Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. Zunächst ist das charakteristische Polynom zu berechnen.

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 5 & 4 \\ -6 & \lambda + 7 & 4 \\ -3 & 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Mit $\chi_A(\lambda) = 0$ folgen die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$. Die Eigenräume ergeben sich aus den homogenen LGS. Für $\lambda_1 = 1$ folgt

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 5 & 4 \\ -6 & 8 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies V_{\lambda_1} = \operatorname{Lin}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

Für $\lambda_2 = -2$ folgt analog

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 \\ -6 & 5 & 4 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies V_{\lambda_2} = \operatorname{Lin}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

Damit folgt direkt $\mu_{\text{geo}}(\lambda_1) = \dim V_{\lambda_1} = 1 = \dim V_{\lambda_2} = \mu_{\text{geo}}(\lambda_2)$. Damit ist

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{\text{geo}}(\lambda_i) = 2 \neq 3 = n \qquad \implies A \text{ nicht diagonalisierbar}$$

Aber wegen $\mu_{\text{alg}}(\lambda_1) = 2$ und $\mu_{\text{alg}}(\lambda_2) = 1$ folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{\text{alg}}(\lambda_i) = 3 = n \implies \quad A \text{ trigonalisierbar.}$$

Ergänze nun $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (l.u. da $0 = 2 - 2$ aber $2 - 1 \neq 0$). Damit folgt direkt

$$S := M(id)^{\underline{v}}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse ergibt sich durch Berechnung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} =: S^{-1}.$$

Damit ist $S^{-1}AS$ eine obere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 2. (a) Beh.: Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist eindeutig bestimmt mit

$$\begin{pmatrix} f(n+2) \\ f(n+1) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ergibt die Voraussetzung zwei Gleichungen:

$$f(n+2) = af(n+1) + bf(n)$$
$$f(n+1) = cf(n+1) + df(n).$$

Mit $f(n+2) = 2f(n+1) + 3f(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$ folgt direkt $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ und $d = 0$. $\square$

(b) Analog zu Aufgabe 1 folgt

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3) = 0 \quad \Longrightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3.$$

Damit ergeben sich die Eigenräume. Aus $\lambda_1 = -1$ folgt

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow V_{\lambda_1} = \mathrm{Lin}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

und aus $\lambda_2 = 3$ folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow V_{\lambda_2} = \mathrm{Lin}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

(c) Die Eigenvektoren aus (b) bilden eine Basis $\underline{v}$. Damit folgt

$$S := M_{\underline{e}}^{\underline{v}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

und durch Invertieren von S

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} .$$

Damit hat $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt.

(d) Aus (c) folgt die Diagonalmatrix

$$D := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Durch die Formel

$$\begin{pmatrix} f(n+2) \\ f(n+1) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}.$$

ergibt sich, dass $f(n)$ durch $n-2$-malige Anwendung von A auf die Startwerte $\begin{pmatrix} f(2) \\ f(1) \end{pmatrix}$ entsteht. Zur Berechnung wird die Diagonalmatrix D verwendet. Dafür wird der Startvektor mit S^{-1} in die Basis $\underline{v}$ transformiert und dann D $n-2$ mal angewendet und das Ergebnis mit S^{-1} zurück in die kanonische Basis transformiert. Damit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix} = S \cdot D^{n-2} \cdot S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(2) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{n-2}\left(\frac{f(2)}{4} - \frac{3}{4}f(1)\right) \\ 3^{n-2}\left(\frac{f(2)}{4} + \frac{f(1)}{4}\right) \end{pmatrix} .$$

Da nur $f(n)$ benötigt wird, ergibt sich so $f(n)$ durch die obere Zeile des Vektors, also

$$\begin{aligned} f(n) &= (-1)^{n-2}\left(\frac{f(2)}{4} - \frac{3}{4}f(1)\right) + 3 \cdot 3^{n-2}\left(\frac{f(2)}{4} + \frac{f(1)}{4}\right) \\ &= \frac{3f(1)}{4}\left((-1)^{n+1} + 3^{n-2}\right) + \frac{f(2)}{4}\left((-1)^n + 3^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (a) Beh.: γ ist eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform

Beweis. Seien $f, g, h \in K[X]_{\leq n}$ und $\lambda \in K$ bel.

Zz.: γ ist symmetrisch. Da $K[X]$ kommutativer Ring folgt

$$\gamma(f,g) = \left(\int (f \cdot g)dx\right)(1_K) = \left(\int (g \cdot f)dx\right)(1_K) = \gamma(g,f).$$

Zz.: γ ist bilinear.

