi(f)$ est la famille des parties polaires de f en les P_i, cette définition dépendant aussi du choix des paramètres locaux z_i.

6.7.1. Groupes de cohomologie. — On voit dans tous les exemples précédents qu'il paraît souhaitable de quantifier le défaut de surjectivité au niveau des sections globales $\mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_3(X)$ pour une suite exacte courte de faisceaux $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$. Cela répond en effet à des questions éminemment classiques d'existence de primitive, de logarithmes, de problème de Cousin ie d'existence de fonctions méromorphes à diviseur fixé, d'existence de fonctions méromorphes avec partie polaire fixée. La cohomologie permettra cela.

Exercice 6.8. — Qu'est ce qui marchait dans l'exercice 6.5 et qui cesse de marcher pour prouver la surjectivité de $\mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_3(X)$ sachant la surjectivité de cette application sur des ouverts assez petits recouvrant X ?

Le théorème suivant est notre première boîte noire d'algèbre homologique. On donnera néanmoins quelques indications de construction juste après. Rappelons qu'on a noté $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$, et le théorème explique en particulier cette notation en donnant en sens aux H^i pour $i \geq 1$.

Théorème 6.9. — *Soit X un espace topologique. Il existe une famille de foncteurs (appelés des δ-foncteurs) $H^i(X, \bullet)$ de la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur X vers la catégorie des groupes abéliens pour tout $i \geq 0$, tels que $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ pour tout $\mathcal{F}$, et il existe pour toute suite exacte courte $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ une famille de morphismes de groupes abéliens*

$$H^i(X, \mathcal{F}_3) \to H^{i+1}(X, \mathcal{F}_1)$$

pour tout $i \geq 0$ telle que la suite suivante soit une suite exacte longue de groupes abéliens

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}_1) \to H^0(X, \mathcal{F}_2) \to H^0(X, \mathcal{F}_3)$$

$$\to H^1(X, \mathcal{F}_1) \to H^1(X, \mathcal{F}_2) \to H^1(X, \mathcal{F}_3)$$

$$\to H^1(X, \mathcal{F}_1) \to H^1(X, \mathcal{F}_2) \to H^1(X, \mathcal{F}_3) \cdots$$

Remarque 6.10. — On rappelle qu'une suite exacte longue de groupes abéliens $A_1 \overset{d_1}{\to} A_2 \overset{d_2}{\to} A_3 \cdots$ est une famille de groupes abéliens et de morphismes vérifiant $\mathrm{Im}(d_i) = \mathrm{Ker}(d_{i+1})$ pour tout i.

Ainsi $H^1(X, \underline{C}_X)$ contient l'obstruction à l'existence de primitives sur X des 1-formes différentielles holomorphes, $H^1(X, \underline{Z}_X)$ celle à l'existence de logarithme global, etc. Plus précisément, il existe des primitives globales à toute 1-forme holomorphe sur X si et seulement le morphisme $H^1(X, \underline{C}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est injectif. C'est bien sûr le cas si $H^1(X, \underline{C}_X) = 0$.

6.10.1. Construction de la cohomologie. — La cohomologie des faisceaux rentre dans le cadre de l'algèbre homologique, et sa construction n'est pas fondamentalement différente des foncteurs Ext ou Tor. Tout le jeu consiste en effet à résoudre un faisceau par des faisceaux injectifs. Pour les preuves le lecteur pourra consulter le livre de Claire Voisin, Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.

Définition 6.11. — Soit X un espace topologique. Un faisceau $\mathcal{I}$ en groupes abéliens sur X est injectif si pour toute injection entre faisceaux $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ sur X, tout morphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{I}$ s'étend en un morphisme de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{I}$.

Lemme 6.12. — *La catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur X a assez d'injectifs, ce qui veut dire que pour tout faisceau $\mathcal{F}$ il existe une injection de $\mathcal{F}$ dans un faisceau injectif $\mathcal{I}$.*

On peut alors considérer le conoyau $\mathcal{I}/\mathcal{F}$ et lui réappliquer le lemme. On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 6.13. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau en groupes abéliens sur X. Il existe une suite exacte longue*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}_0 \overset{d_0}{\to} \mathcal{I}_1 \overset{d_1}{\to} \cdots$$

où les $\mathcal{I}_i$ sont injectifs pour tout $i \geq 0$.

On peut alors considérer les sections globales et on obtient un complexe de groupes abéliens

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{I}_0(X) \overset{d_0}{\to} \mathcal{I}_1(X) \overset{d_1}{\to} \cdots$$

On rappelle qu'un complexe de groupes abéliens est une famille de groupes abéliens et de morphismes $A_0 \overset{d_0}{\to} A_1 \overset{d_1}{\to} A_2 \cdots$ vérifiant $d_{i+1} \circ d_i = 0$, soit $\mathrm{Im}(d_i) \subset \mathrm{Ker}(d_{i+1})$ pour tout i, mais pas nécessairement $\mathrm{Im}(d_i) = \mathrm{Ker}(d_{i+1})$ comme ce serait le cas pour une suite exacte longue.

Définition 6.14. — Le groupe $H^i(X, \mathcal{F})$ est le i-ème groupe de cohomologie de ce complexe. Autrement dit c'est le groupe abélien $\mathrm{Ker}(d_{i+1})/\mathrm{Im}(d_i)$.

Le formalisme général de l'algèbre homologique montre que cela ne dépend pas du choix de la résolution injective, que c'est fonctoriel en $\mathcal{F}$ et que bien des suites exactes longues associées aux suites exactes courtes de faisceaux.

Bien sûr cette construction est très formellement et pas directement utilisable dans la pratique. On verra d'autres incarnations beaucoup plus concrètes de certains groupes de cohomologie de certains faisceaux. Pour cela il faut caractériser d'autres faisceaux non nécessairement injectifs qui permettent de calculer la cohomologie.

Définition 6.15. — Un faisceau $\mathcal{F}$ en groupes abéliens sur X est acyclique si $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $i > 0$.

La proposition suivante est un abstract-non-sense d'algèbre homologique.

Proposition 6.16. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_0 \overset{d_0}{\to} \mathcal{F}_1 \overset{d_1}{\to} \cdots$ une suite exacte longue où $\mathcal{F}_i$ est acyclique pour tout i. Le i-ème groupe de cohomologie du complexe*

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}_0(X) \overset{d_0}{\to} \mathcal{F}_1(X) \overset{d_1}{\to} \cdots$$

est égal à $H^i(X, \mathcal{F})$.

Autrement dit, on peut calculer la cohomologie de $\mathcal{F}$ avec n'importe quelle résolution par des faisceaux acycliques non nécessairement injectifs. Pour qu'un tel énoncé soit utile, encore faut-il dégager des classes de faisceaux acycliques....

Définition 6.17. — Un faisceau $\mathcal{F}$ sur X est flasque pour tous ouverts $U \subset V \subset X$, la restriction $\mathrm{res}_{V/U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ est surjective.

Autrement dit un faisceau flasque paramètre des "fonctions" qui s'étendent toujours à un ouvert plus gros.

Exemple 6.18. —

i. Si $P \in X$, le faisceau gratte-ciel $\mathcal{O}_P$ vérifiant $\mathcal{O}_P(U) = \mathbb{C}$ si $P \in U$ et $\mathcal{O}_P(U) = 0$ sinon est flasque.

ii. Le faisceau de toutes les fonctions ensemblistes est flasque.

iii. Les faisceaux de fonctions continues, $\mathcal{C}^\infty$, holomorphes (si X est une variété différentielle ou une surface de Riemann), etc, ne sont jamais flasques.

iv. Le faisceau des fonctions localement constantes $\underline{\mathbb{Z}}_X$ n'est pas flasque car si $U \subset V$, U peut avoir plus de composantes connexes que V.

Lemme 6.19. — *Un faisceau flasque est acyclique.*

Définition 6.20. — Soit $\mathcal{A}$ un faisceau en anneaux sur X. On dit qu'il est fin s'il admet des partitions de l'unité subordonnées à tout recouvrement. Donc pour tout recouvrement $X = \cup_{i \in I} U_i$, on demande qu'il existe une famille $(f_i \in \mathcal{A}(X))_{i \in I}$ telle que $1_{\mathcal{A}(X)} = \sum_{i \in I} f_i$, telle que $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_i$, et telle que la somme $\sum_{i \in I} f_i$ soit localement finie.

Dans cette définition $\mathrm{supp}(f_i) = \{x \in X \,|\, \forall x \in U \,|\, \mathrm{res}_{X/U}(f_i) \neq 0$, et on dit que la somme $\sum_{i \in I} f_i$ est localement finie si pour tout $x \in X$, il existe $x \in U \subset X$ telle que la somme devienne finie après application de $\mathrm{res}_{X/U}$.

Définition 6.21. — Un faisceau fin est un faisceau $\mathcal{F}$ tel qu'il existe un faisceau en anneaux fin $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{F}$ soit un faisceau en $\mathcal{A}$-modules.

Remarque 6.22. — On peut trouver des définitions plus générales dans la littérature (voir Gunning, Lectures on Riemann Surfaces) mais elles sont un peu tirées par les cheveux.

Exemple 6.23. — Les faisceaux de fonctions continues et $\mathcal{C}^\infty$ sont des faisceaux en anneaux flasques. Les faisceaux de sections continues de fibrés vectoriels sont des faisceaux fins. Les faisceaux de formes différentielles ou de champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sont fins.

Par contre si X est une surface de Riemann, les faisceaux $\mathcal{O}_X$ et Ω^1_X ne sont pas fins car il n'existe pas de partition de l'unité dans le monde holomorphe par le principe des zéros isolés.

Lemme 6.24. — *Les faisceaux fins sont acycliques.*

6.25. Enoncé du théorème de Riemann-Roch

***Théorème 6.26* (Riemann-Roch).** — *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et $D \in \mathrm{Div}(X)$.*

i. *Les $\mathbb{C}$-espace vectoriels $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ sont de dimension finie notée $h^0(D)$ et $h^1(D)$. On a $H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$ pour tout $i \geq 2$.*

ii. *On a $h^0(D = 0) - h^1(D = 0) = 1 - g$. En fait $h^0(0) = 0$ et $h^1(0) = g$.*

iii. *On a $h^0(D) - h^1(D) = 1 - g + \deg(D)$.*

iv. *Il existe des formes différentielles méromorphes non nulles $\omega \in \mathcal{M}(X)^{\mathrm{diff}}$. En notant $K = \mathrm{div}(\omega)$, on a $\deg(K) = 2g - 2$.*

v. *On a $h^0(D) = h^1(K - D)$ et $h^1(D) = h^0(K - D)$.*

Remarque 6.27. — On a bien sûr $h^0(D = 0) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$ par Liouville, donc la seconde assertion est équivalente à $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) = g$.

