

Analysis I

Prof. Dr. Ekaterina Kostina

WS 2019/20

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	3
1.1 Mengen und Aussagen	3
1.2 Wahrheitstabellen	3
1.3 Abbildungen	4
1.4 Vollständige Induktion	6
1.5 Elemente der Kombinatorik	7
1.6 Grundlegendes über Zahlenmengen	9
1.7 Was ist ein Körper?	10
2 Die Reellen Zahlen	12
2.1 Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen	12
2.1.1 Zusammenfassung	18
2.2 Der Körper $\mathbb{R}$	18
2.3 Wichtige Aussage	21
2.4 Weitere Möglichkeiten, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu charakterisieren	21
2.5 Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$	25
2.6 Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$	26
3 Folgen und Reihen	29
3.1 Folgen	29
3.2 Konvergenz in $\mathbb{C}$	34
3.3 Unendliche Summe („Reihen“)	34
3.3.1 Konvergenzkriterien	36
3.4 Umordnen von Reihen	39
3.5 Das Cauchy-Produkt von Reihen	40
3.6 Potenzreihen	41
4 Funktionen und Stetigkeit	42
4.1 Grenzwerte bei Funktionen	42
4.2 Stetigkeit	45
4.3 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen	47
4.4 Gleichmäßige Stetigkeit	51
4.5 Trigonometrische Funktionen	52
4.6 Die Zahl π	55
5 Differentiation	57

5.1	Ableitung	57
5.2	Mittelwertsatz und Satz von Rolle	63
5.3	Höhere Ableitungen und Satz von Taylor	65
5.4	Die Regeln von de l'Hospital	67
6	Integration	69
6.1	Riemannintegral	69
6.2	Eigenschaften des Riemann-Integrals	72
6.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	75
6.4	Integrationsformeln	77
6.5	Uneigentliche Integrale	78

1 Grundlagen

1.1 Mengen und Aussagen

Definition 1.1. Seien A und B Mengen.

- **Teilmenge** $B \subset A$ bedeutet: jedes Element von B ist auch Element von A
 B ist eine Teilmenge von A ; bsp.: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- **Mengengleichheit** Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.
- **Strikte Teilmenge** B ist eine strikte Teilmenge von A , wenn es ein Element $a \in A$ gibt, mit $a \notin B$.
- **Leere Menge** oder Nullmenge " $\emptyset$ " enthält keine Elemente.
 Es gilt konventionsgemäß $\emptyset \in A$ für alle Mengen A
- **Vereinigung** von A und B : $A \cup B := \{ a \mid a \in A \text{ oder } a \in B \}$
- **Durchschnitt** von A und B : $A \cap B := \{ a \mid a \in A \text{ und } a \in B \}$
- **Differenz** von A und B : $A \setminus B := \{ a \mid a \in A \text{ und } a \notin B \}$
- **Produktmenge**: $A \times B := \{ (a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$
- **Disjunkte Mengen** A und B sind disjunkt, falls gilt: $A \cap B = \emptyset$

Bemerkung 1.2. Das ODER im mathematischen Sinne bedeutet das einschließliche oder und nicht das entweder oder.

1.2 Wahrheitstabellen

Definition 1.3. Seien V und E Aussagen.

Eine Aussage ist ein Satz, von dem eindeutig feststeht, ob er wahr oder falsch ist.

- **UND und ODER** Man definiere die Verknüpfungen UND $\wedge$ und ODER $\vee$ wie folgt:

V	E	$V \text{ und } E$	$V \text{ oder } E$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

- **Negation** Man definiere die NICHT-Verknüpfung wie folgt:

V	$\neg V$
w	f
f	w

- **Implikation** Wenn V gilt, gilt auch E . Man sagt: V ist hinreichende Bedingung für E , oder die Voraussetzungen von V sind hinreichend für die Gültigkeit von E . Die Gültigkeit von E ist notwendig für die Gültigkeit von V , oder die Ungültigkeit von E impliziert die Ungültigkeit von V . Es gilt: $V \implies E$ ist wahr, falls $\neg V$ oder E wahr ist.

V	E	$V \implies E$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

- **Äquivalenz** Man definiere die Äquivalenzrelation $V \Leftrightarrow E$ als:
 $V \Leftrightarrow E$ steht für $V \Rightarrow E$ und $E \Rightarrow V$.

V	E	$V \Leftrightarrow E$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Definition 1.4 (Quantoren). Man definiere folgende Quantoren:

- $\forall$ Allquantor, also als: für alle.
- $\exists$ Existenzquantor, also als: es existiert ein.
- $\exists!$ als: es existiert genau ein a .

Bemerkung 1.5. Häufig hilft es Aussagen zu negieren. Hierbei gelten folgende Regeln (können mit Hilfe von WT gezeigt werden):

- $\neg(\forall a \in A : V(a)) \Leftrightarrow (\exists a \in A : \neg V(a))$
- $\neg(\exists a \in A : V(a)) \Leftrightarrow (\forall a \in A : \neg V(a))$

Bemerkung 1.6 (Kontraposition). Zwei weitere Hilfsmittel:

- $(V \Rightarrow E) \Leftrightarrow (\neg E \Rightarrow \neg V)$
- $(V \Leftarrow E) \Leftrightarrow (\neg E \Leftarrow \neg V)$

Bemerkung 1.7. Zu Quantoren:

- Quantoren müssen immer angegeben werden.
- Die Reihenfolge der Quantoren ist essentiell.
 Bsp.: $T :=$ Menge aller Töpfe, $D :=$ Menge aller Deckel, $V(a, b) =$ Deckel b passt auf Topf a .
 $\forall a \in T : \exists b \in D : V(a, b)$ ist vermutlich wahr,
 $\exists b \in D : \forall a \in T : V(a, b)$ ist vermutlich falsch.

