Analysis I

Prof. Dr. Ekaterina Kostina

WS 2019/20

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Mengen und Aussagen

Definition 1. Seien A und B Mengen.

- **Teilmenge** $B \subset A$ bedeutet: jedes Element von B ist auch Element von A
  B ist eine Teilmenge von A; bsp.: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- **Mengengleichheit** Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.
- **Strikte Teilmenge** B ist eine strikte Teilmenge von A, wenn es ein Elemnt $a \in A$ gibt, mit $a \notin B$.
- **Leere Menge** oder Nullmenge"$\emptyset$ enthält keine Elemente.
  Es gilt konventionsgemäß $\emptyset \in A$ für alle Mengen A
- **Vereinigung** von A und B: $A \cup B := \{ \ a \mid a \in A$ oder $a \in B \ \}$
- **Durchschnitt** von A und B: $A \cap B := \{ \ a \mid a \in A$ und $a \in B \ \}$
- **Differenz** von A und B: $A \setminus B := \{ \ a \mid a \in A$ und $a \notin B \ \}$
- **Produktmenge**: $A \times B := \{ \ (a, b) \mid a \in A$ und $b \in B \ \}$
- **Disjunkte Mengen** A und B sind disjunkt, falls gilt: $A \cap B = \emptyset$

Bemerkung 1. Das ODER im mathematischen Sinne bedeutet das einschließliche oder und nicht das entweder oder.

1.2 Wahrheitstabellen

Definition 2. Seien V und E Aussagen.
Eine Aussage ist ein Satz, von dem eindeutig feststeht, ob er wahr oder falsch ist.

- **UND und ODER** Man definiere die Verknüpfungen UND $\wedge$ und ODER $\vee$ wie folgt:

V	E	V und E	V oder E
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

- **Negation** Man definiere die NICHT-Verknüpfung wie folgt:

V	$\neg V$
w	f
f	w

- **Implikation** Wenn V gilt, gilt auch E. Man sagt: V ist hinreichende Bedingung für E, oder die Voraussetzungen von V sind hinreichend für die Gültigkeit von E. Die Gültigkeit von E ist notwendig für die Gültigkeit von V, oder die Ungültigkeit von E impliziert die Ungültigkeit von V. Es gilt: $V \implies E$ ist wahr, falls $\neg V$ oder E wahr ist.

V	E	$V \implies E$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

- **Äquivalenz** Man definiere die Äquivalenzrelation $V \Leftrightarrow E$ als:
  $V \Leftrightarrow E$ steht für $V \implies E$ und $E \implies V$.

V	E	$V \Leftrightarrow E$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Definition 3 (Quantoren)**.** Man definiere folgende Quantoren:

- $\forall$ Allquantor, also als: für alle.
- $\exists$ Existenzquantor, also als: es existiert ein.
- $\exists!$ als: es existiert genau ein a.

Bemerkung 2. Häufig hilft es Aussagen zu negieren. Hierbei gelten folgende Regeln (können mithilfe von WT gezeigt werden):

- $\neg(\forall a \in A : V(a)) \Leftrightarrow (\exists a \in A : \neg V(a))$
- $\neg(\exists a \in A : V(a)) \Leftrightarrow (\forall a \in A : \neg V(a))$

Bemerkung 3 (Kontraposition)**.** Zwei weitere Hilfsmittel:

- $(V \implies E) \Leftrightarrow (\neg E \implies \neg V)$
- $(V \Leftarrow E) \Leftrightarrow (\neg E \Leftarrow \neg V)$

Bemerkung 4. Zu Quantoren:

- Quantoren müssen immer angegeben werden.
- Die Reihenfolge der Quantoren ist essentiell.
  Bsp.: $T :=$ Menge aller Töpfe, $D :=$ Menge aller Deckel, $V(a, b) =$ Deckel b passt auf Topf a.
  $\forall a \in T : \exists b \in D : V(a, b)$ ist vermutlich wahr,
  $\exists b \in D : \forall a \in T : V(a, b)$ ist vermutlich falsch.

