1 Projektive Moduln und Algebren

Satz 1.1 (Projektiv ist lokal frei). *Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

(i) M ist endlich erzeugter projektiver A-Modul.

(ii) Es existieren Elemente $\{f_i\}_{i\in I}$ von A mit $\sum_{i\in I}(f_i) = A$, sodass M_{f_i} freier, endlich erzeugter A_{f_i} Modul ist.

Proof. Siehe Theorem 4.6 in [?]. □

Satz 1.2. *Sei B endliche, projektive A-Algebra. Dann gilt*

(a) $A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn $[B : A] \geq 1$.

(b) $A \to B$ ist genau dann surjektiv, wenn $[B : A] \leq 1$.

(c) $A \to B$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $[B : A] = 1$.

Satz 1.3. *Sei B eine A-Algebra und C eine treuflache A-Algebra, sodass $B \otimes_A C$ projektive, separable C-Algebra ist. Dann ist B projektive, separable A-Algebra.*

Proof. Vortrag 8. Theorem 4.14 in [?]. □

2 Endlich étale Morphismen

Definition 2.1 (Affiner Morphismus). Sei $f\colon Y \to X$ ein Morphismus von Schemata. f ist *affin*, wenn eine offene affine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von X existiert, sodass $f^{-1}(U_i)$ affin ist für alle $i \in I$

Bemerkung 2.2. $f\colon Y \to X$ ist genau dann affin, wenn für jede offene affine Menge $U \subseteq X$, $f^{-1}(U)$ affin ist.

Definition 2.3. Sei $f\colon Y \to X$ ein affiner Morphismus von Schemata. f ist *endlich und lokal frei*, wenn eine offene affine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ existiert mit $U_i = \mathrm{Spec}\ A_i$, sodass $f^{-1}(U_i) = \mathrm{Spec}\ B_i$, wobei B_i eine endliche und freie A_i-Algebra ist.

Lemma 2.4. *Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Dann ist $f(S)$ ein multiplikatives System von B und*

$$S^{-1}B \simeq f(S)^{-1}B$$

als $S^{-1}A$-Algebren.

Proof. Die Formel $\frac{b}{s} \mapsto \frac{b}{f(s)}$ induziert den Isomorphismus. □

Lemma 2.5. *Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\varphi\colon$ Spec $B \to$ Spec A der induzierte Morphismus affiner Schemata. Sei $g \in A$. Dann ist*

$$\varphi^{-1}(D(g)) = D(f(g)).$$

Insbesondere gilt

$$\varphi^{-1}(\mathit{Spec}\ A_g) = \mathit{Spec}\ B_g.$$

Proof. Die erste Gleichung ist aus Algebra 2 bekannt und gilt allgemeiner für Morphismen lokal geringter Räume. Die zweite Gleichung folgt aus der Ersten, wenn der Isomorphismus $D(g) = \operatorname{Spec} A_g$ eingesetzt wird, unter Verwendung des Ringisomorphismus

$$B_g = B \otimes_A A_g \simeq B_{f(g)}.$$

□

Satz 2.6. *Sei $f\colon Y \to X$ ein Morphismus von Schemata. Dann ist f genau dann endlich und lokal frei, wenn für jede offene affine Menge $U = \operatorname{Spec} A$ von X, $f^{-1}(U)$ affin mit $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$ und B eine endliche, projektive A-Algebra ist.*

Proof. ($\Rightarrow$) Sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ offen, $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} B_i$ und B_i endliche freie A_i-Algebra. Nun sei $g \in A_i$ beliebig. Mit 2.5 ist $f^{-1}((A_i)_g) = \operatorname{Spec} (B_i)_g$ und da Lokalisieren Freiheit und Rang von Moduln erhält, ist $(B_i)_g$ endliche freie $(A_i)_g$-Algebra. Da die Mengen der Form $D(g) = \operatorname{Spec} (A_i)_g$ mit $g \in A_i$ eine Basis von $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ bilden, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\{U_i\}_{i\in I}$ bereits eine Basis von X ist, insbesondere existiert ein $J \subseteq I$, sodass $U = \bigcup_{j\in J} U_j$.

