1 Funktionen und Stetigkeit

Definition 1.1 (Funktion). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge. Eine reellwertige oder komplexwertige Funktion auf D ist eine Abbildung:

$$f : D \to \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f : D \to \mathbb{C}.$$

Für zwei Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$(oder $\mathbb{C}$) definieren wir

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) &:= f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

.

1.1 Grenzwerte bei Funktionen

Definition 1.2 (Berührpunkt). Sei $D \subset \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von D, falls in jeder δ-Umgebung von a, d.h.

$$U_\delta(a) :=]a-\delta, a+\delta[= (a-\delta, a+\delta).$$

mindestens ein Punkt von D liegt, d.h.

$$]a-\delta, a+\delta[\cap D \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0.$$

Beispiel 1.3.

1. $a \in D \implies a$ Berührpunkt von D
2. $D =]0,1[$, 0 ist Berührpunkt von D, denn $\forall \delta > 0 \ ]-\delta, \delta[\cap]0,1[\neq \emptyset$, da $\delta > 0$
3. $D = [1,2], 0$ ist kein Berührpunkt von D, denn z.B. für $\delta = \frac{1}{2}$:

$$]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cap [1,2] = \emptyset.$$

Lemma 1.4 (Äquivalente Definition von Berührpunkten). a ist ein Berührpunkt von $D \iff \exists$ Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Beweis. durch Behauptung □

Definition 1.5 (Grenzwert bei Funktionen).

1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und x_0 sei ein Berührpunkt von D. f hat in x_0 den Grenzwert (oder limes), $y_0 \in \mathbb{R}$, falls

   $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D, |x - x_0| < \delta.$$

   Schreibweise:

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

   y_0 ist eindeutig bestimmt.

   y_0 kann von D abhängig sein und man schreibt daher zur Verdeutlichung ein $x \in D$ darunter.

2. Sei x_0 ein Berührpunkt von $D \cap]x_0, \infty[$. Dann hat f in x_0 den rechtsseitigen Grenzwert y_0 hat, falls

   $$\lim_{x \to x_0} x \in D \cap]x_0, \infty[f(x) = y_0.$$

Schreibweise

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0$$
$$\lim_{x\searrow x_0} f(x) = y_0.$$

3. Sei x_0 ein Berührpunkt von $D\cap]-\infty, x_0[$. Dann hat f in x_0 den linksseitigen Grenzwert y_0, falls
$$\lim_{x\to x_0} x \in D\cap]x_0, \infty[f(x) = y_0.$$

Schreibweise:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0$$
$$\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = y_0.$$

Beispiel 1.6 (Heaviside Funktion)**.** $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, def. durch

$$H(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}.$$

Für $x_0 > 0$ gilt $\lim_{x\to x_0} H(x) = 1$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, wähle $\delta := \frac{x_0}{2} > 0$. Dann gilt

$$|H(x) - 1| = 0 < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \cap]x_0 - \frac{x_0}{2}, x_0 + \frac{x_0}{2}[.$$

□

Analog finden wir, dass für $x_0 < 0$ gilt $\lim_{x\to x_0} H(x) = 0$.

$\lim_{x\to 0} H(x)$ existiert nicht!

Beweis. Angenommen: $\lim_{x\to 0} H(x) = y_0$.

Dann wählen wir $\epsilon = \frac{1}{4}$, dann ex. $\delta > 0$ mit

$$|H(x) - y_0| < \frac{1}{4} \quad \forall x \text{ mit } x \in]-\delta, \delta[.$$

$\implies 1 = |H(-\delta)| - H(\delta)| \leq |H(-\delta) - y_0| + |y_0 - H(\delta)| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ Widerspruch!
$\implies \lim_{x\to 0} H(x)$ existiert nicht. □

Es gibt $\lim_{x\nearrow 0} H(x) = 0$ und $\lim_{x\searrow 0} H(x) = 1$, weil

$$|H(x) - 0| = 0 \quad \forall x \in]-\delta, 0[$$
$$|H(x) - 1| = 0 \quad \forall x \in]0, \delta[.$$

