Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Beh.: Der UVR $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid x_1 - x_2 = 0\}$ hat die Basis $\{(1,1)\}$.

Beweis. $\{(1,1)\}$ ist offensichtlich linear unabhängig. Außerdem: Sei $v \in V$ beliebig, dann ex. ein $p \in \mathbb{Q}$, s.d. $v = (p,p)$. Damit: $v = p \cdot (1,1)$. □

(b) Beh.: Der UVR $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n \mid 2x_1 + x_2 = 0\}$ hat die Basis $(v_i)_{i\in I} = \{(1,-2,0,\ldots,0),(0,0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,1)\}$ mit $I = \{1,3,4,\ldots,n\}$.

Beweis. Sei $v \in V$ beliebig, dann ex. $(a_1, a_3, \ldots, a_n) \in Q^{n-1}$ mit $v = (a_1, -2a_1, a_3, \ldots, a_n)$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
v &= a_1 \cdot (1,-2,0,\ldots,0) + \sum_{i=3}^{n} a_i \cdot (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \\
&= a_1 \cdot v_1 + \sum_{i=3}^{n} a_i \cdot v_i.
\end{aligned}
$$

$\implies (v_i)_{i\in I}$ Erzeugendensystem

Sei $i_0 \in I$ beliebig. Falls $i_0 = 1$. Dann ist $(1,-2,0,\ldots,0) \notin \operatorname{Lin}(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

Falls $3 \le i_0 \le n$: $(0,\ldots,0,\underbrace{1}_{i_0-\text{te Stelle}},0,\ldots,0) \notin \operatorname{Lin}(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

$\implies (v_i)_{i\in I}$ minimal und damit Basis. □

(c) Beh.: Der UVR $\ker \partial$ hat die Basis $(b_i)_{i\in I}$ mit $I = \{0,\ldots,\hat{i}\}$. mit $\hat{i} = 0$ für char $K = 0$ und $\hat{i} = \lfloor \frac{n+1}{\text{char } K} \rfloor$ für char $K > 0$ mit

$$
b_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{char } K \cdot i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.
$$

Beweis. Zunächst: b_i ist wohldefiniert, da char $K \cdot i$ eindeutig $\forall i \in I$. Es gilt außerdem $\forall i \in I$: $i \cdot \text{char } K \le n+1$, da für char $K = 0 \implies \hat{i} = i = 0 \le n+1$ und für char $K > 0 \implies i \le i_0 \le \frac{n+1}{\text{char } K} \implies i \cdot \text{char } K \le n+1$.

Zz.: $(b_i)_{i\in I}$ ist Erzeugendensystem. Sei $f \in \ker \partial$ beliebig, dann wähle $\alpha_i = f(i \cdot \text{char } K) \quad \forall i \in I$. Da I endlich, ist $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$. Sei nun $k \in \{0,\ldots,n+1\}$ beliebig:

Falls char $K \nmid k$: $\forall i \in I$: $b_i(k) = 0 = f(k)$.

Falls char $K \mid k$: $\exists! j \in I$: char $K \cdot j = k$.

$$
\sum_{i\in I} \alpha_i b_i = \alpha_j = f(j \cdot \text{char } K) = f(k).
$$

Zz.: $(b_i)_{i\in I}$ ist minimal.

Sei $i_0 \in I$ beliebig. Wähle $f \in \ker \partial$ mit $f(i_0 \cdot \text{char } K) = 1$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\forall i \in I \setminus \{i_0\}: b_i(i_0 \cdot \text{char } K) = 0 \\
\implies &f \notin \operatorname{Lin}\left((b_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}\right) \\
\implies &(b_i)_{i\in I} \text{ minimal.}
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 2. (a) Beh.: φ ist linear. Zunächst: φ ist wohldefiniert, da jedem v_1 eindeutig die Äquivalenzklasse von $v_1 = v_1 + 0 \in (V_1 + V_2)$ zugeordnet wird.

Seien $v_1, v_2 \in V_1$ und $a \in K$ beliebig.

Beweis. Homomorphismus

$$\varphi(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2) + V_2 = [v_1 + v_2] = [v_1] + [v_2] = (v_1 + V_2) + (v_2 + V_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2).$$

Linearität

$$\varphi(av_1) = (av_1) + V_2 = [av_1] = a \cdot [v_1] = a \cdot \varphi(v_1).$$

□

(b) Beh.: φ ist surjektiv.

Beweis. Sei $v \in (V_1 + V_2)$ beliebig. Dann ist $[v] = v + V_2$ und es ex. $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ mit $v = v_1 + v_2$.