Remarque 6.28. — Le fait que $\deg(K)$ est indépendant du choix de ω est clair, puisque $\mathcal{M}(X)^{\mathrm{diff}}$ est un $\mathcal{M}(X)$-espace vectoriel de dimension 1, donc deux formes s'écrivent $\omega' = f\omega$ avec f méromorphe, mais $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$.

De même si $K = \mathrm{div}(\omega)$, $K' = \mathrm{div}(\omega')$ et $\omega' = f\omega$, la multiplication par f induit un isomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X(K - D) \to \mathcal{O}_X(K' - D)$ d'où le fait que $h^i(K - D)$ ne dépend pas du choix de ω.

Encore plus canoniquement, la multiplication par ω induit un isomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X(K-D) \to \Omega^1(-D)$, où $\Omega^1(-D)$ est le faisceau des 1-formes différentielles méromorphes vérifiant $\mathrm{div}(\omega) \geq D$. Le dernier point du théorème résulte de la dualité de Serre, contenue dans le théorème qui vient.

***Théorème 6.29* (dualité de Serre).** — *Pour tout $D \in \mathrm{Div}(X)$, on a pour $i = 0, 1$ une dualité canonique entre $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie*

$$H^{1-i}(X, \mathcal{O}_X(D)) \times H^i(X, \Omega^1_X(-D)) \ \to \ \mathbb{C}$$

On va vite voir sur des exemples que seule la dualité de Serre rend le théorème de Riemann-Roch réellement utile. En effet elle permet de remplacer le terme h^1 a priori inconnu par un h^0, plus concret et pour lequel on peut prouver des énoncés d'annulation. La preuve de la dualité de Serre est délicate et de nature analytique. De même le fait que $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ sont de dimension finie se prouve de manière analytique (REF). Par contre une fois cette finitude prouvée, nous verrons que la preuve de $h^0(D) - h^1(D) = 1 - h^0(0) + \deg(D)$ est quasiment triviale d'un point de vue de la cohomologie des faisceaux.

***Remarque 6.30*.** — Soit X une variété complexe compacte de dimension d (encore une fois la définition rigoureuse est facile si l'on connaît les fonctions holomorphes sur les ouverts de $\mathbb{C}^d$, cf le cours de théorie de Hodge et de géométrie complexe pour plus de détails). Soit Ω^d_X le faisceau des d-formes différentielles holomorphes sur X, qui s'écrivent dans les cartes sous la forme $f(z_1, \cdots, z_d)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_d$. La dualité de Serre prédit alors que les $\mathbb{C}$-espace vectoriels de dimension finie $H^{d-i}(X, \mathcal{O}_X)$ et $H^i(X, \Omega^d_X)$ sont duaux l'un de l'autre pour tout $0 \leq i \leq g$. De plus ces espaces sont nuls en degré cohomologique $> d$. Il y a aussi une variante avec des diviseurs, une fois cette notion définie sur X de dimension d.

Dans tous les cas on voit que la dualité de Serre ne permet plus de remplacer les $H^i, i \geq 0$ par des H^0. C'est en grande partie ce qui explique que la théorie des courbes complexes (ie des surfaces de Riemann) est spécialement simple, avec des résultats généraux élégants, par opposition à la théorie en dimension supérieure.

6.31. Premières conséquences de Riemann-Roch

Commençons par un énoncé élémentaire qu'on va ensuite combiner avec le théorème.

***Lemme 6.32*.** — *Soit X une surface de Riemann compacte et D un diviseur de degré < 0. On a $h^0(D) = 0$.*

Démonstration. — Si $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ est non nulle, on a $\mathrm{div}(f) \geq -D$ donc $0 = \deg(\mathrm{div}(f)) \geq -\deg(D) > 0$ ce qui est absurde. Donc f est nulle. □

Lemme 6.33. — *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g. Soit $\omega \in \mathcal{M}^{\mathrm{diff}}(X)$ une forme différentielle méromorphe non nulle et $K = \mathrm{div}(\omega)$. Le degré de K est $2g-2$.*

Démonstration. — On applique le théorème à $D = K$. On en déduit $h^0(K) - h^1(K) = 1 - g + \deg(K)$. Mais par dualité de Serre, $h^1(K) = h^0(0) = 1$ d'après le théorème de Liouville, et $h^0(K) = h^1(0) = g$ par le second point du théorème 6.26. □

Remarque 6.34. — On avait calculé à la main le degré de K lorsque $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ou $X = \mathbb{C}/\Lambda$.

Corollaire 6.35. — *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et D un diviseur de degré $> 2g-2$. On a $h^1(D) = 0$ et $h^0(D) = \deg(D) + 1 - g$.*

Démonstration. — Par la dualité de Serre on a $h^1(D) = h^0(K - D)$ et $K - D$ est de degré $2g - 2 - \deg(D) < 0$. On applique le lemme 6.32. □

Remarque 6.36. — On l'a compris, c'est le corollaire 6.35 qui rend le théorème de Riemann-Roch utile, en annulant $h^1(D)$ et en donnant une formule close pour $h^0(D)$. Cette formule ne dépend notamment de X et de D que par leur genre et degré. Au final $h^0(D)$ est simple hors de l'intervalle $\deg(D) \in [0, 2g-2]$. Dans cet intervalle, $h^0(D) - h^1(D) = 1 - g + \deg(D)$ reste simple, mais $h^0(D)$ et $h^1(D)$ individuellement sont mystérieux. La théorie des courbes algébriques étudie notamment la variation de $h^0(D)$ dans cet intervalle. Le problème est subtil, il demande de distinguer diverses classes de surfaces de Riemann de genre donné (par exemple, hyperelliptique ou non) et diverses classes de diviseurs de degré donné. Néanmoins on va voir que le cas facile où $\deg(D) > 2g-2$ a déjà des applications impressionnantes.

Remarque 6.37. — D'après le corollaire 6.35, si $g > 1$, pour tout diviseur D de degré $> 2g-2$, il existe f méromorphe de degré $\geq -D$, puisque $\deg(D)+1-g > 0$. Ce phénomène est à l'origine de la dichotomie entre surfaces de Riemann de genre 0 et 1, et surfaces de Riemann de genre > 2. Une autre dichotomie, plus profonde, proviendrait du théorème d'uniformisation (REF).

Le corollaire suivant répond à une question qu'on peut se poser depuis longtemps, mais qui n'admet pas de preuve n'utilisant pas le théorème de Riemann-Roch.

Corollaire 6.38. — *Soit X une surface de Riemann compacte de genre 0. Elle est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — Soit $P \in X$ quelconque. En utilisant $2g - 2 = -2$, on trouve que $h^0((P) = 1 - g + \deg((P)) = 2$. Donc l'inclusion de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\mathbb{C} = H^0(X, \mathcal{O}_X) \subsetneq H^0(X, \mathcal{O}_X((P)))$$

est stricte et il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X((P)))$ non constante. D'après (REF) elle induit $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de degré 1, qui est donc un isomorphisme. $\square$

Passons maintenant à quelques conséquences sur les courbes elliptiques.

Proposition 6.39. — *Soit X une surface de Riemann compacte de genre 1. Elle est isomorphe à la courbe plane projective lisse d'équation $Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3$ où $\Delta = a^3 - 27b^2 \neq 0$.*

Démonstration. — Soit $P \in X$ quelconque. En utilisant $2g - 2 = 0$ il vient $h^0(n(P)) = n + 1 - g = n$ pour tout $n > 0$. Donc on a deux inclusions strictes

$$\mathbb{C} = H^0(X, \mathcal{O}_X) \ = \ H^0(X, \mathcal{O}_X((P))) \ \subsetneq \ H^0(X, \mathcal{O}_X(2(P))) \ \subsetneq \ H^0(X, \mathcal{O}_X(3(P)))$$

et il existe x, y méromorphes sur X telles que $1, x$ est une $\mathbb{C}$-base de $H^0(X, \mathcal{O}_X(2(P)))$ et $1, x, y$ de $H^0(X, \mathcal{O}_X(3(P)))$. En particulier $\mathrm{ord}_P(x) = 2$ et $\mathrm{ord}_P(y) = 3$. On trouve que $h^0(6(P)) = 6$ donc dans l'espace $H^0(X, \mathcal{O}_X(6(P)))$, les 7 fonctions

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3$$

sont liées. Il existe donc une relation en tant que fonctions holomorphes $X - \{P\} \to \mathbb{C}$

$$A_1 + A_2x + A_3y + A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2 + A_7x^3 = 0$$

Or les ordres en P de $1, x, y, x^2, xy$ sont échelonnés < 6, et les seuls termes ayant un ordre 6 correspondent à A_6 et A_7. Donc on a $A_6 \neq 0$ et $A_7 \neq 0$. Posons $x' = -A_6A_7x$ et $y' = A_6A_7^2y$, ce qui rend l'équation unitaire en x^3 et en y^2. Un nouveau changement de variable linéaire du type $x' = 1/3(x - \lambda)$ et $y' = 1/2(y - \alpha x - \beta)$ permet alors de se ramener à une équation du type $y^2 = 4x^3 - ax - b$ entre fonctions holomorphes $X - \{P\} \to \mathbb{C}$. Bref la fonction $X - \{P\} \to \mathbb{C}$, $P \mapsto (x(P), y(P))$ a son image incluse dans la courbe algébrique affine plane C_{aff} d'équation $y^2 = 4x^3 - ax - b$. Comme $\mathrm{ord}_P(x) = 2$ et $\mathrm{ord}_P(y) = 3$, cette application s'étend par continuité en $\phi : X \to C_{\text{proj}}$ où $C_{\text{proj}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est la courbe projective plane d'équation $Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3$, et cette application envoie $P \in X$ vers $[0 : 1 : 0] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

On doit maintenant admettre que $\Delta = a^3 - 27b^2 \neq 0$. Cela pourrait se montrer rapidement en étudiant les bases de la théorie des courbes algébriques planes singulières, mais comme elles ne définissent pas des surfaces de Riemann, c'est hors de notre cadre. On en déduit que $Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3$ est un polynôme homogène lisse, que C_{proj} est une surface de Riemann et que ϕ est holomorphe non constante. Par la formule genre-degré (REF), C_{proj} est de genre un, tout comme X. Par Riemann-Hurwitz, on en déduit que ϕ est non ramifiée. Comme $[0 : 1 : 0]$ a un unique antécédant qui est P, de multiplicité un par non ramification, on a que ϕ est de degré un, donc que c'est un isomorphisme de surfaces de Riemann. $\square$

Remarque 6.40. — Soit X de genre 1, qui est donc isomorphe à C_{proj} d'équation $Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3$ via le choix d'un point base $P \in X$. Un exercice de formes modulaires montre que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a^3 - 27b^2 \neq 0$, il existe un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$ tel que $g_2(\Lambda) = a$ et $g_3(\Lambda) = b$. On en déduit que X est isomorphe à $\mathbb{C}/\Lambda$, l'isomorphisme envoyant P sur 0. En effet, les deux sont isomorphes à C_{proj} munie du point base $[0:1:0]$. On peut donc donner une définition équivalente des courbes elliptiques en disant que ce sont des surfaces de Riemann compactes de genre 1 munies d'un point marqué.