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda f + h, g) &= \left(\int ((\lambda f + h)\cdot g)dx\right)(1_K)\\ &= \left(\int (\lambda f\cdot g + h\cdot g)dx\right)(1_K)\\ &= \lambda\left(\int (f\cdot g)\right) + \left(\int (h\cdot g))\,dx\right)(1_K)\\ &= \lambda\gamma(f,g) + \gamma(h,g).\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von γ folgt die Linearität auch im zweiten Argument.

Zz.: γ ist nicht ausgeartet.

Sei $\mathcal{B}$ die kanonische Basis des $K[X]_{\leq n}$. Dann ist die Fundamentalmatrix von γ bezügl. $\mathcal{B}$ offensichtlich invertierbar. Damit ist γ nicht ausgeartet. □

(b) Für $K = \mathbb{Q}$ und $n = 3$ muss γ für alle Kombinationen der Basisvektoren $(1, x, x^2, x^3)$ berechnet werden. Also beispielsweise für x und x^2 folgt

$$\gamma(x, x^2) = \left(\int (x\cdot x^2)dx\right)(1_K) = \left(\int x^3 dx\right)(1_K) = \frac{1}{3}.$$

Damit folgt analog für die restlichen Kombinationen die Fundamentalmatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

(c) Um eine Orthogonalbasis zu bestimmen, müsste G aus (c) diagonalisiert werden. Dieser Prozess ist allerdings für eine 4×4 Matrix mit diesen Einträgen langwierig. Deswegen bestimme die Orthogonalbasis induktiv. Für $n = 2$ ist sofort ersichtlich, dass $\{1, 1-2x\}$ eine Orthogonalbasis bilden, da

$$\gamma(1, 1-2x) = \left(\int (1-2x)dx\right)(1_K) = 1 - 1 = 0.$$

Für $n = 3$ ergibt sich dann aus den Gleichungen $\gamma(1-2x, a+bx+cx^2) = 0$ und $\gamma(1, a+bx+cx^2) = 0$ folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -b - c &= 0\\ a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} &= 0.\end{aligned}$$

Durch Wahl von $a = -1$ ergibt sich damit $b = 6$ und $c = -6$.

Für $n = 4$ ergeben sich analog zu $n = 3$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} -10b - 10c - 9d &= 0\\ d + \frac{2}{3}c &= 0\\ a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} &= 0.\end{aligned}$$

Durch Wahl von $d = 10$ ergibt sich damit $a = -\frac{1}{2}$, $b = 6$, $c = -15$. Damit ist

$$\{1, 1-2x, -1+6x-6x^2, -\frac{1}{2} + 6x - 15x^2 + 10x^3\}.$$

offensichtlich l.u. und eine Orthogonalbasis des $Q[X]_{\leq 3}$ bezüglich γ.

Aufgabe 4. Es gilt nach VL: $M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f) = \left(M_{\underline{e^*}}^{\underline{e^*}}(f^*)\right)^t$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\chi_f(t) &= \det(tE_n - M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f)) \\
&= \det\left[\left(tE_n - M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f)\right)^t\right] \\
&= \det\left[(tE_n)^t - \left(M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f)\right)^t\right] \\
&= \det\left[tE_n - M_{\underline{e^*}}^{\underline{e^*}}(f^*)\right] \\
&= \chi_{f^*}(t).
\end{aligned}$$

Damit folgt: $\lambda \in K$ Eigenwert von $f \iff \lambda$ Nullstelle von $\chi_f(\lambda) \iff \lambda$ Nullstelle von $\chi_{f^*}(\lambda) \iff \lambda$ Eigenwert von f^*.

Sei nun $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f bzw. f^*. Dann bezeichne V_λ den Eigenraum von λ bezüglich f und V_λ^* den Eigenraum bezüglich f^*. Da V e.d. gilt $\dim V = \dim V^*$.

$$\begin{aligned}
\dim V_\lambda = &\quad \dim \ker(\lambda E_n - M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f)) \\
\overset{V \text{ e.d.}}{=} &\quad \dim V - \operatorname{Rg}(\lambda E_n - M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f)) \\
\overset{\text{SR} = \text{ZR}}{=} &\quad \dim V - \operatorname{Rg}\left[\left(\lambda E_n - M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f)\right)^t\right] \\
= &\quad \dim V^* - \operatorname{Rg}\left[\lambda E_n - \left(M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f)\right)^t\right] \\
\overset{\dim V = \dim V^*}{=} &\quad \dim V^* - \operatorname{Rg}\left(\lambda E_n - M_{\underline{e^*}}^{\underline{e^*}}(f^*)\right) \\
\overset{V^* \text{ e.d.}}{=} &\quad \dim \ker(\lambda E_n - M_{\underline{e^*}}^{\underline{e^*}}(f^*)) \\
= &\quad \dim V_\lambda^*.
\end{aligned}$$