1.3 Abbildungen

Definition 1.8 (Abbildungen). Seien A, B Mengen. Eine Abbildung f zwischen A und B $f : A \rightarrow B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zugeordnet. Hierbei nenne man A Definitionsmenge von f und B Wertemenge von f .

Definition 1.9 (Folgen). Zahlenfolgen sind Abbildungen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Schreibweise: statt $a(n)$ wird a_n und statt $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ wird $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geschrieben.

Definition 1.10 (injektiv, surjektiv, bijektiv). Es sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

- Abbildung f heißt injektiv, wenn gilt:

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

- Abbildung f heißt surjektiv wenn gilt:

$$\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a).$$

- Abbildung f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 1.11. Es sei f eine Abbildung: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$. Dann ist f weder injektiv, noch surjektiv.

Jedoch ist $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$ surjektiv, aber nicht injektiv.

Und $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Definition 1.12 (Bild). Das Bild von A_1 (unter f):

$$f(A_1) := \{f(a) \mid a \in A_1\} = \{b \in B \mid \exists a \in A_1 : b = f(a)\}$$

Definition 1.13 (Urbild). Das Urbild von B_1 (unter f):

$$f^{-1}(B_1) := \{a \mid f(a) \in B_1\} \subset A$$

Definition 1.14 (Inverse). Zu einer bijektiven Abbildung existiert eine sogenannte Umkehrabbildung, auch Inverse, die ebenfalls bijektiv ist:

$$f^{-1} : B \rightarrow A \text{ mit } a = f^{-1}(b) :\Leftrightarrow b = f(a)$$

Bemerkung 1.15. Nur bijektive Abbildungen besitzen Inverse.

Die Notation $f^{-1}(B)$ hat zwei Bedeutungen:

- Urbild von B unter f
- Bild von B unter f^{-1}

Das Urbild ist also für beliebige Abbildungen definiert

Definition 1.16 (Komposition von Abbildungen). Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Abbildungen. Dann sei:

$$g \circ f : A \rightarrow C, (g \circ f)(a) := g(f(a))$$

Man sagt: $g \circ f$ heißt g komponiert f .

Definition 1.17 (Morphismen). Seien A und B Mengen mit einer gewissen Operation $\oplus_A$ bzw. $\oplus_B$, z.B. Addition, Multiplikation.

Die Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt homomorph (strukturerhaltend), wenn gilt:

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1 \oplus_A a_2) = f(a_1) \oplus_B f(a_2)$$

Ein bijektiver Homomorphismus heißt Isomorphismus.

Definition 1.18 (Äquivalenzrelation). Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung $a \sim b$ zwischen Elementen von A mit Eigenschaften

- R_1 (Relation) für $\forall a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b$ oder $a \not\sim b$
- R_2 (Reflexivität) $a \sim a$
- R_3 (Symmetrie) $a \sim b \implies b \sim a$
- R_4 (Transitivität) $a \sim b$ und $b \sim c \implies a \sim c$

Definition 1.19 (Äquivalenzklasse). $[a] := \{b \in A \mid b \sim a\}$
 a heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse $[a]$.

Beispiel 1.20. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Man definiere folgende Äquivalenzrelation:

$$(n, m) \sim (n', m') : \Leftrightarrow n + m' = n' + m \Leftrightarrow n - m = n' - m'$$

R_1 und R_2 sind offenbar erfüllt.

$$R_3 \quad n + m' = n' + m \implies (n', m') \sim (n, m)$$

$R_4 \quad (n, m) \sim (n', m')$ und $(n', m') \sim (n'', m'')$ gilt:

$$(n' + m') + m'' = (n' + m) + m'' = (n' + m'') + m = (m' + n'') + m \\ \implies n + m'' = n'' + m \implies (n, m) \sim (n'', m'')$$

Die zugehörigen Äquivalenzklassen bestehen aus allen Paaren natürlicher Zahlen mit gleicher Differenz.

1.4 Vollständige Induktion

Beispiel 1.21. Betrachte die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+2)}{2} = 1.$$

Induktionsschritt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

Definition 1.22. Seien $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$

$a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = \sum_{k=m}^n a_k$. Falls $m > n$, dann $\sum_{k=m}^n a_k := 0$

Beispiel 1.23. Definiere rekursiv für $x \in \mathbb{R}$: $x^0 := 1$ und $x^{n+1} := x \cdot x^n, n \in \mathbb{N}_0$ Betrachte

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n, x \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

geometrische Summenformel.

Beweis. Induktionsanfang für $n = 1$:

$$1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}.$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{(1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

□

Alternativbeweis mit Teleskop-Summe.

$$\begin{aligned}
 1 - x^{n+1} &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - \dots - x^n + x^n - x^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^n x^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n x^k - x \sum_{k=0}^n x^k \\
 &= (1 - x) \sum_{k=0}^n x^k.
 \end{aligned}$$

□

Als Anwendung der geometrischen Summenformel ergeben sich nützliche Formeln, z.B. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Beweis. Für $a = 0$ und $a = b$ stimmt die Formel offenbar.