Lemma 1.7 (Restgliedabschätzung der Exponentialreihe)**.**

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x).$$

, d.h.

$$R_{n+1}(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Für $R_{n+1}(x)$ gilt

$$|R_{n+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}, \quad \forall |x| \leq \frac{N+2}{2}, N \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots\right) \\
&\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \left(\frac{|x|}{N+2}\right)^2 + + \left(\frac{|x|}{N+2}\right)^3 + \dots\right) \\
&\leq \frac{|x|^{n+1}}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \\
&= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 1.8.

$$\lim_{x \to 0} \exp(x) = 1.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, wähle $\delta := \frac{\epsilon}{4}$. Dann gilt $\forall x \in \,]-\frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{4}[$, wobei O.B.d.A. $\frac{\epsilon}{4} < 1$, dass

$$|\exp(x) - 1| = |R_{0+1}| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{0+1}}{(0+1)!} = 2|x| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

□

Lemma 1.9 (Folgenkriterium)**.** Sei $f \colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein Berührpunkt von D. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \quad \iff \quad \forall \text{ Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \text{ mit } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0.$$

Beweis.

- „$\implies$": Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.
  Zu zeigen: $\lim_{n \to \infty} f(x_0) = y_0$. Sei also $\epsilon > 0$, nach Def. von $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert ein $\delta > 0$, s.d.
  $$|f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$
  Zu $\delta > 0$ ex. ein Index $n_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq n_\delta$.
  $\implies |f(x_n) - y_0| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\delta$
  $\implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0$
- „$\impliedby$" Zu zeigen.: $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, d.h.
  $$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \colon |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D \colon |x - x_0| < \delta.$$
  Angenommen das gilt nicht.
  Dann $\exists \epsilon_0 > 0$, s.d. $\forall \delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - y_0| \geq \epsilon_0$.
  $\implies$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x) - y_0| \geq \epsilon_0$
  $\implies$ Diese $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definieren eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, aber $|f(x_n) - y_0| \geq \epsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  $\implies$ $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen y_0. Widerspruch!
  $\implies$ Annahme ist falsch $\implies$ Behauptung

□

1.2 Stetigkeit

Definition 1.10 (Stetigkeit)**.** Sei $f : D \to \mathbb{R}$, und $a \in D$. f heißt stetig im Punkt a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

f heißt stetig in D, falls f stetig in a ist $\forall a \in D$.

Äquivalente Definitionen

Definition 1.11 (Stetigkeit per ϵ / δ Argument)**.** f ist stetig in a $\iff$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Definition 1.12 (Stetigkeit mit Folgen)**.** f ist stetig in a $\iff$

$$\forall \text{ Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit } \lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ gilt, dass } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

Definition 1.13 (Stetigkeit mit Bild)**.** f ist stetig in a $\iff$ $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d.

$$f(U_\delta(a)) \subset \,]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[\, = U_\epsilon(f(a)).$$

Beispiel 1.14. (1) Konstante Funktionen und die Identität sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Konstante Fkt.: Wähle δ beliebig, da

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon |x - a| < \delta \implies 0 = |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Bei der Identität: Wähle $\delta := \epsilon > 0$, denn

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - a| < \delta = \epsilon \implies |f(x) - f(a)| = |x - a| < \epsilon.$$

(2) $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Das folgt aus Rechenregeln für Folgen,

$$f(x_n) \to f(a), n \to \infty \implies |f(x_n)| \to |f(a)|.$$

(3) $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim_{n \to \infty} (x_n - a) = 0.$$

Aus $\lim_{x \to 0} \exp(x) = 1$ folgt $\lim_{n \to \infty} \exp(x_n - a) = 1$

$$\implies \lim_{x \to a} \exp(x_n) = \lim_{x_n \to a} (\exp(a) + \exp(n - a))) = \exp(a) \cdot 1 = \exp(a).$$