On verra avec le théorème d'Abel-Jacobi comment procéder plus rapidement pour prouver que toute surface de Riemann de genre 1 muni d'un point est isomorphe à $\mathbb{C}/\Lambda$ pour $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau.

Continuons avec les courbes elliptiques et leur loi de groupe. Soit $\mathbb{C}/\Lambda$ une courbe elliptique, qui est donc de genre un. Elle est isomorphe en tant que surface de Riemann à C_{proj} d'équation $Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3$ dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Mais $\mathbb{C}/\Lambda$ est un groupe et la loi de groupe est holomorphe (à deux variables). Cette loi se transfert automatiquement en une loi de groupe holomorphe sur C_{proj}. On peut chercher à caractériser directement une telle loi, et vérifier si elle ne serait pas de plus algébrique, ie donnée par des fractions rationnelles sans pôle.

Définition 6.41. — Soit C_{proj} la courbe projective plane lisse d'équation $Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3$ dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, où $a^3 - 27b^2 \neq 0$. Pour tous $P, Q \in C_{\text{proj}}$, notons R le troisième point d'intersection de la droite projective Δ passant par P et Q. Ce point R existe et est unique car en substituant les équations affines de Δ dans $Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3$, on trouve une équation homogène de degré 3 à 2 variables, c'est à dire une équation non homogène de degré 3 en une variable, qui a deux solutions dans $\mathbb{C}$ (correspondant à $P, Q \in \Delta \cap C_{\text{proj}}$) et qui en a donc une troisième, correspondant à R.

On peut bien sûr avoir $P = Q$ auquel cas on pose pour Δ la tangente à C_{proj} en P. De même on peut avoir $R = P$ ou $R = Q$.

Soit enfin $P \boxplus Q$ le troisième point d'intersection de C_{proj} avec la droite projective reliant R et $[0:1:0]$.

On a donc définit une application $\bullet \boxplus \bullet : C_{\text{proj}} \times C_{\text{proj}} \to C_{\text{proj}}$ qui est clairement holomorphe (à deux variables), et même donné par des formules algébriques. Il n'est pas du tout évident qu'il s'agit d'une loi de groupe. L'associativité notamment pose problème. La commutativité est par contre claire, de même que l'existence de $[0:1:0]$ comme neutre, et l'existence d'inverse (quels sont-ils ?).

Proposition 6.42. — *Soit $\phi : \mathbb{C}/\Lambda \to C_{\text{proj}}$ l'isomorphisme de surfaces de Riemann $z \mapsto (\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z))$. Il vérifie $\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) \boxplus \varphi(z_2)$. En particulier $(C_{\text{proj}}, \boxplus, [0:1:0])$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{C}/\Lambda, +, 0)$.*

Démonstration. — On va trouver une caractérisation commune à $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}/\Lambda$ et à $P \boxplus Q \in C_{\text{proj}}$ qui montrera tout de suite que ϕ envoie la première somme sur la deuxième.

Commençons avec la caractérisation de $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}/\Lambda$. Il existe en effet $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ vérifiant $\operatorname{div}(f) = (z_1 + z_2) - (z_1) - (z_2) + (0)$, comme il résulte de l'exercice (REF). Donc $f \in H^0(\mathbb{C}/\Lambda, \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\Lambda}((z_1)+(z_2)-(0))$. Mais ce dernier espace vectoriel est de dimension 1 par Riemann-Roch. Il s'ensuite que f est unique à homothétie près. On peut finalement dire que 0 et z_1+z_2 sont les uniques zéros de tout élément non nul de $H^0(\mathbb{C}/\Lambda, \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\Lambda}((z_1)+(z_2)-(0))$.

Prouvons une caractérisation similaire pour $P \boxplus Q \in C_{\text{proj}}$. Soit $g(X, Y, Z) = 0$ l'équation homogène de degré 1 qui donne la droite projective Δ reliant P et Q. Ce n'est pas une fonction sur C_{proj}, mais la fraction rationnelle homogène de degré nul g/Z est une fonction méromorphe sur C_{proj}. On a $\operatorname{div}(g/Z) = (P) + (Q) + (R) - 3([0:1:0])$ (les zéros sont clairs, le seul pôle est en $Z = 0$ donc en $[0:1:0]$ et sa multiplicité est 3 puisque le degré de $\operatorname{div}(g/Z)$ est nul.

De même si $h(X, Y, Z) = 0$ est l'équation homogène de degré 1 de la droite projective reliant R et $[0:1:0]$, on voit que $\operatorname{div}(g/Z) = (R) + (P \boxplus Q) + (R) - 2([0:1:0])$. Au final le diviseur de la fonction méromorphe h/g sur C_{proj} est $(P \boxplus Q) - (P) - (Q) + ([0:1:0])$. On obtient finalement que $P \boxplus Q$ et $[0:1:0]$ sont les uniques zéros de tout élément non nul de $H^0(C_{\text{proj}}, \mathcal{O}_{C_{\text{proj}}}((P) + (Q) - ([0:1:0]))$, qui est un espace vectoriel de dimension 1 par Riemann-Roch.

On conclut car tout isomorphisme $\psi : \mathbb{C}/\Lambda \to C_{\text{proj}}$ envoyant 0 sur $[0:1:0]$ induit un isomorphisme de droites vectorielles

$$\psi_* \,:\, H^0(\mathbb{C}/\Lambda, \mathcal{O}_{\mathbb{C}/\Lambda}((z_1) + (z_2) - (0)) \,=\, H^0(C_{\text{proj}}, \mathcal{O}_{C_{\text{proj}}}((P) + (Q) - ([0:1:0]))$$

vérifiant $\operatorname{div}_{C_{\text{proj}}}(\psi_*(f)) = \psi(\operatorname{div}_{\mathbb{C}/\Lambda}(f))$. □

Remarque 6.43. — On pourrait prouver que $\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) \boxplus \varphi(z_2)$ d'une manière tout à fait analytique, car il s'agit au final d'une formule d'addition pour $\wp_\Lambda(z_1 + z_2)$ et sa dérivée qui écrit ces quantités de manière algébrique en $\wp_\Lambda(z_i)$ et $\wp'_\Lambda(z_i)$ pour $i = 1, 2$. Des fonctions holomorphes vérifiant de telles propriétés rappelant celles de sin et cos ont étudiées en détail du temps d'Abel. Néanmoins la perspective moderne, utilisant le théorème de Riemann-Roch, a comme avantage de réellement expliquer d'où sort la loi compliquée $\boxplus$.

6.44. Algébrisation des surfaces de Riemann compactes

Dans le paragraphe précédent, on a donc algébrisé les surfaces de Riemann compactes de genre 0 (en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$) et de genre 1 (en C_{proj}). On va maintenant voir qu'il en est de même en tout genre, à cela près qu'on trouve des courbes dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ pour n grand dépendant du genre.

Soit X une surface de Riemann compacte de genre g. Pour tout point $P \in X$, soit $\mathcal{O}_P$ le faisceau gratte-ciel en P sur X, qui vérifie $\mathcal{O}_P(U) = \mathbb{C}$ si $P \in U \subset X$ et $\mathcal{O}_P(U) = 0$ sinon. On a déjà cité le lemme suivant comme exemple de suite exacte courte de faisceaux, mais revoyons la preuve.

Lemme 6.45. — *Soit $D \in \mathrm{Div}(X)$ et $P \in X$. On a une suite exacte courte de faisceaux sur X*

$$0 \to \mathcal{O}_X(D - (P)) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_P \to 0$$

Démonstration. — Il faut définir le morphisme de faisceaux $\phi : \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_P$ et l'exactitude (qui rappelons-le, se teste sur de petits ouverts) sera claire. Si $P \in U \subset X$, on veut donc définir $\phi_U : \mathcal{O}_X(D)(U) \to \mathcal{O}_P(U) = \mathbb{C}$.

Si P n'est pas dans le support de D, on note tout simplement $\phi_U(f) = f(P)$ ce qui a un sens car f est holomorphe en P.

Si $D = n \cdot (P) + \sum_{Q \neq P} n_Q \cdot (Q)$, on a $\mathrm{ord}_P(f) \geq -n$. Soit z une coordonnée locale en P. On note alors $\phi_U(f) = (f \cdot z^{-n})(P)$, ce qui a un sens car $f \cdot z^{-n}$ est holomorphe dans un voisinage de P. Ainsi le morphisme ϕ dépend du choix de z. $\square$

Remarque 6.46. — Si on remplace le gratte-ciel $\mathcal{O}_P$ par le faisceau quotient $\mathcal{O}_X(D)/\mathcal{O}_X(D-(P))$, on obtient une suite exacte canonique. Le faisceau $\mathcal{O}_X(D)/\mathcal{O}_X(D-(P))$ est un gratte ciel concentré en P, associé à un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension un sans base canonique. Toute uniformisante locale de X en P fournit un isomorphisme de cette droite vers $\mathbb{C}$, donc un isomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X(D)/\mathcal{O}_X(D-(P)) = \mathcal{O}_P$.

Proposition 6.47. — *On a $h^0(D-(P)) = h^0(D)$ ou $h^0(D-(P)) = h^0(D) - 1$. Le premier cas arrive lorsque la flèche naturelle $\mathbb{C} = H^0(X, \mathcal{O}_P) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(D-(P)))$ est injective, et le second cas arrive lorsque cette flèche est nulle. Dans le premier cas, pour tout $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ on a $\phi(f) = 0$ et dans le second cas, il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ tel que $\phi(f) \neq 0$.*

Démonstration. — La flèche naturelle de l'énoncé est la flèche obtenue en considérant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_X(D - (P)) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_P \to 0$$

La proposition est d'ailleurs claire en considérant cette suite exacte longue, puisque le conoyau de l'injection $H^0(X, \mathcal{O}_X(D-(P))) \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ est le noyau de l'application $\mathbb{C} = H^0(X, \mathcal{O}_P) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$. $\square$

Corollaire 6.48. — *Si $\deg(D) \geq 2g$, on est nécessairement dans le second cas de la proposition 6.47 donc pour tout $P \in X$, il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ tel que $\phi(f) \neq 0$.*

Démonstration. — En effet $\deg(D-(P)) > 2g-2$ donc par le corollaire 6.35 on a $h^0(D-(P)) = 1-g+\deg(D)-1$ et $h^0(D) = 1-g+\deg(D)$. □

Corollaire 6.49. — *Soit r la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(X,\mathcal{O}_X(D))$ et soit $f_1,\cdots,f_r$ une base de cet espace vectoriel. Si $\deg(D)\geq 2g$, l'application $\iota : X\to\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}}, P\mapsto [\phi(f_1),\cdots,\phi(f_r)]$ est bien défini.*

Démonstration. — Il s'agit de voir que pour tout $P\in X$, il existe $1\leq i\leq r$ tel que $\phi_i(P)\neq 0$. C'est clair par le corollaire 6.49. □

Un terme classique est de dire que le système linéaire $f_1,\cdots,f_r$ est sans point base.