Betrachte geometrische Reihe mit $x := \frac{b}{a} \neq 1$

$$\begin{aligned}
 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n &= 1 - x^n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \left(1 - \frac{b}{a}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k \quad | \cdot a^n \\
 \implies a^n - b^n &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k} = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.
 \end{aligned}$$

□

1.5 Elemente der Kombinatorik

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Fakultät $n!$ rekursiv definiert durch:

$$1! := 1 \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)! = n!(n+1).$$

Per Definition $0! := 1$

Satz 1.24 (Permutationen). Die Anzahl aller Anordnungen (oder Permutationen) von $n \in \mathbb{N}$ Elementen ist $n!$.

Beweis. Induktionsanfang:

$n = 1$: Eine Anordnung 1

$n = 2$: Zwei Anordnungen 12, 21

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: Anzahl von Anordnungen der Elemente $1, \dots, n+1$, die das Element $(n+1)$ auf Platz 1 hat bei beliebiger Anordnung der anderen Elemente nach Induktionsannahme ist $n!$. Für jedes der $n+1$ Plätze ergeben sich wieder $n!$ Anordnungen, d.h. insgesamt: $n!(n+1) = (n+1)!$ □

Definition 1.25 (Binomialkoeffizient). Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir:

$$n \geq k \geq 1: \binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$k = 0: \binom{n}{0} := 1$$

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k -Elementigen Teilmengen einer n -Elementigen Menge, z.B.: Lotto $\binom{49}{6} = 13.983.816$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \end{aligned}$$

Es folgt $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.26. Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-(k-1)+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-k+1)}{(k-1)!k} \\ &= \frac{(n-1)\dots(n-k+1)(k+n-k)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.27. Mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

bzw

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

berechnet man die Binomialkoeffizienten explizit, auch bekannt als „Pascalsches Dreieck“.

Satz 1.28 (Binomische Formel). Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

bzw.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

Beweis durch Induktion. Induktionsanfang $n = 1$:

$$a+b = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = 1a + 1b.$$

Annahme: Die Formel gilt für ein $n \geq 1$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
 &= (a+b) \left(\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \right) \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a b^n \\
 &\quad + \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.
 \end{aligned}$$

□

1.6 Grundlegendes über Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen.

Auf $\mathbb{N}$ sind die arithmetischen Operationen „+“ (Addition) und „·“ (Multiplikation) definiert. Für diese gelten u.a. die Regeln:

$n + m = m + n$ bzw. $n \cdot m = m \cdot n$	Kommutativität
$(n + m) + k = n + (m + k)$ bzw. $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$	Assoziativität
$(n + m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k$	Distributivität

Subtraktion und Division sind nicht für alle Paare der natürlichen Zahlen definiert ($1 - 2 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$), d.h. die natürlichen Zahlen sind bezüglich der Subtraktion und Division „unvollständig“. Dies bedeutet, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ z.B.: die Gleichung

$$n + x = m$$

nicht immer lösbar ist.

Deshalb werden die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen erweitert.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ganze Zahlen.

In $\mathbb{Z}$ hat die Gleichung $n + x = m$ die (eindeutige) Lösung: $x = m - n \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ ist vollständig bezüglich der Subtraktion aber unvollständig bezüglich der Division, d.h. für beliebige $b, y \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, ist die „lineare“ Gleichung $b \cdot x = y$ nicht immer durch ein $x \in \mathbb{Z}$ lösbar.

Diese Beschränkung wird durch die Einführung der rationalen Zahlen behoben:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N} \right\}.$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist vollständig bezüglich der vier elementaren arithmetischen Operationen (bis auf die unzulässige Division durch Null).

$$a = \frac{r}{s}, b = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} a + b = \frac{r}{s} + \frac{u}{v} & := \frac{r \cdot v + u \cdot s}{s \cdot v} \\ a - b & := \frac{r \cdot v - u \cdot s}{s \cdot v} \\ a \cdot b & := \frac{r \cdot u}{s \cdot v} \\ \frac{a}{b} & := \frac{r \cdot v}{s \cdot u} \end{cases}.$$

$\mathbb{Q}$ bildet mit der Operation „+“ und „·“ einen „Körper“.

1.7 Was ist ein Körper?

Sei K eine Menge mit Operationen „+“ und „·“.

Operation „+“ erfüllt die Axiome der Addition

(A1) Kommutativität $\forall a, b \in K: a + b = b + a$

(A2) Assoziativität $\forall a, b, c \in K: (a + b) + c = a + (b + c)$

(A3) Neutrales Element $\exists 0 \in K: \forall a \in K: a + 0 = a$

(A4) Additives Inverses $\forall a \in K: \exists -a \in K: a + (-a) = 0$

Operation „·“ erfüllt die Axiome der Multiplikation

(M1) Kommutativität $\forall a, b \in K: a \cdot b = b \cdot a$

(M2) Assoziativität $\forall a, b, c \in K: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(M3) Neutrales Element $\exists 1 \in K \setminus \{0\} =: K^*: \forall a \in K: a \cdot 1 = a$

(M4) Additives Inverses $\forall a \in K: \exists a^{-1} \in K: a \cdot a^{-1} = 1$

Zusätzlich erfüllen „+“ und „·“ die Distributivität (D):

$$\forall a, b, c \in K: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Definition 1.29 (Körper). Eine Menge K mit Operationen „+“ und „·“ ($K, +, \cdot$) die Axiome A1-A4, M1-M4 und D erfüllt, heißt Körper.