1.3 Abbildungen

Definition 4 (Abbildungen)**.** Seien A, B Mengen. Eine Abbildung f zwischen A und B $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zugeordnet.
Hierbei nenne man A Definitionsmenge von f und B Wertemenge von f.

Definition 5 (Folgen)**.** Zahlenfolgen sind Abbildungen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibweise: statt $a(n)$ wird a_n und statt $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wird $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geschrieben.

Definition 6 (injektiv, surjektiv, bijektiv)**.** Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

- Abbildung f heißt injektiv, wenn gilt:

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2.$$

- Abbildung f heißt surjektiv wenn gilt:

$$\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a).$$

- Abbildung f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 1. Es sei f eine Abbildung: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$. Dann ist f weder injektiv, noch surjektiv.
Jedoch ist $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x)$ surjektiv, aber nicht injektiv.
Und $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x)$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Definition 7 (Bild)**.** Das Bild von A_1 (unter f):

$$f(A_1) := \{f(a) \mid a \in A_1\} = \{b \in B \mid \exists a \in A_1 : b = f(a)\}$$

Definition 8 (Urbild)**.** Das Urbild von B_1 (unter f):

$$f^{-1}(B_1) := \{a \mid f(a) \in B_1\} \subset A$$

Definition 9 (Inverse)**.** Zu einer bijektiven Abbildung existiert eine sogenannte Umkehrabbildung, auch Inverse, die ebenfalls bijektiv ist:

$$f^{-1} : B \to A \text{ mit } a = f^{-1}(b) \ :\Leftrightarrow\ b = f(a)$$

Bemerkung 5. Nur bijektive Abbildung besitzen Inverse.
Die Notation $f^{-1}(B)$ hat zwei Bedeutungen:

- Urbild von B unter f
- Bild von B unter f^{-1}

Das Urbild ist also für beliebige Abbildungen definiert

Definition 10 (Komposition von Abbildungen)**.** Es sein $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Dann sei:

$$g \circ f : A \to C,\ (g \circ f)(a) := g(f(a))$$

Man sagt: $g \circ f$ heißt g komponiert f.

Definition 11 (Morphismen)**.** Seien A und B Mengen mit einer gewissen Operation $\oplus_A$ bzw. $\oplus_B$, z.B. Addition, Multiplikation.
Die Abbildung $f : A \to B$ heißt homomorph (strukturerhaltend), wenn gilt:

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1 \oplus_A a_2) = f(a_1) \oplus_A f(a_2)$$

Ein bijektiver Homomorphismus heißt Isomorphismus.

Definition 12 (Äquivalenzrelation)**.** Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung $a \sim b$ zwischen Elementen von A mit Eigenschaften

- R_1 (Relation)für $\forall a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b$ oder $a \nsim b$
- R_2(Reflexivität) $a \sim a$
- R_3(Symmetrie) $a \sim b \implies b \sim a$
- R_4(Transitivität) $a \sim b$ und $b \sim c \implies a \sim c$

Definition 13 (Äquivalenzklasse)**.** $[a] := \{b \in A \mid b \sim a\}$
a heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse $[a]$.

Beispiel 2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
Man definiere folgende Äquivalenzrelation:

$$(n, m) \sim (n', m') :\Leftrightarrow n + m' = n' + m \Leftrightarrow n - m = n' - m'$$

R_1 und R_2 sind offenbar erfüllt.
R_3 $n + m' = n' + m \implies (n', m') \sim (n, m)$
R_4 $(n, m) \sim (n', m')$ und $(n', m') \sim (n'', m'')$ gilt:
$(n' + m') + m'' = (n' + m) + m'' = (n' + m'') + m = (m' + n'') + m$
$\implies n + m'' = n'' + m \implies (n, m) \sim (n'', m'')$

Die zugehörigen Äquivalenzklassen bestehen aus allen Paaren natürlicher Zahlen mit gleicher Differenz.