Remarque 6.50. — Rappelons que si P n'est pas dans le support de D, alors $\phi(f) = f(P)$. Si P est dans le support de D, alors $\phi(f)$ est l'évaluation en P d'une régularisation de f, dépendant du choix d'une uniformisante locale z en P. Ainsi dans ce cas, $\phi(f)\in\mathbb{C}$ est mal défini mais seul son image dans $\mathbb{C}/\mathbb{C}^*$ est indépendante du choix de z.

Par contre, par définition d'une coordonnée projective, on voit que ι est indépendant du choix d'uniformisantes locales.

Remarque 6.51. — On peut formuler le résultat plus canoniquement sans fixer de base. Pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie V, notons $\mathbb{P}(V)$ l'espace des hyperplans de V. Si note V^* le dual de V, on a donc $\mathbb{P}(V) = (V^*-0)/\mathbb{C}^*$. Tout choix de base de V fournit donc un isomorphisme entre $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}^{\dim(V)-1}_{\mathbb{C}}$.

On dispose alors de l'application canonique $\iota : X\to\mathbb{P}(H^0(X,\mathcal{O}_X(D)))$ qui envoie P sur l'hyperplan des $f\in H^0(X,\mathcal{O}_X(D))$ tels que $\phi(f)=0$. Le fait que ce soit un hyperplan résulte bien sûr du corollaire 6.48.

Proposition 6.52. — *Pour tout diviseur D sur X et tous $P\neq Q\in X$, le nombre $h^0(D-(P)-(Q))$ est égal au choix à*

- ***i.*** *$h^0(D)$ si la flèche $\mathbb{C}^2 = H^0(X,\mathcal{O}_P\oplus\mathcal{O}_Q)\to H^1(X,\mathcal{O}_X(D-(P)-(Q))$ est nulle,*
- ***ii.*** *$h^0(D)-1$ si la flèche $\mathbb{C}^2 = H^0(X,\mathcal{O}_P\oplus\mathcal{O}_Q)\to H^1(X,\mathcal{O}_X(D-(P)-(Q))$ est d'image de rang un,*
- ***iii.*** *$h^0(D)-2$ si la flèche $\mathbb{C}^2 = H^0(X,\mathcal{O}_P\oplus\mathcal{O}_Q)\to H^1(X,\mathcal{O}_X(D-(P)-(Q))$ est injective.*

Si $\deg(D)\geq 2g+1$, on est dans le troisième cas.

Démonstration. — Comme d'habitude, utiliser la suite longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux

$$0\to\mathcal{O}_X(D-(P)-(Q))\to\mathcal{O}_X(D)\to\mathcal{O}_P\oplus\mathcal{O}_Q\to 0$$

où la flèche $\mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_Q$ consiste en l'évaluation des fonctions (éventuellement régularisées) en P et Q. Si $\deg(D) \geq 2g+1$, on est dans le troisième cas par Riemann-Roch qui calcule $h^0(D-(P)-(Q))$ car $\deg(D-(P)-(Q)) > 2g-2$. □

Corollaire 6.53. — *Si* $\deg(D) \geq 2g+1$, *le morphisme* $\iota : X \to \mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}}$ *est injectif.*

Démonstration. — En effet pour tous $P \neq Q$, il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D)$ nul en P mais non nul en Q, puisque l'injection $H^0(X, \mathcal{O}_X(D-(P)-(Q)) \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(D-(P))$ est stricte. □

On dit aussi que ι sépare les points de X. Comme en géométrie différentielle, cela ne suffit pas à ce que $\iota(X) \subset \mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}}$ soit une sous-variété complexe et que $\iota : X \to \iota(X)$ soit un isomorphisme de surfaces de Riemann (considérer par exemple l'analogue affine $X = \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ dont l'image est la courbe algébrique singulière $Y = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | y^2 = x^3\}$). Toutefois les problèmes sont corrigés si ι sépare également les tangentes en tout point de X. Développons cette notion.

On note $\mathcal{O}_{X,P}$ l'anneau des couples (U, f) où $P \in U \subset X$ est un ouvert et f est holomorphe sur U. On identifie de plus (U,f) et (V,g) si $f = g$ sur $U \cap V$, ie on s'autorise à rapetisser U. On dira que (U,f) est un germe de fonction en P et que $\mathcal{O}_{X,P}$ est l'anneau local de X en P. On remarque qu'on peut évaluer un germe (U,f) en P, mais qu'on ne peut l'évaluer en aucun autre point $Q \neq P$. Toutes les notions exposées rapidement ici seront développées en cours de schéma I,II (dans le contexte algébrique, mais c'est exactement la même chose que pour les surfaces de Riemann en ce qui concerne les anneaux locaux et les espaces tangents).

Remarque 6.54. — Pour calculer $\mathcal{O}_{X,P}$ on peut bien sûr utiliser une carte et une coordonnée locale z centrée en P. On trouve que $\mathcal{O}_{X,P}$ est l'ensemble des séries formelles $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ convergeant sur une boule centrée en 0, donc telles qu'il existe R (dépendant de f) telle que $\sum_n |a_n| R^n < \infty$.

Lemme 6.55. — *L'anneau* $\mathcal{O}_{X,P}$ *est local dans le sens de l'algèbre commutative, ie il a un unique idéal maximal* $\mathfrak{m}_P = \{(U,f) \ , \ f(P) = 0\}$. *De plus le morphisme* $\mathcal{O}_{X,P} \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(P)$ *fournit un isomorphisme* $\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P = \mathbb{C}$.

Lemme 6.56. — *Le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ *est de dimension un. On dispose d'un isomorphisme canonique* $T_{X,P} = (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*$ *entre l'espace tangent de* X *en* P *et le* $\mathbb{C}$*-dual de* $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

Démonstration. — Il résulte des définitions que $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ s'identifie à l'espace cotangent de X en P, donc est de dimension un. En effet $\mathfrak{m}_P^2$ est l'ensemble des germes de fonctions (U,f) où f s'annule à l'ordre 2 en P. Donc $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ est l'espace vectoriel des DL_1 en P de fonctions holomorphes vérifiant $f(P) = 0$, autrement dit c'est le dual de l'espace tangent. $\square$

On dispose également du fait suivant, qui est l'analogue exact en géométrie complexe d'un résultat de géométrie différentielle. On renvoie au cours de géométrie complexe et théorie de Hodge pour plus de détails, car encore une fois nous n'avons même pas donné la définition formelle d'une variété complexe de dimension > 1.

Proposition 6.57. — *Soit $f : Y \to Z$ un morphisme entre deux variétés complexes compactes. Si f est injective et immersive, alors $f(Y) \subset Z$ est une sous-variété complexe et $f : Y \to f(Y)$ est un isomorphisme de variétés complexes.*

Bien sûr dans cet énoncé, on dit que f est immersive si pour tout $P \in Y$, la différentielle $d_P f : T_P Y \to T_{f(P)} Z$ est injective entre espaces tangents.

Revenons à notre surface de Riemann compacte et à l'injection $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}}$. On veut prouver qu'elle est immersive, donc que pour tout $P \in X$,

$$d_P \iota \ : \ T_{X,P} \ \to \ T_{\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}},\iota(P)}$$

est injective. Puisque la source est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension un, il s'agit de montrer que $d\iota_P$ est non nulle. Mais ι induit une application

$$\iota^* \ : \ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}},\iota(P)} \ \to \ \mathcal{O}_{X,P} \ , \ \ (V,g) \ \mapsto \ (\iota^{-1}(V), g \circ \iota)$$

qui préserve l'ordre d'annulation en P et en $\iota(P)$, donc qui induit

$$\iota^* \ : \ \mathfrak{m}_{\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}},\iota(P)}/\mathfrak{m}^2_{\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}},\iota(P)} \ \to \ \mathfrak{m}_{X,P}/\mathfrak{m}^2_{X,P}$$

Il est alors clair par les définitions que, via l'identification de l'espace tangent avec $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ fournie par le lemme 6.56, la différentielle $d_P\iota$ est égale à l'application duale $(\iota^*)^\vee$ de ι^*. Puisqu'on veut prouver que $d_P\iota$ est non nulle, il suffit de prouver que $(\iota^*)^\vee$ est non nulle. Autrement on veut prouver qu'on n'a *pas* une inclusion

$$\mathrm{Im}\left(\iota^* \ : \ \mathfrak{m}_{\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}},\iota(P)} \ \to \ \mathfrak{m}_{X,P}\right) \subset \mathfrak{m}^2_{X,P}$$

Mais si (V,g) est un germe de fonction en $\iota(P)$ sur $\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}}$, $\iota(P)$, on a $\iota^*(V,g) = (\iota^{-1}(V), g \circ \iota)$ et donc si on note $f = g \circ \iota$, on a pour tout $Q \in \iota^{-1}(V)$

$$f(Q) \ = \ g(f_1(Q), \cdots, f_r(Q))$$

. Pour prouver que $d_P\iota$ est injective, il est équivalent de prouver qu'il existe un germe (V,g) sur l'espace projectif tel que la fonction f correspondante sur un ouvert de X ne s'annule pas à l'ordre 2.

Exercice 6.58. — Continuer le raisonnement et prouver que $d_P\iota$ est injective si et seulement si il existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D - (P))$ nulle en P, mais non nulle à l'ordre deux. Ici l'évaluation de f en P est comme d'habitude régularisée si P est dans le support de D, ie il faut considérer $\phi(P)$.

Corollaire 6.59. — *L'application* $\iota : X \to \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$ *(qui existe si l'inclusion* $H^0(X, \mathcal{O}_X(D-(P)) \subsetneq H^0(X, \mathcal{O}_X(D)$ *est stricte pour tout* $P \in X$*) est immersive si l'inclusion* $H^0(X, \mathcal{O}_X(D-2(P)) \subsetneq H^0(X, \mathcal{O}_X(D-(P))$ *est stricte pour tout* $P \in X$*). On dit dans ce cas que* ι *sépare les tangentes en* P*.*

Corollaire 6.60. — *Supposons* $\deg(D) \geq 2g+1$*. Alors l'application* ι *est bien définie, injective et immersive. En particulier* $\iota(X) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$ *est une sous-variété complexe de dimension un. Ainsi* $\iota(X)$ *est une surface de Riemann plongée dans un espace projectif. De plus* $\iota : X \to \iota(X)$ *est un isomorphisme de surfaces de Riemann.*

Démonstration. — L'injectivité résulte du corollaire 6.53, et le caractère immersif se prouve exactement de la même manière en posant $P = Q$, en tenant compte du corollaire 6.59. On utilise finalement la proposition 6.57. □

Remarque 6.61. — Récapitulons les différentes quantités numériques : D désigne n'importe quel diviseur de degré $d \geq 2g+1$ et on a $r = h^0(D) = 1-g+d \geq 1-g+2g+1 = g+2$. Dans le cas minimal, on a donc plongé X dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g+1}$.