Beispiel 1.30. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper

Definition 1.31 (Angeordneter Körper). Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Es $\exists p \subset K$ eine Teilmenge, die Axiome erfüllt:

1. $\forall a \in K$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

(a) $a \in p$

(b) $a = 0$

(c) $-a \in p$

2. Aus $a > 0$ und auch $b > 0$ folgt: $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Dann heißt $(K, +, \cdot, >)$ angeordneter Körper.

Definition 1.32 (Positivität). Sei $(K, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. $a \in K$ heißt positiv falls $a > 0$. $a \in K$ heißt negativ falls $a < 0$.

$$K^+ := \{a \in K \mid a > 0\}.$$

$$K^- := \{a \in K \mid a < 0\}.$$

Ordnungsrelation für $a, b \in K$

$$\begin{aligned} a < b &\iff b - a \in K^+ \\ b > a &\iff a < b \\ a \leq b &\iff a < b \vee a = b \\ b \geq a &\iff a \leq b \end{aligned}$$

Für je zwei $a \in K, b \in K$ gilt genau eine der Relationen $a < b, a = b, a > b$.

Es gelten folgende Regeln:

- $a < b, b < c \implies a < c$ Transitivität
- $a < b \implies a + c < b + c, c \in K$
- $a < b \implies a \cdot c < b \cdot c, c \in K^+$
- $a \geq b, b \geq a \iff a = b$
- $a < b, a > 0, b > 0 \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Beispiel 1.33 (Positivität auf $\mathbb{Q}$).

$$\mathbb{Q}^+ := \left\{ a \in \mathbb{Q} \mid a = \frac{r}{s}, r, s \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definition 1.34 (Absolutbetrag). Sei $(K, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. Dann ist

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}.$$

eine Abbildung $|\cdot|: K \rightarrow K$ mit den Eigenschaften:

- $|a| = 0 \iff a = 0$ (Definitheit)
- $|ab| = |a||b|$ (Multiplikativität)
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis der Dreiecksungleichung. Beobachtung: $\pm a \leq |a| \implies a + b \leq |a| + |b| \implies -(a + b) \leq |a| + |b|$ $\square$

Es folgt aus den Eigenschaften:

- $|a - b| = 0 \implies a = b$
- $|-a| = |a|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (folgt aus: $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ und $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$)

Satz 1.35 (Dezimalbruchdarstellung). Jede rationale Zahl a besitzt eine endliche oder periodische Dezimalbruchdarstellung der Form:

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 \dots d_s) : \iff a = \pm \left(a_0 + \sum_{k=1}^s d_k \cdot 10^{-k} \right).$$

bzw.

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 \dots d_s \overline{d_{s+1} \dots d_{s+t}}).$$

$a_0 \in \mathbb{N}_0, d_1 \dots d_s \in \{0, 1, \dots, 9\}$ Ziffern

Umgekehrt stellt jede Dezimalbruchzerlegung dieser Art eine rationale Zahl dar.

Hier: bei periodischen Dezimalbrüchen ist die Periode $\overline{9}$ nicht zugelassen:

$$a_0, d_1 \dots d_{k-1} d_k \overline{9} := a_0 + 0, d_1 \dots d_k (d_k + 1), d_k < 9.$$

Beweis. Siehe Lehrbuch

□

2 Die Reellen Zahlen

2.1 Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen

Lemma 2.1 (Irrationalität der Quadratwurzel). Die quadratische Gleichung $x^2 = 2$ besitzt keine rationale Lösung.

Beweis durch Widerspruch. Angenommen: Es existiert eine rationale Lösung

$$x := \sqrt{2} = \frac{r}{s}.$$

mit Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$.

O.B.d.A. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) nehmen wir an, dass r und s teilerfremd sind.

Dann gilt: $r \neq 0$ und $r^2 = 2s^2$ und $\frac{1}{2}r^2 = s^2$. Also muss r^2 und auch r gerade sein, denn $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ ungerade (Kontraposition). Damit sind auch $\frac{1}{2}r^2$ gerade und s^2 gerade.

Aber wegen Teilerfremdheit können r^2 und s^2 nicht beide durch zwei teilbar sein. $\implies$ Widerspruch zur Annahme □

Bemerkung 2.2. Allgemeiner: „quadratische“ Gleichung

$$a + bx + cx^2 = 0.$$

ist nicht für beliebig gewählte $a, b, c \in \mathbb{Q}$ durch ein $x \in \mathbb{Q}$ lösbar.

Bemerkung 2.3 (Beweisarten). Direkter Beweis:

$$E \implies E_1 \implies E_2 \implies \dots \implies E_k \implies V.$$

Indirekter Beweis: Zeigen E und $\neg V$ immer falsch. Da E immer wahr ist, muss $\neg V$ falsch sein. Da $\neg V$ falsch ist, ist V wahr.

Ziel: Konstruiere rationale Zahlen, welche die Gleichung $x^2 = 2$ mit zunehmender Genauigkeit erfüllen, z.B. rekursiv durch Einschließung mit Hilfe von Dezimalbrüchen.

