

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | $\Sigma$ |
|---------|----|----|----|----|----|----------|
| Punkte  |    |    |    |    |    |          |

**Aufgabe 1.** Für  $n \in \mathbb{N}_0$  bezeichne  $P_n$  das Legendre Polynom.

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

$\forall n, m \in \mathbb{N}_0, n \geq m, 0 \leq k \leq n$  gilt zudem nach Aufgabenstellung:

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx = (-1)^{m+1} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{m+k}}{dx^{m+k}} (x^2 - 1)^m dx \quad (*).$$

(a) Beh.:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0, n \neq m.$$

*Beweis.* Seien  $n, m \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \neq m$  beliebig. O.B.d.A.:  $n > m$ . Dann gilt

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{1}{2^n 2^m n! m!} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx.$$

Zu zeigen:

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx = 0.$$

Mit (\*) und  $k = m + 1 \leq n$  folgt

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx = (-1)^{m+1} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}} (x^2 - 1)^m dx.$$

Wegen  $\deg (x^2 - 1)^m = 2m$  folgt  $\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}} (x^2 - 1)^m = 0$ . Damit folgt

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx = 0.$$

□

(b) Beh.: Für ein festes  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $\forall k \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq k \leq n$ :

$$\int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} \int_{-1}^1 (1-x)^{n-k} (1+x)^{n+k} dx.$$

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  beliebig. Beweis per Induktion nach  $k$ .  $k = 0$ : trivial.

Es existiere ein  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k < n$  mit Beh. Dann folgt für  $k+1$  mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} & \frac{(n!)^2}{(n-k-1)!(n+k+1)!} \int_{-1}^1 (1-x)^{n-k-1} (1+x)^{n+k+1} dx \\ &= \frac{(n!)^2}{(n-k-1)!(n+k+1)!} \underbrace{\left( -\frac{1}{n-k} (1-x)^{n-k} (1+x)^{n+k+1} \right) \Big|_{-1}^1}_{=0} \\ & \quad + \int_{-1}^1 \frac{n+k+1}{n-k} (1-x)^{n-k} (1+x)^{n+k} dx \\ &= \frac{(n!)^2 (n-k)}{(n-k)!(n+k)!(n+k+1)!} \int_{-1}^1 \frac{n+k+1}{n-k} (1-x)^{n-k} (1+x)^{n+k} dx \\ &= \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} \int_{-1}^1 (1-x)^{n-k} (1+x)^{n+k} dx \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx. \end{aligned}$$

□

(c) Beh.: Es gilt  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_n(x) \, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  beliebig. Dann sind wegen  $\deg(x^2 - 1)^n = 2n$  in der  $2n$ -ten Ableitung alle Terme bis auf den  $x^{2n}$  Term null. Damit folgt

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2 - 1)^n = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}x^{2n} = (2n)! \quad (**).$$

Dann folgt mit (\*) und  $k = n$ :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x) P_n(x) \, dx &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \, dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot \underbrace{\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2 - 1)^n}_{=(2n)! \quad (**)} \, dx \\ &= \frac{(2n)!(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 ((x-1)(x+1))^n \, dx \\ &= \frac{(2n)!(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 ((-1)(1-x)(1+x))^n \, dx \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n \, dx \\ &\stackrel{(b), k=n}{=} \frac{1}{2^{2n}} \int_{-1}^1 (1+x)^{2n} \, dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{2n+1} (1+x)^{2n+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2^{2n+1}}{2^{2n}} \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 2.** Die Funktion  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch:

$$f(x) = \min\left(x - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - x\right).$$

Beh.: Für die Fourier Entwicklung  $F_\infty^f$  gilt:

$$F_\infty^f = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)x).$$

*Beweis.* Es gilt zunächst:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{3\pi}{2} - x & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}.$$

Für die Koeffizienten  $a_k$  mit  $k > 0$  folgt nach Definition:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(kx) \, dx + \int_\pi^{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos(kx) \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{k} \sin(kx) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k} \sin(kx) \, dx + \frac{1}{k} \sin(kx) \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \Big|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) \, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi k^2} (\cos(k\pi) - 1). \end{aligned}$$

Für  $a_0$  gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \, dx \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für  $b_k$  folgt nach Definition mit analoger Rechnung:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx = 0.$$

Damit folgt die Fourier-Entwicklung von  $f$  mit:

$$\begin{aligned} F_{\infty}^f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} \underbrace{(\cos(k\pi) - 1)}_{=(-1)^k} \cos(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2} \left[ \underbrace{((-1)^{2k-1} - 1)}_{=-2} \cos((2k-1)x) + \underbrace{((-1)^{2k} - 1)}_{=0} \cos(2kx) \right] \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)x). \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 3.** Beh.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