On peut alors utiliser d'autres techniques, appelées des pinceaux de sections hyperplanes. Par exemple on peut utiliser une projection $\pi_\Delta : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g+1} \to \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g}$ par rapport à une droite projective $\Delta \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g+1}$. On vérifie que si Δ est choisie en position générale, alors $\pi_\Delta \circ \iota : X \to \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g}$ reste un plongement. On peut continuer par récurrence jusqu'à obtenir un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{3}$. L'argument stoppe alors car il n'est pas toujours possible de trouver une droite projective $\Delta \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{3}$ telle que $\pi_\Delta \circ \iota$ reste un plongement.

On distingue donc les courbes algébriques projectives lisses planes, qui sont plongées dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2}$ des surfaces de Riemann compactes générales, qui sont seulement plongées dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{3}$.

On n'a toutefois pas fini l'algébrisation des surfaces de Riemann compactes : il reste à prouver que la sous-variété complexe $X \subset \mathbb{P}^n$ (avec $n = g+1$ ou 3, peu importe) est algébrique, ie est définie par l'annulation d'un polynôme homogène lisse à $n+1$ variables. Cela peut sembler magique. C'est un corollaire du théorème GAGA (=Géométrie Analytique, Géométrie Algébrique) de Serre. Ce théorème et sa preuve est une des meilleures justifications qu'on puisse donner à l'utilité des faisceaux, de leur cohomologie, de l'algèbre homologique, etc. On verra en effet que grâce à des dévissages plus ou moins standards, on se ramène à un calcul explicite extrêmement simple de cohomologie de l'espace projectif, à la fois dans le monde analytique et dans le monde algébrique, et à la vérification qu'on obtient le même résultat dans ce cas élémentaire. Ainsi le théorème GAGA, dont l'énoncé est élémentaire et aurait pu être découvert depuis Riemann, etc, se trouve être un corollaire facile des mathématiques du 20ème siècle.

6.62. Un survol de GAGA

Dans cette section, nous allons expliquer quelques unes des notions utilisées lors de la preuve de ce théorème GAGA. Il s'agit plus de culture mathématique et de motivation pour la cohomologie des faisceaux que d'un cours absolument rigoureux. Notamment nous ne pourrons qu'esquisser certaines notions, qui seront développées dans le cours de schémas II. On renvoie toutefois le lecteur intéressé à l'article Géométrie algébrique et géométrie analytique, Annales de l'Institut Fourier de Jean-Pierre Serre pour beaucoup plus de détails. Cet article est écrit dans un langage élémentaire précédant l'introduction des schémas par Grothendieck.

***Théorème 6.63* (GAGA naïf).** — *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une sous variété complexe fermée. Elle est algébrique, ie il existe $P_1, \cdots, P_r \in \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ homogène telle que $X = \{[X_0 : \cdots : X_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid P_i(X_0, \cdots, X_n) = 0 \,\forall\, i$.*

Nous l'appelons théorème naïf car il s'agit de la formulation qui aurait pu être connue depuis les années 1800. Toutefois le théorème paraît infiniment difficile à prouver dans cette formulation. Voyons une formulation un peu plus robuste. Pour cela on rappelle qu'il existe un foncteur des sous-variétés fermées algébriques de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ vers les sous-variétés fermées complexes, noté $X^{\text{alg}} \mapsto X^{\text{an}}$. On a vu ce foncteur en détail dans le cas où $n = 2$ dans REF !!!! et c'est pareil si $n \geq 2$. Ici X^{alg} est un espace localement annelé, c'est à dire un sous-ensemble $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ égal au lieu d'annulation de polynômes homogènes $P_1, \cdots, P_r$, et l'on munit X de sa topologie de Zariski et du faisceau (pour cette topologie) d'anneaux des fractions rationnelles sans pôles. La variété complexe X^{an} est également un espace localement annelé. Le sous-ensemble de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est toujours égal à X mais on le munit de la topologie complexe, induite par la topologie complexe de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, qui est elle-même la topologie quotient de $\mathbb{C}^{n+1} - 0$, et on le munit du faisceau (pour cette topologie) d'anneaux des fonctions holomorphes.

Comme tout ouvert Zariski est un ouvert complexe, et toute fraction rationnelle sans pôle est holomorphe on en déduit un morphisme d'espace localement annelé $X\text{alg} \to X^{\text{an}}$ qui est l'identité sur l'ensemble X sous-jacent.

***Théorème 6.64* (GAGA moins naïf).** — *Le foncteur $X^{\text{alg}} \mapsto X^{\text{an}}$ induit une équivalence de catégories entre les sous-variétés algébriques de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ et les sous-variétés complexes de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. De plus le morphisme $X\text{alg} \to X^{\text{an}}$ induit et tout $i \geq 0$ un isomorphisme*

$$H^i(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}) = H^i(X^{\text{alg}}, \mathcal{O}_{X^{\text{alg}}})$$

De plus X^{alg} est une courbe algébrique lisse irréductible si et seulement si X^{an} est une surface de Riemann. Dans ce cas pour tout diviseur D de X et tout $i \geq 0$ on a un isomorphisme

$$H^i(X^{\text{an}}, \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}(D)) \;=\; H^i(X^{\text{alg}}, \mathcal{O}_{X^{\text{alg}}}(D))$$

Dans ce cas on a aussi égalité $\mathcal{M}(X^{\text{an}}) = \mathcal{M}(X^{\text{alg}})$ entre le corps des fonctions méromorphes sur X^{an} et celui des fonctions rationnelles homogènes de degré nul sur X^{alg}.

Remarque 6.65. — Il s'agit donc d'un super-théorème de Liouville car on algébrise tous les objets sur X : on commence par algébriser X^{an} lui-même en X^{alg} par essentielle surjectivité. Puis toute fonction méromorphe sur X^{an} s'algébrise en une fraction rationnelle homogène de degré 0. Par exemple, les fonctions holomorphes sont bien algébriques, puisqu'elles sont constantes.

Un cas très particulier est élémentaire : un exercice classique d'analyse complexe prouve en effet que $H^0(\mathbb{P}^{1,\text{an}}_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{1,\text{an}}_{\mathbb{C}}}(d(\infty))) = H^0(\mathbb{P}^{1,\text{alg}}_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{1,\text{alg}}_{\mathbb{C}}}(d(\infty)))$. Autrement dit toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est méromorphe en ∞ est un polynôme.

La preuve du théorème 6.64 procède par dévissage. Il s'agit d'une technique employée par Grothendieck tout au long de SGA. Le principe est de réduire une situation compliquée en des situations de plus en plus simple, et de traiter la dernière de ces situations par un calcul explicite facile. Toutefois pour être capable d'effectuer ce dévissage, il faut en général opérer un changement de cadre, comme typiquement remplacer les sous-variétés par des faisceaux.

Le premier fait utilisé dans ce changement de cadre est que toute sous-variété complexe $X^{\text{an}} \subset \mathbb{P}^{n,\text{an}}_{\mathbb{C}}$ est déterminée par son faisceau d'idéal

$$\mathcal{I}_{X^{\text{an}}} \;\subset\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n,\text{an}}_{\mathbb{C}}}$$

Ici pour tout ouvert complexe $U \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ l'idéal $\mathcal{I}_{X^{\text{an}}}$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur U qui sont identiquement nulles sur $X \cap U$. De même pour une sous-variété algébrique $X^{\text{alg}} \subset \mathbb{P}^{n,\text{alg}}_{\mathbb{C}}$.

Ainsi pour montrer que $X^{\text{alg}} \mapsto X^{\text{an}}$ est une bijection, il suffit de prouver qu'on a une bijection entre l'ensemble des sous-faisceaux d'idéaux $\mathcal{I}^{\text{an}}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n,\text{an}}_{\mathbb{C}}}$ et l'ensemble des sous-faisceaux d'idéaux $\mathcal{I}^{\text{alg}}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n,\text{alg}}_{\mathbb{C}}}$. On peut maintenant utiliser des techniques d'algèbre homologique dans le cadre des faisceau pour résoudre un faisceau d'idéal par des faisceaux plus élémentaires.

Remarque 6.66. — Cette bijection est simplement $\mathcal{I}^{\text{alg}} \mapsto \mathcal{I}^{\text{an}} = \mathcal{I}^{\text{alg}} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n,\text{an}}_{\mathbb{C}}}$.

***Proposition 6.67* (valable à la fois dans le cadre analytique et algébrique)**
Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ un faisceau d'idéal. Il existe une suite exacte longue de faisceaux

$$0 \to \mathcal{E}^N \to \cdots \to \mathcal{E}^1 \to \mathcal{E}^0 \to \mathcal{I} \to 0$$

où $\mathcal{E}_i$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-modules localement libres pour tout $0 \le i \le N$. Autrement dit il existe pour tout $0 \le i \le N$ un recouvrement ouvert (pour la topologie complexe ou bien Zariski) $\mathbb{P}^n = \cap U_j$, un entier r_i et un isomorphisme de faisceaux sur U_j

$$\mathcal{E}^i|_{U_j} = \mathcal{O}_{U_j}^{r_i}$$

qui soit $\mathcal{O}_{U_j}$-linéaire pour tout j.

Exemple 6.68. — Pour tout entier $d \in \mathbb{Z}$, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ des fonctions rationnelles homogènes de degré 0 sans pôle est localement libre de rang 1, aussi bien dans le cadre analytique que dans le cadre algébrique.

***Proposition 6.69* (valable à la fois dans le cadre analytique et algébrique)**
Soit $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-modules localement libre. Il existe une suite d'extensions successives (ie de suites exactes courtes de faisceaux)

$$\begin{aligned}
0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) &\to \mathcal{E} \to \mathcal{F}_1 \to 0\\
0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_2) &\to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to 0\\
&\vdots\\
0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_k) &\to \mathcal{F}_{k-1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_{k+1}) \to 0
\end{aligned}$$

avec $d_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $1 \le i \le k+1$.

Remarque 6.70. — Ainsi tout faisceau localement libre $\mathcal{E}$ se dévisse en suite d'extensions successives de faisceaux du type $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ avec $d \in \mathbb{Z}$. On peut aussi dire que $\mathcal{E}$ est muni d'une filtration de Jordan-Hölder dont les graduées sont isomorphes à des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. C'est le dévissage dont on voulait parler.

Remarque 6.71. — La preuve des propositions 6.67 et 6.69 est en fait plus facile dans le cadre algébrique (elle sera abordée dans le cours de schémas II) que dans le cadre analytique, où elle utilise les célèbres théorèmes A et B de Cartan sur les espaces de Stein.