Wir nutzen die Eigenschaft: $a, b > 0$ und $a^2 < b^2 \implies a < b$, folgt aus:

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a), (b + a > 0).$$

Start: $a_1 := 1, 4, b_1 := 1, 5$ mit $a_1 < b_1, a_1^2 = 1, 96 < 2 < 2, 25 = b_1^2$

2 Fälle:

Fall a) Es liege für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Einschließung vor:

$$a_n = 1, d_1 d_2, \dots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1} (d_n + 1).$$

$$a_n^2 < 2 < b_n^2.$$

$$d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, k = 1 \dots n-1, d_n \leq 8$$

Die nächste Einschließung ist

$$a_{n+1} := 1, d_1 \dots d_n, d_{n+1} \quad d_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

a_{n+1} möglichst groß aber $a_{n+1}^2 < 2$.

und

$$b_{n+1} := \begin{cases} 1, d_1, \dots, d_n(d_{n+1} + 1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8 \\ 1, d_1, \dots, (d_n + 1)0 & \text{für } d_{n+1} = 9 \end{cases}.$$

Nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} < b_{n+1} < b_n. \\ a_{n+1}^2 &< 2 < b_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Fall b) Für ein $n \in \mathbb{N}$ liegt eine Einschließung vor

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, d_1 \dots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1} (d_n + 1) 0 \dots 0. \\ a_n^2 &< 2 < b_n^2 \text{ mit } d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, k = 1 \dots n-1. \\ d_n &\leq 8, d_{n+1} = \dots = d_n = 9. \end{aligned}$$

Die nächste Einschließung

$$a_{n+1} := 1, d_1 \dots d_n, d_{n+1}, d_{n+1} \in 0, 1, \dots, 9.$$

a_{n+1} möglichst groß, aber $a_{n+1}^2 < 2$.

$$b_{n+1} = \begin{cases} 1, d_1 \dots d_n (d_{n+1} + 1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8 \\ 1, d_1 \dots d_{n-1} (d_n + 1) 0 \dots 0 & \text{für } d_{n+1} = 9 \end{cases}.$$

Der Fall b) kann nur endlich oft hintereinander auftreten, dann wäre $a_n = b_n$ ab einem gewissen n und folglich $a_n^2 = 2$

Nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} < b_{n+1} < b_n. \\ a_{n+1}^2 &< 2 < b_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten 2 Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften

$$1, 4 = a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq \dots b_1 = 1, 5.$$

Konkret: $a_1 = 1, 4, a_2 = 1, 41, a_3 = 1, 414, b_1 = 1, 5, b_2 = 1, 42, b_3 = 1, 415$

Abstand $b_n - a_n \leq 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ wird immer kleiner $\implies$ wir sollen die Zahl $\sqrt{2}$ eventuell erfassen!

Definition 2.4 (Zahlenfolge). Eine Menge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nummerierter rationaler Zahlen wird „Folge“ genannt.

Beispiel 2.5. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{5}{4}$$

Offenbar, $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

d.h. Folge konvergiert gegen 1

Definition 2.6 (Konvergenz). Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent, gegen einen „Limes“ a , wenn gilt:

$$|a_n - a| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Falls $|a_n|, n \rightarrow \infty$ heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strikt divergent.

Präziser (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist „konvergent“ gegen einen Grenzwert a , wenn:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n := n(\epsilon) = n_\epsilon.$$

sodass

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für } n \geq n_\epsilon.$$

Lemma 2.7. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy Folgen.

Beweis. Sei $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, aber $b < a$. Dann $\exists \delta > 0$ mit $b + \delta = a$.

Wegen der Konvergenz:

$$b_n \rightarrow b, a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$$

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |b - b_n| \leq \frac{1}{2}\delta.$$

und

$$|a - a_n| \leq \frac{1}{2}\delta \quad \forall n > n_\epsilon.$$

Dann

$$b_n = b_n - b + b - a + a - a_n + a_n \leq |b_n - b| + b - a + |a - a_n| + a_n \leq \frac{1}{2}\delta - \delta + \frac{1}{2}\delta + a_n = a_n.$$

$\Rightarrow$

$$b_n \leq a_n.$$

Widerspruch zur Annahme, dass $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 2.8 (Folgerung aus 3). Sei Cauchy-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge und $a_n \rightarrow a, a > 0, n \rightarrow \infty$. Dann $a_n > 0$ für fast alle n .

Beweis. Annahme: $a_n \leq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann $a_n \rightarrow a \leq 0 \leftarrow \{0\} \quad n \in \mathbb{N}$ □

Ziel: Reelle Zahlen als Grenzwerte von rationalen Cauchy Folgen.

Wichtig: Zwei Cauchy Folgen mit gleichem Limes definieren gleiche Zahl. Deshalb: Äquivalenzklassen

Definition 2.9 (Äquivalenzrelation für Cauchy Folgen rationaler Zahlen).