Zu zeigen: $\varphi(v_1) = [v_1] = [v]$.

$$v - v_1 = v_1 + v_2 - v_1 = v_2 \in V_2 \implies v_1 \sim v_2.$$

□

(c) Beh.: $\ker\varphi = V_1 \cap V_2$

Beweis. Das neutrale Element von $(V_1 + V_2)/V_2))$ ist V_2. Sei $v \in V$ beliebig.

$$\begin{aligned} & v \in V_1 \cap V_2 \\ \iff & v \in V_1 \wedge v \in V_2 \\ \iff & v \in V_1 \wedge [v] = V_2 \\ \iff & \varphi(v) = V_2 \\ \iff & v \in \ker \varphi. \end{aligned}$$

□

(d) Beh.: $V_1/(V_1 \cap V_2) \stackrel{\sim}{=} (V_1 + V_2)/V_2$

Beweis. Aus (c) folgt $V_1 \cap V_2 = \ker\varphi$ und wegen φ surjektiv ist im $\varphi = (V_1 + V_2)/V_2$. Mit Homomorphiesatz folgt:

$$V_1/(V_1 \cap V_2) \stackrel{\sim}{=} (V_1 + V_2)/V_2.$$

□

Aufgabe 3. (a) Beh.: $U + W = V$

Beweis. Wegen $(v_i)_{i\in I}$ Basis folgt

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{Lin}\left((v_i)_{i\in I}\right) \\ &= \left\{ \sum_{i\in I} \alpha_i v_i \mid (\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j\in J} \alpha_j v_j + \sum_{i\in I\setminus J} \beta_i v_i \mid (\alpha_j)_{j\in J} \in K^{(J)}, (\beta_i)_{i\in I\setminus J} \in K^{(I\setminus J)} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j\in J} \alpha_i v_i \mid (\alpha_j)_{j\in J} \in K^{(J)} \right\} + \left\{ \sum_{i\in I\setminus J} \beta_i v_i \mid (\beta_i)_{i\in I\setminus J} \in K^{(I\setminus J)} \right\} \\ &= \operatorname{Lin}((v_j)_{i\in J}) + \operatorname{Lin}((v_i)_{i\in I\setminus J}) \\ &= U + W. \end{aligned}$$

□

(b) Beh.: $U \cap W = \{0\}$

Beweis. Zunächst: $0 = \sum_{i \in I \setminus J} 0 \cdot v_i = \sum_{j \in J} 0 \cdot v_j \implies 0 \in U \cap W$

Sei $v \in U \cap W$ beliebig. Dann ex. ein $(\alpha_i)_{i \in I \setminus J} \in K^{(I \setminus J)}$ und ein $(\beta_j)_{j \in J} \in K^{(J)}$, s.d.

$$v = \sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i v_i = \sum_{j \in J} \beta_j v_j.$$

Angenommen $v \neq 0$. Damit $\exists i \in I \setminus J \colon \alpha_i \neq 0$ und $\exists j \in J \colon \beta_j \neq 0$. Wegen $(v_i)_{i \in I}$ Basis folgt $(v_i)_{i \in I \setminus J} \cap (v_j)_{j \in J} = \emptyset$, also $(\alpha_i)_{i \in I \setminus J} \neq (\beta_j)_{j \in J}$. Das ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Darstellung durch Basisvektoren. □

(c) Beh.: $(v_i + U)_{i \in I \setminus J}$ ist eine Basis von V/U.

Beweis. Zu zeigen: $(v_i + U)_{i \in I \setminus J}$ ist linear unabhängig und Erzeugendensystem.

(i) Neutrales Element von V/U ist U. Sei $(\alpha_i)_{i \in I \setminus J} \in K^{(I \setminus J)}$ mit

$$\sum_{i \in I \setminus J} [\alpha_i v_i] = U.$$

$\implies (\alpha_i v_i)_{i \in I \setminus J} \subset U$. Wegen $(\alpha_i v_i)_{i \in I \setminus J} \subset W$ und $V \cap W = \{0\}$, aber $0 \notin (v_i)_{i \in I}$
$\implies \alpha_i = 0 \; \forall i \in I \setminus J$.