On a ainsi successivement dévissé tout faisceau d'idéal en des faisceaux localement libres, puis en des faisceaux élémentaires du type $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Or le faiseau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ existe aussi bien du côté algébrique que du côté analytique. Pour vérifier que les faisceaux d'idéaux sont en bijection des deux côtés, il reste à voir que les extensions successives des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ sont les mêmes du côté analytique et du côté algébrique.

Lemme 6.72. — *Soit X un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{F}$ un faisceau en $\mathcal{O}_X$-modules. Notons* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ *l'ensemble des morphismes de faisceaux de $\mathcal{O}_X$ vers $\mathcal{F}$ sur X qui sont $\mathcal{O}_X$-linéaires. Alors l'application* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F})$ *qui envoie $f : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ vers $f_X(1_{\mathcal{O}_X(X)})$ est bijective.*

On peut appliquer ce lemme à des faisceaux injectifs qui résolvent un faisceau $\mathcal{F}$ en $\mathcal{O}_X$-modules sur X et on obtient donc par la grosse machine générale d'algèbre homologique le corollaire.

Corollaire 6.73. — *Soit X un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{F}$ un faisceau en $\mathcal{O}_X$-modules. Notons $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ le foncteur dérivé du foncteur $\mathcal{F}\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$. On a alors*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \;=\; H^i(X,\mathcal{F})$$

pour tout $i\geq 0$ et tout $\mathcal{F}$ en $\mathcal{O}_X$-modules.

Remarque 6.74. — De plus, toujours par des arguments généraux d'algèbre homologique, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ s'identifie aux classes d'isomorphismes d'extensions

$$0\to\mathcal{F}\to\mathcal{E}\to\mathcal{O}_X\to 0$$

dans la catégorie des faisceaux en $\mathcal{O}_X$-modules. Aussi $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ s'identifie aux classes d'isomorphismes d'extensions en deux crans

$$0\to\mathcal{F}\to\mathcal{E}\to\mathcal{E}'\to 0$$

$$0\to\mathcal{E}''\to\mathcal{E}'\to\mathcal{O}_X\to 0$$

etc pour tout $i\geq 1$.

On peut de plus remplacer $\mathcal{O}_X$ par n'importe quel faisceau $\mathcal{G}$ en $\mathcal{O}_X$-modules sur X dans le corollaire 6.73 et on obtient un isomorphisme du groupe classifiant les extensions de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$ avec le H^1 de X à valeurs dans le produit tensoriel de $\mathcal{F}$ par le dual du faisceau $\mathcal{G}$. Comme on ne veut pas rentrer dans ces histoires de produit tensoriel et de dual de faisceaux, écrivons directement le résultat pour $X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Lemme 6.75 **(valable à la fois dans le cadre analytique et algébrique)**
Soit $d_1,d_2\in\mathbb{Z}$ et $i\geq 0$. On a un isomorphisme entre $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finis

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(d_1),\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(d_2)) \;=\; H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}},,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(d_2-d-1))$$

Remarque 6.76. — Insistons sur le fait que les énoncés 6.72, 6.73 et 6.75 sont absolument formels et ne posent pas plus de difficulté que la compréhension de l'algèbre homologique et de la théorie des faisceaux.

On en déduit que les classes d'isomorphismes d'extensions successives des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(d)$, $d\in\mathbb{Z}$ sont en bijection du côté analytique et du côté algébrique si et seulement si on a l'égalité de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie pour tout $i\geq 0$ et $d\in\mathbb{Z}$

$$H^i(\mathbb{P}^{n,\mathrm{alg}}_{\mathbb{C}},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n,\mathrm{alg}}_{\mathbb{C}}}(d)) \;=\; H^i(\mathbb{P}^{n,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}}(d))$$

Or on montre cette égalité en calculant à la main ces groupes de cohomologie et en vérifiant qu'ils ont même dimension du côté algébrique et analytique ! Remarquons qu'il s'agit ici d'un calcul de cohomologie élémentaire, car autant l'espace que les faisceaux sont complètement explicites.

Cela termine notre panorama du théorème GAGA, et la justification d'un certain nombres de techniques faisceautiques et cohomologiques pour prouver des énoncés élémentaires d'apparence miraculeuse.

Remarque 6.77. — Ainsi a posteriori, une fois le théorème de Riemann-Roch prouvé, la théorie des surfaces de Riemann compactes rentre entièrement dans le cadre de la géométrie algébrique. Toutefois comme on va le voir, la démonstration du théorème de Riemann-Roch et de la dualité de Serre repose elle sur des ingrédients de nature analytique.

Remarque 6.78. — Plus précisément, tout énoncé relatif à une ou plusieurs surfaces de Riemann compactes, de morphismes entre elles, etc, peut se résoudre à l'aide de la géométrie algébrique vu l'équivalence entre courbes projectives lisses irréductibles et surfaces de Riemann compactes.

Des questions très naturelles relatives aux surfaces de Riemann compactes sortent bien sûr de ce cadre, notamment toutes celles ayant trait à l'uniformisation (REF). En effet il s'agit de prouver que le revêtement universel d'une surface de Riemann compacte de genre ≥ 2 est isomorphe au demi-plan de Poincaré, mais le revêtement universel d'une surface compacte n'est pas compact si le π_1 est infini, et de fait le demi-plan de Poincaré n'est pas algébrique.

CHAPITRE 7

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

Soit X une surface de Riemann compacte de genre g. Il existe dans la littérature un grand nombre de démonstrations du théorème de Riemann-Roch et de la dualité de Serre, qui ne se ressemblent pas entre elles, et qui utilisent diverses techniques analytiques ou algébriques selon les hypothèses faites sur X. Passons quelques unes de ces preuves en revue, avant d'expliquer ce que nous prouverons.

Une première possibilité est de supposer que X est algébrique, ie définie par l'annulation de polynômes homogènes dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Vu GAGA on peut même utiliser que $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ est formé de fractions rationnelles. Il est évident sous ces hypothèses que X admet des fonctions méromorphes non constantes, et des formes différentielles méromorphes non nulles, puisqu'on peut considérer n'importe quelle fraction rationnelle homogène de degré 0 en $X_0, \cdots, X_n$ non constante sur X. Dans ce cas, la géométrie algébrique (cf le cours de schémas II) prouve facilement que $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ sont des $\mathbb{C}$-espace vectoriels de dimension finie, et que $H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$ pour tout $i \geq 2$. Le fait que $h^0(D) - h^1(D) = 1 - g + \deg(D)$ est alors élémentaire (voir REF!!!). Il reste à prouver la dualité de Serre. Tate (REF) a trouvé une preuve très élégante qui utilise les adèles de X (tout à fait similaires aux adèles des corps de nombres vu en cours de théorie des nombres), qui repose ultimement sur le théorème des résidus. Miranda **[M]** présente essentiellement cette preuve, mais ré-écrite sans adèles ce qui a tendance à l'obscurcir (c'est un point de vue personnel).

Toutefois cette approche est contestable puisque c'est justement le théorème de Riemann-Roch et la dualité de Serre qui ont servi, en combinaison avec GAGA, à prouver que toute surface de Riemann est algébrique.

Rappelons que pour une surface de Riemann compacte quelconque, donc a priori non algébrique, il est hautement non trivial qu'il existe des fonctions méromorphes non constantes, et des formes différentielles méromorphes non nulles.

Bergeron-Guilloux **[BG]** prouvent en utilisant des techniques de géométrie riemannienne (rotationnel et divergence des champs de vecteurs) qu'il existe des formes différentielles méromorphes non nulles et non proportionnelles. De même, Farkas-Kra (REF !!!) prouvent l'existence de telles formes différentielles méromorphes en utilisant les formes harmoniques. Dans les deux cas, on en déduit qu'il existe des fonctions méromorphes non constantes en considérant ω_1/ω_2.

Quant à nous, nous allons donner une preuve dans les lignes de celle de Gunnings (REF !!!), utilisant la puissance de la cohomologie des faisceaux. Nous verrons qu'il est évident que $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ est de dimension finie. En considérant une suite exacte longue de cohomologie, on en déduira que si $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ est également de dimension finie, alors $h^0(D)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\deg(D)$ tend vers ∞. En particulier il existe des fonctions méromorphes non constantes sur X. Dans cet argument, on utilisera le faisceau gratte-ciel $\mathcal{O}_P$ pour $P \in X$, et l'acyclicité de ce faisceau résultant de son caractère flasque.

Nous montrerons que $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ est de dimension finie en utilisant l'argument de Cartan, donné dans Gunnings (REF !!). Il s'agit d'expliquer les bases de la cohomologie de Cech, qui donne un complexe explicite calculant $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ via les sections de $\mathcal{O}_X(D)$ sur des ouverts assez petits formant un recouvrement de X. On utilise alors que si X est compacte, elle admet deux recouvrement finis avec même nombre d'ouverts, le premier recouvrement étant inclus dans le second. On dispose alors d'un morphisme de restriction entre complexes de Cech pour les deux recouvrements. Ce morphisme est un opérateur compact dans le sens de la théorie des espaces de Hilbert (cela demande de remplacer les fonctions holomorphes par le sous-espace des fonctions holomorphes L^2 et utilise le théorème de Montel en analyse fonctionnelle holomorphe). Mais la restriction induit un isomorphisme en cohomologie, et on utilise qu'un opérateur compact est un isomorphisme si et seulement si l'espace est de dimension finie.

On donnera ensuite une indication de preuve de la dualité de Serre basée sur le complexe de Dolbeault, qui calcule $H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ et $H^i(X, \Omega^1_X(D))$ en termes de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ et d'un opérateur $\bar{\partial}$. Ici encore on utilise la cohomologie des faisceaux, et notamment l'acyclicité des faisceaux fins. Toutes les notions rapidement introduites ici seront expliquées plus en détail dans le cours de Géométrie complexe et de théorie de Hodge.

7.1. Premiers éléments de preuve

Soit X une surface de Riemann compacte $D \in \mathrm{Div}(X)$ et $P \in X$. On dispose alors d'une suite exacte courte de faisceaux sur X

$$0 \to \mathcal{O}_X(D - (P)) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_P \to 0$$

où on rappelle que le morphisme $\mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_P$ est l'évaluation en P des sections de $\mathcal{O}_X(D)$ si P n'est pas dans le support de D, et l'évaluation régularisée si P est dans le support de D, cette régularisation dépendant du choix d'un paramètre local en P sur X. De plus par définition $\mathcal{O}_P(U) = \mathbb{C}$ si $P \in U$ et $\mathcal{O}_P(U) = 0$ sinon. On en déduit que $\mathcal{O}_P$ est flasque

(REF) donc acyclique et donc que $H^i(X,\mathcal{O}_P)=0$ pour tout $i>0$. La suite longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceau précédente s'écrit donc
(7.1.**a**)
$0\to H^0(X,\mathcal{O}_X(D-(P)))\to H^0(X,\mathcal{O}_X(D))\to\mathbb{C}\to H^1(X,\mathcal{O}_X(D-(P)))\to H^1(X,\mathcal{O}_X(D))\to 0$

Lemme 7.2. — *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(X,\mathcal{O}_X(D))$ est de dimension finie pour tout D.*

Démonstration. — Notons $*_D$ cette assertion. Par Liouville on voit que $*_0$ est vraie. Il suffit donc de montrer que pour tout $D\in\in\mathrm{Div}(X)$ et $P\in X$, les assertions $*_D$, $*_{D-(P)}$ et $*_{D+(P)}$ sont équivalentes. En renversant le rôle de D et de $D-(P)$, on se rend compte qu'il suffit de prouver que $*_D$ et $*_{D-(P)}$ sont équivalentes. Mais cela résulte immédiatement de la suite exacte longue $0\to H^0(X,\mathcal{O}_X(D-(P)))\to H^0(X,\mathcal{O}_X(D))\to\mathbb{C}$. □

Admettons maintenant que $H^1(X,\mathcal{O}_X(D))$ est de dimension finie pour tout D. On prouvera cette assertion dans le paragraphe suivant.