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff |a_n - a'_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Die Relation ist Äquivalenzrelation. 1. Reflexivität ($a \sim a$) (trivial)

2. Symmetrie ($a \sim b \implies b \sim a$)

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff |a_n - b_n| \rightarrow 0 \iff |b_n - a_n| \rightarrow 0 \iff (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

3. Transitivität $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (c_n)_{n \in \mathbb{N}} &\iff |a_n - b_n| \rightarrow 0, |b_n - c_n| \rightarrow 0 \\ &\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ s.d.} \\ &\quad \forall n \geq n_\epsilon. \end{aligned}$$

Dann

$$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|.$$

□

Definition 2.10 (Äquivalenzklassen).

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{R}} &:= \{[a_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \\ &= \{(a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \\ &= \{(a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a'_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0\}.\end{aligned}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Repräsentant von Klasse $[(a_n)]_{n \in \mathbb{N}}$

Bemerkung 2.11. $a \in \mathbb{Q} \implies$

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n := a] \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ einer Cauchy Folge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Jede Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ von Cauchy Folge rationaler Zahlen definiert genau eine reelle Zahl

Satz 2.12. Jeder Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ entspricht genau einem (möglicherweise unendlichen) Dezimalbruch.

Die Menge aller dieser Dezimalbrüche wird bezeichnet als Menge $\mathbb{R}$ der „reellen Zahlen“.

$$\mathbb{R} = \{a := \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_k \mid a_0 \in \mathbb{N}_0, d_k \in \{0, \dots, 9\})\}.$$

Für eine CF rationaler Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird $a \in \mathbb{R}$ als Grenzwert bezeichnet:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt eine „approximierende“ Folge von $a \in \mathbb{R}$. In diesem Sinne hat jede CF rationaler Zahlen nach Konstruktion einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Bemerkung 2.13 (Erinnerung Geometrische Reihe).

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, x \neq 1.$$

Beweis. 1. $\forall a \in \mathbb{R} \exists [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}$

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots).$$

definieren wir eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (rationaler) endlicher Teilbrüche:

$$a_n = \pm(a_0, d_1 \dots d_n), a_0 \in \mathbb{N}_0, d_k \in \{0, \dots, 9\}.$$

zu zeigen: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy Folge.

Sei $m > n + 1$, dann

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |a_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_n - (a_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_n d_{n+1} \dots d_m)| \\ &= |0, 00 \dots 0 d_{n+1} \dots d_m| \\ &= d_{n+1} 10^{-(n+1)} + \dots + d_m 10^{-m} \\ &\leq 10^{-n} (d_{n+1} 10^{-1} + \dots + d_m 10^{-m+n}) \\ &\leq 10^{-n} (10^0 + \dots + 10^{-m+n+1}) \\ &= 10^{-n} \left(\left(\frac{1}{10} \right)^0 + \dots + \frac{1}{10}^{m-n-1} \right) \\ &= 10^{-n} \frac{1 - \frac{1}{10}^{m-n}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &\leq 10^{-n} \frac{1}{\frac{9}{10}} \\ &= 10^{-n} \frac{10}{9} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

$\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy Folge und repräsentiert eine Klasse $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}$
„Einbettung“ $a \mapsto [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$

2. Wir zeigen, dass diese „Einbettung“ bijektiv ist.

a) $a \mapsto [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ ist injektiv ($\forall a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt: aus $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt $a = a'$)

Für

$$\begin{aligned} a &= a_0 + 0, d_1 d_2 \dots \\ a' &= a'_0 + 0, d'_1 d'_2 \dots \end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a'_n| &= |a_0 + 0, d_1 \dots d_n - (a'_0 + 0, d'_1 \dots d'_n)| \\ &\leq \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon, \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

$$\implies a = a'$$

b) „Einbettung“ $a \mapsto [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ ist surjektiv

(i) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge

$$\implies z = 0 = 0,00\dots$$

(ii) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge Dann fast alle $a_n > 0$ oder fast alle $a_n < 0$ O.B.d.A. $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$

Ziel: $z \geq 0$ zu konstruieren.

Falls $a_n < 0$ (bzw. $-a_n > 0$ konstruiert $-z$)

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \implies \text{beschränkt} \implies \exists N \in \mathbb{N} (N \geq 2) \text{ s.d. } 0 < a_n < N, n \in \mathbb{N}.$$

Dann $\exists z_0 \in \mathbb{N}_0$, s.d. im Intervall:

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq z_0 \leq x < z_0 + 1 < n\}.$$

unendlich viele Elemente von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liegen.

□

Heute: Frustcafé (deswegen kürzere Plenarübung)

Nächsten Mittwoch: Vorlesung fällt aus, aber Ersatztermin wird gesucht.

Fortsetzung Beweis:

Beweis. 1. Zz: $\forall [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}} \exists z \in \mathbb{R}$

$$z = \pm (z_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots).$$

O.B.d.A. $z > 0, a_n > 0, n \in \mathbb{N}$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ C.F.} \implies 0 < a_n < N \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\implies z_0 \in \mathbb{N}_0, \text{ s.d. O.B.d.A. } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I_0$$

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq z_0 \leq x < z_0 + 1 < N\}.$$

I_0 wird unterteilt in 10 Teilintervalle.

Für ein $d_1 \in \{0, \dots, 9\}$ ein Intervall

$$I_1 := \{x \in I_0 \mid z_0 + d_1 \cdot 10^{-1} \leq x < z_0 + (d_1 + 1) \cdot 10^{-1}\}.$$

Sei $z_1 = z_0 + 0, d_1$, dann

$$I_1 = \{x \in I_0 \mid z_1 \leq x < z_1 + 10^{-1}\}.$$

$$\implies \exists n_1 \text{ Index s.d. } |z_1 - a_{n_1}| \leq 10^{-1}$$

usw. ...