Ebenfalls ist $\{D(g)\}_{g\in A}$ eine Basis von U, also existiert für alle $j \in J$ eine Familie $\{g_{jk}\}_{k\in K_j}$, sodass $U_j = \bigcup_{k\in K_j} D(g_{jk})$. Außerdem ist $D(g_{jk}) \subseteq U_j$ also

$$\operatorname{Spec} A_{g_{jk}} = D(g_{jk}) = D(g_{jk}) \cap U_j = \operatorname{Spec} (A_j)_{g_{jk}}.$$

Damit folgt $f^{-1}(\operatorname{Spec} A_{g_{jk}}) = \operatorname{Spec} B_{g_{jk}}$ mit $B_{g_{jk}}$ endliche freie $A_{g_{jk}}$-Algebra. Außerdem ist $U = \bigcup D(g_{jk})$, also $\sum (g_{jk}) = A$. Also folgt mit 1.1, dass B eine endliche, projektive A-Algebra ist.

($\Leftarrow$) Sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ offen. Dann ist $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} B_i$ mit einer endlichen, projektiven A_i-Algebra B_i. Nach 1.1 existieren $\{g_{ij}\}_{j\in J_i} \subseteq A_i$, sodass $\sum_{j\in J_i} (g_{ij}) = A_i$ und $(B_i)_{g_{ij}}$ endliche, freie $(A_i)_{g_{ij}}$-Algebra. Es folgt

$$U_i = \bigcup_{j\in J_i} D(f_{ij}) = \bigcup_{j\in J_i} \operatorname{Spec} (A_i)_{g_{ij}}.$$

Da die $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von X sind, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.7 (Grad)**.** Sei $f\colon Y \to X$ ein endlicher, lokal freier Morphismus von Schemata und $U = \operatorname{Spec} A$ offen in X mit $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$. Nach 4.9 existiert eine stetige Funktion

$$[B : A]\colon U = \operatorname{Spec} A \to \mathbb{Z}, \mathfrak{p} \mapsto \operatorname{rang}_{A_\mathfrak{p}} B_\mathfrak{p}.$$

Sei $U' = \operatorname{Spec} A'$ offen in X mit $f^{-1}(U') = \operatorname{Spec} B'$. Dann stimmen $[B' : A']$ und $[B : A]$ auf $U \cap U'$ überein, d.h. wir erhalten eine Funktion

$$\deg(f) = [Y : X]\colon \operatorname{sp}(X) \to \mathbb{Z},$$

wobei $\operatorname{sp}(X)$ den unterliegenden topologischen Raum von X bezeichne.

Proof. Sei zunächst $U \subseteq U'$ und $x \in U$. Da $\{D(g)\}_{g\in A'}$ eine Basis von U' ist, existiert ein $g \in A'$, sodass $x \in D(g) \subseteq U$. Dann ist

$$\operatorname{Spec} A'_g = D(g) = D(g) \cap U = \operatorname{Spec} A_{g_{|U}}.$$

Also folgt

$$[B' : A'](x) = [B'_g : A'_g](x) = [B_{g_{|U}} : A_{g_{|U}}](x) = [B : A](x).$$

Im Allgemeinen sei $x \in U \cap U'$. Dann existiert eine offene affine Menge $x \in V \subseteq U \cap U'$ und wir können zweimal den Spezialfall für $V \subseteq U$ und $V \subseteq U'$ anwenden. □

Lemma 2.8. *Sei $f\colon Y \to X$ endlich und lokal frei. Dann ist $[Y : X]$ lokalkonstant, das heißt eine stetige Abbildung $\mathrm{sp}(X) \to \mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z}$ die diskrete Topologie trägt. Insbesondere ist die Menge*

$$\{x \in \mathrm{sp}(X) \mid [Y : X](x) = n\}$$

offen und abgeschlossen in X und $[Y : X]$ ist konstant, falls X zusammenhängend ist.