Lemme 7.3. — *On a $h^0(D)-h^1(D)=h^0(\mathcal{O}_X)-h^1(\mathcal{O}_X)+\deg(D)$ pour tout $D\in\mathrm{Div}(X)$.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la suite exacte longue 7.1.**a** et du lemme 7.4. □

Lemme 7.4. — *Soit $0\to E_0\to E_1\to\cdots\to E_r\to 0$ une suite exacte longue entre $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\sum_{i=0}^r(-1)^i\dim(E_i)=0$.*

Démonstration. — Exercice ! C'est au final une conséquence du théorème du rang en algèbre linéaire. □

Corollaire 7.5. — *On a $h^0(D)\to\infty$ si $\deg(D)\to\infty$. En particulier $\mathcal{M}(X)\neq\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}(X)^{\mathrm{diff}}\neq 0$.*

Démonstration. — Puisque $h^0(D)-h^1(D)$ tend vers l'infini et que $h^1(D)$ est fini, nécessairement $h^0(D)$ tend vers l'infini. □

7.6. Finitude de la cohomologie

Il nous reste à prouver que $H^1(X,\mathcal{O}_X(D))$ est de dimension finie pour tout D. On va exposer un argument dû à Cartan, qui d'ailleurs reprouvera aussi la finitude de $H^0(X,\mathcal{O}_X(D))$. Pour cela, nous devons au préalable développer des notions de cohomologie de Cech.

7.6.1. Cohomologie de Cech. — Soit X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau en groupes abéliens sur X et $X = \cup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert (on ne demande pas qu'il soit fini). Pour tous $i, j \in I$ on pose $U_{i,j} = U_i \cap U_j$, et de même pour $U_{i,j,k}$ etc. Plus synthétiquement, pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$ on note $U_J = \cap_{j \in J} U_j$. Lorsque $K \subset J$ on a l'inclusion entre ouverts $U_J \subset U_K$. On a alors la restriction $\mathrm{res}_{K,J} : \mathcal{F}(U_K) \to \mathcal{F}(U_J)$.

Notons alors $\check{C}^0(X, U_\bullet, \mathcal{F}) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$, puis $\check{C}^1(X, U_\bullet, \mathcal{F}) = \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_{i,j})$ et $\check{C}^2(X, U_\bullet, \mathcal{F}) = \prod_{i,j,k \in I} \mathcal{F}(U_{i,j,k})$. Enfin pour tout $r \geq 0$ on pose $\check{C}^r(X, U_\bullet, \mathcal{F}) = \prod_{J \in I} \mathcal{F}(U_J)$ où on effectue le produit sur les sous-ensembles $J \subset I$ de cardinal $r + 1$.

On définit ensuite une différentielle $d^r : \check{C}^r(X, U_\bullet, \mathcal{F}) \to \check{C}^{r+1}(X, U_\bullet, \mathcal{F})$ de la manière suivante : lorsque $r = 0$, l'application $d^0 : \prod_i \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{i,j})$ envoie la famille $(f_i)_i$ sur la famille $(\mathrm{res}_{U_i, U_{ij}}(f_i) - \mathrm{res}_{U_i, U_{ij}}(f_j))_{i,j}$. Lorsque $r = 1$, $d^1 : \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{i,j}) \to \prod_{i,j,k} \mathcal{F}(U_{i,j,k})$ envoie la famille $(f_{i,j})_{i,j}$ sur la famille $(\mathrm{res}_{U_{ij}, U_{ijk}}(f_{ij}) + \mathrm{res}_{U_{jk}, U_{ijk}}(f_{jk}) - \mathrm{res}_{U_{ik}, U_{ijk}}(f_{ik})_{jk})_{i,j,k}$. Dans le cas général le lecteur consultera `https://stacks.math.columbia.edu/tag/03AK` pour la convention de signes. On vérifie que $d^{r+1} \circ d^r = 0$ pour tout r.

Exemple 7.7. — Ainsi $\mathrm{Ker}(d^0)$ est formé des familles de sections $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telle que f_i et f_j coïncident sur U_{ij} pour tous i, j. D'après la propriété de faisceau, on voit que $\mathrm{Ker}(d^0) = \mathcal{F}(X) = H^0(X, \mathcal{F})$ qui est en particulier indépendant du choix du recouvrement U_i.

Aussi $\mathrm{Ker}(d^1)$ est formé des familles de sections $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ vérifiant la règle de Chasles ($f_{ij} + f_{jk}$ coïncide avec f_{ik} sur U_{ijk}), et $\mathrm{Im}(d^0)$ est formé des familles de sections $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ de la forme $f_{ij} = g_i - g_j$ où $g_i \in \mathcal{F}(U_i)$ pour tout $i \in I$. Comme $(g_i - g_j) + (g_j - g_k) = g_i - g_k$ il est clair que $d^1 \circ d^0 = 0$.

Définition 7.8. — La cohomologie de Čech de X relativement au faisceau $\mathcal{F}$ et au recouvrement $X = \cup_i U_i$ est la cohomologie du complexe $(\check{C}^\bullet(X, U_\bullet, \mathcal{F}), d^\bullet)$. On la note

$$\check{H}^i_{U_\bullet}(X, \mathcal{F}) \ = \ \mathrm{Ker}(d_i)/\mathrm{Im}(d_{i-1})$$

Exemple 7.9. — On a donc $\check{H}^0_{U_\bullet}(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$. Aussi $\check{H}^1_{U_\bullet}(X, \mathcal{F})$ est l'ensemble des $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ vérifiant la relation de Chasles $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$, modulo les f_{ij} de la forme $f_{ij} = g_i - g_j$ où $g_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Dans tous les cas la cohomologie de Cech est extrêmement concrète, avec un contenu combinatoire assez limpide. Le lecteur intéressé par l'algèbre simpliciale pourra d'ailleurs construire un complexe de groupes abéliens simpliciaux qui via l'équivalence de Dold-Kan correspond au complexe de Cech ; cela permet de comprendre la définition compliquée du bord d_i.

Le problème essentiel de notre version actuelle de la cohomologie de Cech est sa dépendance en le choix du recouvrement $U_\bullet$, alors que $H^i(X, \mathcal{F})$ est indépendant de tout choix. On note que néanmoins $\check{H}^0_{U_\bullet}(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$ est indépendant du choix.

Définition 7.10. — Soit $(V_j)_{j\in J}$ un sous-recouvrement de $(U_i)_{i\in I}$, ce par quoi on veut dire que pour tout $j \in J$, il existe $i_j \in I$ tel que $V_j \subset U_{i_j}$. On note alors

$$\check{H}^i(X, \mathcal{F}) \;=\; \mathrm{colim}_{U_\bullet} \check{H}^i_{U_\bullet}(X, \mathcal{F})$$

où la limite inductive (ie colimite) est prise sur l'ensemble des recouvrements ouverts de X pour la relation d'ordre partielle induite par le raffinement. On appelle $\check{H}^i(X, \mathcal{F})$ le i-ème groupe de cohomologie de Cech de X à valeurs dans le faisceau $\mathcal{F}$.

La proposition suivante est prouvée par Godemont dans Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Elle demande que X est un espace topologique séparable (ie il existe un sous-ensemble dénombrable dense, et on ne confondra pas séparable et séparé...) ou plus généralement paracompact (ie tout recouvrement ouvert a un raffinement localement fini). Les surfaces de Riemann vérifient ces hypothèses.

Proposition 7.11. — *On a un isomorphisme canonique $H^i(X, \mathcal{F}) = \check{H}^i(X, \mathcal{F})$.*

Cela fournit une interprétation très concrète de la cohomologie des faisceaux, au prix de devoir considérer tous les recouvrements possibles dans la cohomologie de Cech.

Néanmoins, pour être vraiment explicite, il est utile de trouver des hypothèses sur le couple $(U_\bullet, \mathcal{F})$ qui garantissent directement que $H^i(X, \mathcal{F}) = \check{H}^i_{U_\bullet}(X, \mathcal{F})$

Proposition 7.12. — *Supposons que X est une surface de Riemann et que U_i est isomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{C}$ pour tout $i \in I$, et que $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(D)$. Alors $H^i(X, \mathcal{F}) = \check{H}^i_{U_\bullet}(X, \mathcal{F})$ pour tout $i \geq 0$.*

Démonstration. — Si $i = 0$ c'est clair. Si $i = 1$, voir GODEMENT OU STACK PROJECT REF A TROUVER. Si $i \geq 2$, on montrera directement que les deux termes s'annulent.

On pourait donner une preuve uniforme de cette proposition, qui marcherait dans le cadre plux général où X est une variété complexe, en utilisant la théorie des espaces de Stein et le fait qu'ils n'ont pas de cohomologie cohérente. Comme cela requiert de nombreux prérequis, on ne s'aventurera pas dans cette histoire. □

7.12.1. Raffinement et finitude. — Soit X une surface de Riemann compacte. On va prouver que $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ est de dimension finie en l'interprétant comme de la cohomologie de Cech par la proposition 7.12. L'astuce sera de jouer avec deux recouvrements à la fois.

Lemme 7.13. — *Soit X une surface de Riemann compacte. Il existe un entier n et deux recouvrements $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n = V_1 \cup \cdots V_n$ tels que $\bar{V}_i \subset U_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ici $\bar{V}_i$ désigne l'adhérence de V_i dans X. De plus on peut supposer que U_i et V_i sont isomorphes à des boules ouvertes de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — Pour tout $x \in X$, on choisit une carte ϕ_x de X centrée en x. On note alors $V_x = \phi_x^{-1}(B(0,r))$ et $U_x = \phi_x^{-1}(B(0,R))$ avec $r < R$ quelconque. On a alors $X = \cup_{x \in X} V_x$ et on extrait un sous-recouvrement fini par compacité. □

Remarque 7.14. — Tout le point du lemme 7.13 est que les deux recouvrements ont même nombre d'ouvert, et c'est bien sûr pour obtenir cela que la compacité de X est cruciale.