Ergebnis: eine Folge von Teilintervallen

o.B.d.A.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \dots \subset I_{k+1} \subset I_k \subset \dots \subset I_1 \subset I_0.$$

$$z_k := z_{k-1} + d_k \cdot 10^{-k} \in \mathbb{Q}.$$

$$I_k = \{x \in I_{k-1} \mid z_k \leq x < z_k + 10^{-k}\}.$$

$$\exists n_k : \text{Index s.d. } |z_k - a_{n_k}| \leq 10^{-k}$$

Das heißt für eine Folge

$$z_k := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}.$$

existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von der C.F. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, s.d. $|z_k - a_{n_k}| \leq 10^{-k}$, $k \in \mathbb{N} \implies (z_k - a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Nullfolge, d.h.

$$\implies (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\implies (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\implies (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

und der resultierende Dezimalbruch ist:

$$z := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k \dots \in \mathbb{R}.$$

Wir haben gezeigt:

$$\forall [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}: \exists z \in \mathbb{R}.$$

Damit: $\implies$ Abbildung ist surjektiv und damit bijektiv.

$$\implies \exists \text{ „inverse Abbildung“ } : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

die auch bijektiv ist.

Diese Abbildung ist auch verträglich mit der Addition und der Multiplikation, d.h. $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mapsto a$ und $[(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mapsto a'$

$$\text{Dann } [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}] := a + a'$$

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \cdot [(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}] := a \cdot a'$$

Abbildung $\mathbb{R} \longleftrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist Isomorphismus. □

Bemerkung 2.14. Die Darstellung ist durch einen Dezimalbruch ist nicht immer eindeutig. z.B.:

$$0,9999\dots = 0,\overline{9} = 1 = 1,0000\dots$$

Deshalb, falls $z = z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k 999 d_k \leq 8$ dann:

$$z := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots (d_k + 1) 0 \dots$$

Bemerkung 2.15. Der Satz gilt auch für „b-adische“ Brüche mit Basis $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$: $a \in \mathbb{R}$ besitzt eine sogenannte „b-adische Entwicklung“:

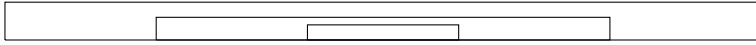
$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 \dots) = \pm(a_0 + d_1 \cdot b^{-1} + d_2 \cdot b^{-2} + \dots).$$

mit $a_0 = g_0 + g_1 \cdot b + g_2 \cdot b^2 + \dots \in \mathbb{N}_0$ mit Ziffern $d_n, g_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ Für $b = 2$: dijadische Entwicklung

2.1.1 Zusammenfassung

Beobachtung: Jede reelle Zahl ist ein Grenzwert von einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen.

Beispiel: $\sqrt{2}$



$\forall (a_n), (b_n) \ a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a \iff (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge.

Deshalb:

- Definiere C.F. rationaler Zahlen
- Äquivalenzrelation:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Nullfolge .}$$

und Äquivalenzklasse:

$$\overline{R} := \{[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]\}.$$

- Eine Klasse aus $\overline{\mathbb{R}} \iff$ eine reelle Zahl

Konstruktion nach Cantor, 1873

Als nächstes: $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper mit „+“, „·“, „>“ und ist auch „vollständig“.

2.2 Der Körper $\mathbb{R}$

Seien $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zugehörige approximierende Folgen rationaler Zahlen.

Alle Struktureigenschaften von $\mathbb{Q}$ sind über den Grenzübergang auf $\mathbb{R}$ übertragbar.

Definition 2.16 (Absolutbetrag).

$$|a| := \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|.$$

Folglich: Begriffe „Konvergenz“ und „Cauchy-Folgen“ gelten auch für Folgen reeller Zahlen.

Definition 2.17 (Arithmetische Grundoperationen).

$$a + b := \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n).$$

$$a \cdot b := \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n).$$

Definition 2.18 (Ordnungsrelation).

$$a > b : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) > 0.$$

und folglich: $\exists \alpha \in \mathbb{Q}_+$ s.d. $a_n - b_n \geq \alpha$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

$$a \geq b : \iff a > b \text{ oder } a = b.$$

$$a < b : \iff b > a.$$

$$a \leq b : \iff b \geq a.$$

Definition 2.19 (Positivität).

$$\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}.$$

Bemerkung 2.20. Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Folge:

Beispiel für Absolutbetrag. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei approximierende Folgen von a , d.h. $(a_n - a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Zu zeigen:

$$|a| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n|.$$

d.h. zu zeigen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n| \\ \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n| - |a'_n|) &= 0. \end{aligned}$$

Betrachte:

$$||a_n| - |a'_n|| \leq |a_n - a'_n| < \epsilon.$$

$\implies (|a_n| - |a'_n|)$ ist Nullfolge

$\implies |a_n| = |a'_n|$

$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n| = |a|$

□

Die anderen Beweise folgen analog.