Proof. Lokalisieren ist exakt, erhält also den Rang von freien Moduln und X ist lokal frei. □

Definition 2.9 (Surjektive Morphismen)**.** Ein Morphismus $Y \to X$ von Schemata heißt *surjektiv*, falls die zugrundeliegende Abbildung zwischen den topologischen Räumen surjektiv ist.

Satz 2.10. *Sei $f\colon Y \to X$ endlich und lokal frei. Dann gilt*

(a) $Y = \emptyset \iff [Y : X] = 0$.

(b) $Y \to X$ Isomorphismus $\iff [Y : X] = 1$.

(c) $Y \to X$ surjektiv $\iff [Y : X] \geq 1 \iff$ für alle offenen affinen Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A$ von X ist $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$, wobei B eine treuprojektive A-Algebra ist.

Proof. Alle Eigenschaften sind lokal auf X, das heißt oE sei $X = \operatorname{Spec} A$ affin. Da f affin ist, folgt $Y = \operatorname{Spec} B$, wobei B endliche und projektive A-Algebra ist.

(a) $Y = \emptyset \iff B = 0 \iff B_{\mathfrak{p}} = 0\ \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \iff \operatorname{rang}_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{p}} = 0\ \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \iff [B : A] = 0$.

(b) Das ist 1.2(c).

(c) Die zweite Äquivalenz gilt nach Definition von treuprojektiv. Für die erste: Sei $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ surjektiv und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit Urbild $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$. Also ist $B \neq 0$ und damit $B_{\mathfrak{q}} \neq 0$. Sei $\varphi\colon A \to B$ der induzierte Ringhomomorphismus, $S = \varphi(A \setminus \mathfrak{p})$ und $T = B \setminus \mathfrak{q}$. Wegen $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, folgt $S \subseteq T$. Und damit

$$B_{\mathfrak{q}} = T^{-1}B \simeq (S^{-1}T)^{-1}(S^{-1}B) = (S^{-1}T)^{-1}B_{\mathfrak{p}},$$

also ist $B_{\mathfrak{q}}$ eine Lokalisierung von $B_{\mathfrak{p}}$. Also folgt auch $B_{\mathfrak{p}} \neq 0$, also $[B : A](\mathfrak{p}) > 0$. Rückrichtung: Mit 1.2(a) ist $A \to B$ injektiv und weil B endliche A-Algebra, ist B ganze Ringerweiterung von A, also folgt die Aussage aus [?] Theorem 5.10.

□

Definition 2.11 (Endlich étaler Morphismus)**.** Sei $f\colon Y \to X$ ein affiner Morphismus von Schemata. f ist *endlich étale*, falls eine offene affine Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ existiert mit $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, sodass $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} B_i$, wobei B_i eine freie, separable A_i-Algebra ist.

Bemerkung 2.12. Jeder endlich étale Morphismus ist endlich und lokal frei, denn separable Algebren sind per Definition endlich.

Lemma 2.13. *Sei M endlich präsentierter A-Modul, das heißt es existiere eine exakte Folge*

$$A^m \to A^n \to M \to 0.$$

Sei weiter C eine A-Algebra. Dann ist der natürliche A-Modulhomomorphismus

$$\operatorname{Hom}_A(M, A) \otimes_A C \to \operatorname{Hom}_C(M \otimes_A C, C)$$

ein Isomorphismus.

Proof. Da Tensorieren rechtsexakt ist und $\mathrm{Hom}_C(-, C)$ linksexakt, erhalten wir durch anwenden in dieser Reihenfolge auf die exakte Folge $A^m \to A^n \to M \to 0$, die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(M \otimes_A C, C) \to C^n \to C^m.$$

Andererseits liefert zunächst anwenden von $\mathrm{Hom}_A(-, A)$ die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, A) \to A^n \to A^m.$$

Tensorieren mit C liefert die exakte Folge

$$\underbrace{\mathrm{Tor}_1^A(A^m, C)}_{=0} \to \mathrm{Hom}_A(M, A) \otimes_A C \to C^n \to C^m.$$

Der linke Term verschwindet, weil A^m flach ist. Untereinanderschreiben der beiden Folgen mit den natürlichen Homomorphismen und Auffüllen mit 0 nach links liefert ein kommutatives Diagramm und mit dem 5-er Lemma die Behauptung. □

Bemerkung 2.14. 2.13 wendet sich insbesondere dann an, wenn M endlich erzeugter projektiver Modul ist.