On fixe désormais deux tels recouvrements comme dans le lemme 7.13.On peut alors calculer la cohomologie de X à l'aide de ces deux recouvrements. D'après la proposition 7.12 l'application de restriction de U_i à V_i (et de même pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, \cdots, n\}$ et la restriction de U_I à V_I) fournit un morphisme de complexe

$$\mathrm{res} \; : \; \check{C}^\bullet(X, U_\bullet, \mathcal{F}) \to \check{C}^\bullet(X, V_\bullet, \mathcal{F})$$

qui induit un isomorphisme sur les groupes de cohomologie (ie le morphisme de complexe res est un quasi-isomorphisme). On va prouver la finitude de $H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$, $i = 0, 1$, en vérifiant que *res* est un opérateur compact puis en prouvant qu'un opérateur compact est un isomorphisme si et seulement si l'espace vectoriel sous-jacent est de dimension finie. Mais cela n'est que l'idée de l'argument, et pour le formaliser techniquement on aura besoin de remplacer l'espace vectoriel $H^0(U_i, O_X(D)$ de fonctions méromorphes par un espace de Hilbert. On va donc introduire quelques outils d'analyse fonctionnelle holomorphe.

7.14.1. Fonctions holomorphes L^2 et opérateur compact.

— Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On note $H^0_{(2)}(U, \mathcal{O}_U) \subset H^0(U, \mathcal{O}_U)$ le sous-espace des fonctions holomorphes qui sont L^2 pour $dx \wedge dy$. On montrera comme exercice d'analyse complexe que $H^0_{(2)}(U, \mathcal{O}_U)$ est complet pour la norme L^2, donc est un espace de Hilbert.

***Théorème 7.15* (Montel,Vitali).** — *si $V \subset \bar{V} \subset U$ est un ouvert tel que $\bar{V}$ soit compact, alors l'application de restriction $H^0_{(2)}(U, \mathcal{O}_U) \to H^0_{(2)}(V, \mathcal{O}_V)$ est un opérateur compact entre espaces de Hilbert, c'est à dire envoie toute suite L^2-bornée vers une suite ayant une valeur d'adhérence.*

Démonstration. — Donnant la preuve pour culture mathématique. Le théorème de Montel garantit que si $f_n \in H^0(V, \mathcal{O}_V)$ est bornée pour la norme sup sur tout compact (ie pour tout $K \subset V$ compact, il existe $M > 0$ tel que $\sup_K |f_n| \leq M$) alors il existe une sous-suite convergeant pour la norme sup sur tout compact de V. Pour tout $x \in U$, soit $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset U$. La formule de Cauchy implique que

$$|f_n(x)| \;\leq\; \frac{1}{r_x \sqrt{\pi}} ||f_n||_{L^2(U)}$$

et comme $\bar{V} \subset U$ est compact, on peut supposer $r_x = r$ est indépendant de $x \in \bar{V}$. 0n en déduit que la norme sup de f_n sur $\bar{V}$ est majorée par une constante fois la norme L^2 de f_n sur U. Donc si f_n est une suite $L^2(U)$-bornée, elle est bornée pour la norme sup sur $\bar{V}$. Le théorème de Montel garantit alors que la restriction de f_n à V admet une valeur d'adhérence pour la norme sup, et on en déduit par une majoration évidente que f_n a également une valeur d'adhérence pour $L^2(V)$. □

Remarque 7.16. — Le théorème de Montel qu'on a utilisé dans la démonstration dit donc que $H^0(V, \mathcal{O}_V)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact se comporte comme un espace vectoriel de dimension finie (ie sa boule fermée est compacte). C'est bien sûr possible seulemement car la topologie de la convergence uniforme n'est pas induite par une métrique (en effet le théorème de Riesz garantit que tout espace métrique ayant sa boule fermée compacte est de dimension finie).

Revenons au cas d'une surface de Riemann compacte X et de ses deux recouvrements avec n ouverts fournis par le lemme 7.13. On pose $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(D)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, comme $\bar{V}_i \subset U_i$ est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$, le théorème 7.15 garantit que la restriction $H^0_{(2)}(U_i, \mathcal{O}_X) \to H^0_{(2)}(V_i, \mathcal{O}_X)$ est un opérateur compact, et de même pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, \cdots, n\}$. Ainsi le morphisme de complexe

$$\text{res} : \check{C}^\bullet_{(2)}(X, U_\bullet, \mathcal{F}) \to \check{C}^\bullet_{(2)}(X, V_\bullet, \mathcal{F})$$

est un opérateur compact entre complexes d'espaces de Hilbert. Ici $\check{C}^\bullet_{(2)}(X, U_\bullet, \mathcal{F})$ désigne l'analogue du complexe de Cech, mais où les espaces de fonctions holomorphes sont remplacés par leurs sous-espaces de fonctions holomorphes L^2. Il nous faut donc maintenant relier la cohomologie du complexe $\check{C}^\bullet(X, U_\bullet, \mathcal{F})$ (qui est égale à $H^i(X, \mathcal{F})$ par la proposition 7.12) à celle du sous-complexe $\check{C}^\bullet_{(2)}(X, U_\bullet, \mathcal{F})$, et de même pour le recouvrement $V_\bullet$.

Proposition 7.17. — *L'inclusion de complexes $\check{C}^\bullet_{(2)}(X, U_\bullet, \mathcal{F}) \subset \check{C}^\bullet(X, U_\bullet, \mathcal{F})$ induit un isomorphisme entre la cohomologie de ces deux complexes.*

Démonstration. — C'est le lemme 8 du chapitre 4 de [**G**]. Donnant la problématique de la preuve si on veut vérifier que l'application sur le H^1 est un isomorphisme, il s'agit de prouver que pour toute collection de fonctions holomorphes f_{ij} sur U_{ij} vérifiant la règle de Chasles $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$, il existe une famille de fonctions holomorphes g_i sur U_i tels que $f_{ij} + g_i - g_j$ est L^2 sur U_{ij}. □

Proposition 7.18. — *Soit X une surface de Riemann compacte et D un diviseur de X. Pour $i = 0, 1$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ est de dimension finie.*

Démonstration. — Lorsque $i = 0$, cet énoncé a déjà été prouvé dans la proposition 7.2. Donnons néanmoins une nouvelle preuve qui s'adaptera au cas $i = 1$. On fixe des recouvrements fournis par le lemme 7.13. On a donc une application

$$res^i : \hat{C}^i_{(2)}(X, U_\bullet, \mathcal{O}_X(D)) \to \hat{C}^i_{(2)}(X, V_\bullet, \mathcal{O}_X(D))$$

pour $i = 0, 1$. On a aussi une application de bord

$$\delta^i_U : \hat{C}^i_{(2)}(X, U_\bullet, \mathcal{O}_X(D)) \to \hat{C}^{i+1}_{(2)}(X, U_\bullet, \mathcal{O}_X(D))$$

pour $i = 0, 1$, et de même pour δ^i_V. Comme $(res^i)_i$ est un morphisme de complexe, on a $res^1 \circ \delta^0_U = \delta^0_V \circ res^0$ donc on obtient $res^0 : \mathrm{Ker}(\delta^0_U) \to \mathrm{Ker}(\delta^0_V)$ qui est un isomorphisme par les propositions 7.12 et 7.18 (en effet par ces propositions $\mathrm{Ker}(\delta^0_U)$ et $\mathrm{Ker}(\delta^0_V)$ s'identifient à $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ et res^0 devient l'identité après ces identifications). Or δ^0_U est une application continue entre espaces de Hilbert donc $\mathrm{Ker}(\delta^0_U)$ est un espace de Hilbert, et idem pour $\mathrm{Ker}(\delta^0_V)$. Donc $res^0 : \mathrm{Ker}(\delta^0_U) \to \mathrm{Ker}(\delta^0_V)$ est une application continue bijective entre espaces de Hilbert, donc un isomorphisme d'espaces de Hilbert par le théorème de l'application ouverte. Mais elle est de plus compacte par le théorème 7.15, puisque c'est déjà le cas de

$$res^0 : \hat{C}^0_{(2)}(X, U_\bullet, \mathcal{O}_X(D)) \to \hat{C}^0_{(2)}(X, V_\bullet, \mathcal{O}_X(D))$$

Or il résulte aisément de la définition et du théorème de Riesz (la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si on est en dimension finie) qu'un isomorphisme compact entre espaces de Hilbert n'existe qu'un dimension finie.

Lorsque $i = 1$ la même idée de preuve va marcher, mais on devra tenir compte du fait qu'il n'est pas évident que $\mathrm{Im}(\delta^0_U) \subset \hat{C}^0_{(2)}(X, U_\bullet, \mathcal{O}_X(D))$ est un sous-espace de Hilbert. On considère l'application

$$(\delta^0_V, res^1) : \hat{C}^0_{(2)}(X, V_\bullet, \mathcal{O}_X(D)) \times \mathrm{Ker}(\delta^1_U) \to \mathrm{Ker}(\delta^1_V)$$

continue entre espaces de Hilbert. Elle est surjective par les propositions 7.12 et 7.17, qui garantissent que l'application induite par la restriction $\mathrm{Ker}(\delta^1_U)/\mathrm{Im}(\delta^0_U) \to \mathrm{Ker}(\delta^1_V)/\mathrm{Im}(\delta^0_V)$ est bijective. On applique alors le lemme suivant à $\phi = (\delta^0_V, res^1)$ et $\psi = (0, res^1)$ et on obtient que le conoyau de $\psi - \phi = (\delta^0_V, 0)$ est de dimension finie, donc que $H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) = \mathrm{Ker}(\delta^1_V)/\mathrm{Im}(\delta^0_V)$ est de dimension finie. □

Lemme 7.19. — *Soit $\phi, \psi : V \to W$ deux applications continues entre espaces de Hilbert avec ϕ surjective et ψ compact. Alors $\psi - \phi$ est d'image fermée de codimension finie dans W.*

Démonstration. — Exercice ou voir [**G**, lem 4.9]. □

Remarque 7.20. — L'espace vectoriel $H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ reste de dimension finie pour tout $i \geq 0$, car on prouvera directement dans le chapitre suivant qu'il est nul pour $i \geq 2$.

7.21. Dualité de Serre et cohomologie de Dolbeaut

BIBLIOGRAPHIE

[BG] N. Bergeron et A. Guilloux, Introduction aux surfaces de Riemann, https://webusers.imj-prg.fr/~nicolas.bergeron/Enseignement_files/SurfaceDeRiemann.pdf

[G] Lectures on Riemann Surfaces, Princeton University Press.

[M] R. Miranda, Algebraic curves and Riemann surfaces, Graduates studies in mathematics vol.5, http://www.math.caltech.edu/~2014-15/2term/ma130b/files/AlgCurv-RS-Miranda.pdf