(ii) Sei $v \in V$ beliebig. Zu zeigen: $\exists (\alpha_i)_{i \in I \setminus J} \in K^{(I \setminus J)}$: $[v] = \sum_{i \in I \setminus J} [\alpha_i v_i]$
Falls $v \in U$: $[v] = U$: Für $\alpha_i = 0 \; \forall i \in I \setminus J$ folgt:

$$\sum_{i \in I \setminus J} [0 \cdot v_i] = [0] = U = [v].$$

Falls $v \in W$: Dann ex. ein $(\alpha_i)_{i \in I \setminus J} \in K^{I \setminus J}$, s.d.

$$v = \sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i v_i.$$

Dann gilt:

$$\sum_{i \in I \setminus J} [\alpha_i v_i] = \left[\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i v_i \right] = [v].$$

□

Aufgabe 4. (a) Beh.: Für jedes $i \in I$ existiert genau ein $v_i^* \in V^*$ derart, dass

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}.$$

Beweis. Sei $i \in I$ beliebig. Für die Basisvektoren $(v_i)_{i \in I}$ ist v_i^* eindeutig definiert. Für $v \in V$ ex. ein $(\alpha_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$, s.d.

$$v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i.$$

Aufgrund der Linearität von v_i^* ist $v_i^*(v)$ eindeutig definiert durch:

$$v_i^*(v) = v_i^* \left(\sum_{j \in I} \alpha_j v_j \right) = \sum_{j \in I} v_i^*(\alpha_j v_j) = \sum_{j \in I} \alpha_j v_i^*(v_j).$$

Damit ist v_i^* wohldefiniert und damit eindeutig bestimmt. □

(b) Beh.: Die Familie $(v_i^*)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.

Beweis. Sei $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ mit $\sum_{i\in I} \alpha_i v_i^* = 0$.
Angenommen: $\exists i_0 \in I\colon \alpha_{i_0} \neq 0$. Das heißt:

$$\begin{aligned} &\alpha_{i_0} \cdot v_{i_0}^* + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \alpha_i v_i^* = 0 \\ \implies &\alpha_{i_0} \cdot v_{i_0}^* = -\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \alpha_i v_i^* \\ \implies &\alpha_{i_0} \cdot v_{i_0}^*(v_{i_0}) = \alpha_{i_0} = -\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \alpha_i v_i^*(v_{i_0}). \end{aligned}$$

Wegen $\forall i \in I \setminus \{i_0\}\colon v_i^*(v_{i_0}) = 0$, folgt

$$\alpha_{i_0} = -\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \alpha_i \cdot 0 = 0.$$

Widerspruch zur Annahme $\alpha_{i_0} \neq 0$. $\implies$ $(v_i^*)_{i\in I}$ linear unabhängig □

(c) Beh.: Ist I nicht endlich, so ist $(v_i^*)_{i\in I}$ keine Basis von V^*.

Beweis. I ist nicht endlich. Zu zeigen: $(v_i^*)_{i\in I}$ ist nicht Erzeugendensystem von V^*.
Sei $f^* \in V$ mit

$$v = \sum_{i\in I} \beta_i v_i \mapsto \sum_{i\in I} \beta_i.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung durch die Basis $(v_i)_{i\in I}$ ist diese Abbildung wohldefiniert.
Zu zeigen.: f^* ist linear. Seien $v, w \in V$ und $k \in K$ beliebig. Wegen $(v_i)_{i\in I}$ Basis, ex. $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$, s.d. $v = \sum_{i\in I} a_i v_i$ und $w = \sum_{i\in I} b_i v_i$.

$$\begin{aligned} f^*(kv + w) &= f^*\left(\sum_{i\in I}(k(a_i v_i) + (b_i v_i))\right) \\ &= f^*\left(\sum_{i\in I}(ka_i + b_i)v_i\right) \\ &= \sum_{i\in I}(ka_i + b_i) = k\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i = k \cdot f^*\left(\sum_{i\in I} a_i v_i\right) + f^*\left(\sum_{i\in I} b_i v_i\right) \\ &= k \cdot f^*(v) + f^*(w). \end{aligned}$$

$\implies$ f^* linear und damit $f^* \in V^*$.

Nun gilt insbesondere für $v_i \in (v_i)_{i\in I}$

$$f^*(v_i) = f^*(1 \cdot v_i) = 1.$$

Angenommen $(v_i^*)_{i\in I}$ ist Erzeugendensystem. Dann ex. $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$, s.d.

$$f^* = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i^*.$$

Sei $i \in I$ nun beliebig. Dann gilt

$$f^*(v_i) = \sum_{j\in I} \alpha_j v_j^*(v_i) = \alpha_i = 1.$$

Daraus folgt, dass $\forall i \in I\colon \alpha_i = 1$. Widerspruch zur Annahme, dass $(\alpha_i)_{i\in I}$ endlich ist. □