Korollar 2.15. *Sei B endliche, projektive A-Algebra und $S \subset A$ ein multiplikatives System. Dann ist der natürliche A-Modulhomomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_A(B, A) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}B, S^{-1}A)$$

ein Isomorphismus.

Korollar 2.16. *Ein Morphismus von Schemata $f\colon Y \to X$ ist genau dann endlich étale, wenn eine Basis von offenen affinen Mengen $\{U_i\}_{i\in I}$ von X existiert, sodass $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ und $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} B_i$, wobei B_i freie, separable A_i-Algebra ist.*

Proof. Die Rückrichtung ist klar. Für die Hinrichtung beachte, dass eine endliche, projektive A-Algebra B genau dann separabel ist, wenn der von der Spur induzierte A-Modulhomomorphismus $B \to \mathrm{Hom}_A(B, A)$ ein Isomorphismus ist. Diese Eigenschaft bleibt nach 2.15 durch Lokalisieren erhalten. □

Lemma 2.17. *Sei B eine endliche, projektive A-Algebra und $\phi\colon B \to \mathrm{Hom}_A(B, A)$ die von der Spur induzierte Abbildung. Dann ist B genau dann separabel über A, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:*

(i) ϕ ist ein Isomorphismus.

(ii) Die induzierte Abbildung $B_{\mathfrak p} \to \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak p}}(B_{\mathfrak p}, A_{\mathfrak p})$ ist ein Isomorphismus für alle $\mathfrak p \in \operatorname{Spec} A$.

Proof. Isomorphismus zu sein ist eine lokale Eigenschaft und B ist endlich erzeugter, projektiver A-Modul, das heißt insbesondere endlich präsentiert, also folgt die Behauptung mit 2.15. □

Satz 2.18. *Sei $f\colon Y \to X$ ein Morphismus von Schemata. Dann ist f genau dann endlich étale, wenn für jede offene affine Teilmenge $U = \operatorname{Spec} A$ von X, $f^{-1}(U)$ affin mit $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$ und B eine projektive, separable A-Algebra ist.*

Proof. ($\Rightarrow$) Sei $U = \operatorname{Spec} A$ offen in X und sei $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$. Dann ist B nach 2.6 endliche, projektive A-Algebra. Sei $\mathfrak p \in \operatorname{Spec} A$ und $x \in U$ der zugehörige Punkt. Dann ist $A_{\mathfrak p} = \mathcal{O}_{U,x} = \mathcal{O}_{V,x}$ für jede offene Menge $x \in V \subseteq U$. Nach 2.16 existiert $x \in V \subseteq U$ offen affin mit $V = \operatorname{Spec} A'$ und $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec} B'$, wobei B' freie, separable A'-Algebra. Dann ist nach 2.15 $B'_{\mathfrak p} \to \mathrm{Hom}_{A'_{\mathfrak p}}(B'_{\mathfrak p}, A'_{\mathfrak p})$ ein Isomorphismus, also auch $B_{\mathfrak p} \to \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak p}}(B_{\mathfrak p}, A_{\mathfrak p})$. Also nach 2.17 ist B separable A-Algebra.