*Beweis.* Nach Vorlesung gilt  $a_k = c_k + c_{-k}$  und  $b_k = i(c_k - c_{-k})$ . Mit  $b_k = 0$  folgt  $c_k = c_{-k}$  und mit Aufg. 2.2 damit:

$$c_k = c_{-k} = \frac{a_k}{2} = \frac{1}{\pi k^2} ((-1)^k - 1).$$

Damit folgt

$$2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2}{\pi(2k-1)^2} \right|^2 \stackrel{c_k=c_{-k}}{=} \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Außerdem gilt

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - x\right)^2 \, dx = \frac{\pi^3}{6}.$$

Zusammen mit der Parsevalschen Gleichung (PG) folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\pi^3}{6} &\stackrel{\text{(PG)}}{=} \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \\ \implies \frac{\pi^4}{96} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}. \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 4.** Beh.: Für  $2\pi$ -periodische Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \quad (\text{A}) \\ \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \quad (\text{B}). \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodisch, außerdem ist  $\sin(x)$   $2\pi$  periodisch (\*). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx &= \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx + \int_{-\pi}^0 f(x+2\pi) \sin(k(x+2\pi)) \, dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx. \end{aligned}$$

Für  $\cos(kx)$  analog. □

Beh.: Für  $2\pi$ -periodische gerade  $f_g$  bzw. ungerade  $f_u$  Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt für ihre Fourier-Entwicklung:

$$F_{\infty}^{f_g}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \quad \text{bzw.} \quad F_{\infty}^{f_u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

*Beweis.* Sei  $f_g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gerade (\*) und  $2\pi$ -periodisch. Dann bleibt zu zeigen:  $b_k = 0$ . Es gilt  $\sin(-x) = -\sin(x)$ , also ist  $\sin(x)$  ungerade (\*\*). Damit folgt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &\stackrel{(\Delta)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(kx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &\stackrel{x \rightarrow -x}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 -f(-x) \sin(-kx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(-x) \sin(-kx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &\stackrel{(*),(**)}{=} -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sei  $f_u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ungerade und  $2\pi$ -periodisch. Dann bleibt zu zeigen  $a_k = 0$ . Es gilt  $\cos(-x) = \cos(x)$ , also ist  $\cos(x)$  gerade. Dann folgt die Behauptung analog. □

**Aufgabe 5.** Beh.:  $\forall n, m \in \mathbb{N}_0, n \geq m, 0 \leq k \leq n$  gilt zudem nach Aufgabenstellung:

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d}{dx^m} (x^2 - 1)^m \, dx = (-1)^{m+1} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{m+k}}{dx^{m+k}} (x^2 - 1)^m \, dx.$$

Es gelte

$$\frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n = (x^2 - 1)^{n-k} \cdot p_k(x) \quad (*).$$

*Beweis.* Seien  $n, m \in \mathbb{N}_0$  beliebig. Beweis per Induktion nach  $k$ .

Für  $k = 0$  ist Beh. trivialerweise erfüllt.

Sei nun  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k < n$  beliebig mit gegebener Beh. Dann gilt für  $k + 1$ :

$$\begin{aligned} &(-1)^{k+1} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{m+k+1}}{dx^{m+k+1}} (x^2 - 1)^m \, dx \\ &= (-1)^{k+1} \left[ \left( \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^{m+k+1}}{dx^{m+k+1}} (x^2 - 1)^m \right) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^{m+k}}{dx^{m+k}} (x^2 - 1)^m \, dx \right] \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} (-1)^{k+1} \left( \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^{m+k+1}}{dx^{m+k+1}} (x^2 - 1)^m \right) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \, dx. \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen:

$$\left[ \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^{m+k+1}}{dx^{m+k+1}} (x^2 - 1)^m \right] \Big|_{-1}^1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^{m+k+1}}{dx^{m+k+1}} (x^2 - 1)^m \right] \Big|_{-1}^1 &\stackrel{(*)}{=} \left[ (x^2 - 1)^k \cdot p_{n-k}(x) \cdot \frac{d^{m+k+1}}{dx^{m+k+1}} (x^2 - 1)^m \right] \Big|_{-1}^1 \\ &= (1 - 1)^k \cdot p_{n-k}(1) \cdot \left( \frac{d^{m+k+1}}{dx^{m+k+1}} (x^2 - 1)^m \right) (1) \\ &\quad - (1 - 1)^k \cdot p_{n-k}(-1) \cdot \left( \frac{d^{m+k+1}}{dx^{m+k+1}} (x^2 - 1)^m \right) (-1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit folgt die Induktionsbehauptung für  $k + 1$ . □