($\Leftarrow$) Da endlich étale eine auf X lokale Eigenschaft ist, sei oE $X = \operatorname{Spec} A$. Dann ist $Y = f^{-1}(X) = \operatorname{Spec} B$ mit B projektive, separable A-Algebra. Nach 1.1 existieren $\{f_i\}_{i\in I}$, sodass $\sum_{i\in I}(f_i) = A$ und B_{f_i} endliche, freie A_{f_i}-Algebra. Da Lokalisieren Separabilität erhält, ist B_{f_i} auch separabel über A_{f_i} und es folgt die Behauptung wegen $X = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$. □

Satz 2.19 (Basiswechsel). *Sei $f\colon Y \to X$ endlich étale und $g\colon W \to X$ ein Morphismus von Schemata. Dann ist $Y \times_X W \to W$ endlich étale.*

Proof. Endlich étale ist eine lokale Eigenschaft auf W und damit insbesondere auf X. Genauer: Sei $w \in W$ beliebig. Dann existiert eine offene affine Menge $g(w) \in U \subseteq X$ und offene affine Mengen $U_i \subseteq W$, sodass $g^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$. Da $w \in g^{-1}(U)$ existiert ein $i_0 \in I$, sodass $w \in U_{i_0}$. Durch Ersetzen von W durch U_{i_0} und X durch U können wir also oE annehmen, dass $W = \operatorname{Spec} C$ und $X = \operatorname{Spec} A$. Da f affin, ist damit auch $Y = f^{-1}(X) = \operatorname{Spec} B$ affin. Dann ist $Y \times_X W = \operatorname{Spec} B \otimes_A C$.

Es bleibt also folgende Aussage zu zeigen: Sei B projektive, separable A-Algebra und C eine A-Algebra. Dann ist $B \otimes_A C$ projektive, separable C-Algebra.

Zunächst ist $B \otimes_A C$ projektiv, denn da B endlich erzeugter, projektiver A-Modul ist, existiert ein A-Modul Q, sodass $A^n \simeq B \oplus Q$ als A-Moduln für ein $n \geq 0$. Da der natürliche Isomorphismus $A^n \otimes_A C \to C^n$ auch C-linear ist, folgt durch Tensorieren mit C

$$C^n \simeq A^n \otimes_A C \simeq (B \oplus Q) \otimes_A C = (B \otimes_A C) \oplus (Q \otimes_A C).$$

Also ist $B \otimes_A C$ projektiver C-Modul.

Für die Separabilität ist zu zeigen, dass der von der Spurabbildung induzierte Homomorphismus $B \otimes_A C \to \operatorname{Hom}_C(B \otimes_A C, C)$ ein Isomorphismus ist. Das folgt aus 2.13 und dem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A C \arrow[r] & \operatorname{Hom}_C(B \otimes_A C, C) \\ B \otimes_A C \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\sim"'] & \operatorname{Hom}_A(B, A) \otimes_A C \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd}.$$

□

Satz 2.20. *Sei $f\colon Y \to X$ affiner Morphismus von Schemata und $g\colon W \to X$ ein surjektiver, endlicher und lokal freier Morphismus. Dann ist $Y \to X$ genau dann endlich étale, wenn $Y \times_X W \to W$ endlich étale ist.*

Proof. Die Hinrichtung gilt für beliebige Basiswechsel nach 2.19. Zur Rückrichtung: Sei $U \subseteq X$ affin und $U = \operatorname{Spec} A$. Also ist $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$, da f affin. Es genügt nun zu zeigen, dass B projektive, separable A-Algebra ist.

Nach 2.10 ist $g^{-1}(U) = \operatorname{Spec} C$, wobei C eine endliche, treuprojektive A-Algebra ist. Sei $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal von A. Angenommen $C = \mathfrak{m}C$. Dann folgt insbesondere $C_\mathfrak{m} = \mathfrak{m}C_\mathfrak{m}$, also da C endlich erzeugter $A_\mathfrak{m}$-Modul folgt mit Nakayama $C_\mathfrak{m} = 0$, also $[C : A](\mathfrak{m}) = 0 < 1$. Widerspruch. Da C insbesondere flach, folgt mit Algebra 2, dass C treuflache A-Algebra ist.

Nun sei $p\colon Y \times_X W \to W$. Dann ist $p^{-1}(\operatorname{Spec} C) = \operatorname{Spec} B \otimes_A C$. Da p endlich étale, folgt mit 2.18, dass $B \otimes_A C$ eine projektive separable C-Algebra ist. Mit der Treuflachheit von C und 1.3 folgt nun die Behauptung. □