Satz 2.21 (Der vollständige Körper $\mathbb{R}$). 1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ ist angeordneter Körper

2. $\mathbb{Q}$ ist Unterkörper von $\mathbb{R}$

3. Der Körper $\mathbb{Q}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

4. Der Unterkörper $\mathbb{Q}$ ist „dicht“ in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists q_\epsilon \in \mathbb{Q} \text{ s.d. } |a - q_\epsilon| < \epsilon.$$

Beweis. 1) Körperaxiome (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität) sind trivial

Neutrales Element der Addition:

$$0 := 0, 0 \dots 0 \text{ Klasse der Nullfolgen z.B.: } a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neutrales Element der Multiplikation

$$1 := 1, 0 \dots 0 \quad [(1)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Existenz der inversen Elemente bezüglich der Addition

$$a + x = 0, a \in \mathbb{R}.$$

$$x = -a = \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n).$$

Existenz der inversen Elemente bezüglich der Multiplikation

$$b \cdot x = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$x = \frac{1}{b} := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = ?$$

$$b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$$

$$\implies (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ keine Nullfolge} \implies \text{fast alle Elemente } b_n \neq 0 \text{ (Übung!)}$$

Definiere:

$$c_n := \begin{cases} 0 & b_n = 0 \\ \frac{1}{b_n} & b_n \neq 0 \end{cases}.$$

Dann $(b_n \cdot c_n) =$

$$(b_n \cdot c_n) = \begin{cases} 0 & b_n = 0 \\ 1 & b_n \neq 0 \end{cases}.$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n \cdot c_n) = 1$$

- 2) $a \in \mathbb{Q}$ entspricht $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ mit $a_n = a \forall n \in \mathbb{N} \implies \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ Körper
 $\implies \mathbb{Q}$ Unterkörper von $\mathbb{R}$.
- 3) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine C.F. reeller Zahlen.

$$\forall a_n \in \mathbb{R} \exists \text{ approx. Folge } (a_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}.$$

$$a_{n,m} \in \mathbb{Q} \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

$$a_n := \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} \in \mathbb{R}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle $k_n \in \mathbb{N}$ mit:

$$|a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{n}.$$

Wir zeigen, dass $(a_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen eine C.F. ist.

Sei $\epsilon > 0$. Dann

□

Bemerkung 2.22 (Organisatorisches). Nächsten Mittwoch (20. November) findet keine Vorlesung und auch keine Plenarübung statt. Aber Mittwoch (27.11.) Vorlesung statt Plenarübung im großen Hörsaal Chemie

Satz 2.23 (Wichtiger Satz). Der Körper $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Limes

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge reeller Zahlen, d.h. $a_n \in \mathbb{R}$.

$$a_n \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \exists \text{ C.F. } (a_{n,m}).$$

$$a_{n,m} \in \mathbb{Q} \forall n, m \in \mathbb{N}, a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle Index $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{n}.$$

k_n existiert, weil $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} = a_n$ und damit $|a_n - a_{n,m}| \rightarrow 0$ also $\exists \epsilon |a_n - a_{n,m}| < \epsilon < \frac{1}{n}$ und Archimedisches Axiom.

Ziel: zu zeigen $(a_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen ist Cauchy Folge.

Sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n, m \geq n_\epsilon$:

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{3}\epsilon, |a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{3}\epsilon$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ C.F.}$$

$$|a_m - a_{m,k_m}| < \frac{1}{3}\epsilon \text{ (AA).}$$

und folglich

$$|a_{n,k_n} - a_{m,k_m}| \leq |a_{n,k_n} - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - a_{m,k_m}| < \epsilon.$$

$\implies (a_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy Folge $\implies$ Nach Konstruktion der $\mathbb{R}$ folgt, dass $\exists$ „limes“ $a \in \mathbb{R}$, s.d.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\epsilon : |a_{n,k_n} - a| < \epsilon.$$

Dann gilt für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n,k_n}| + |a_{n,k_n} - a| \leq \frac{1}{n} + |a_{n,k_n} - a| \rightarrow 0.$$

$$\implies a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ gilt } \forall \epsilon > 0 \exists q_\epsilon \in \mathbb{Q} \text{ s.d. } |a - q_\epsilon| \leq \epsilon.$$

Nach Konstruktion von $\mathbb{R}$ folgt:

$$\begin{aligned} \forall \text{C.F. } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} : \\ \exists a \in \mathbb{R} : a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \end{aligned}$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq n_\epsilon$$

□

Bemerkung 2.24 (Archimedisches Axiom).

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \text{s.d. } n - a > 0 \\ \implies \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.d. } n - \frac{1}{\epsilon} > 0 \\ \implies \frac{1}{n} < \epsilon. \end{aligned}$$

2.3 Wichtige Aussage

$\mathbb{R}$ ist vollständig, da alle C.F. in $\mathbb{R}$ haben einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

2.4 Weitere Möglichkeiten, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu charakterisieren

Definition 2.25 (Maximum, Minimum, obere/untere Schranke, Supremum, Infimum). Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$.

Maximum:

$$\max M := b \in M : b \geq x, \forall x \in M.$$

Minimum:

$$\min M := a \in M : x \geq a, \forall x \in M.$$

Obere Schranke:

$$b \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } b \geq x, \forall x \in M.$$

Untere Schranke:

$$a \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } x \geq a, \forall x \in M.$$

Eine Menge M heißt nach oben (unten) beschränkt, falls eine obere (untere) Schranke von M existiert.

Supremum: kleinste obere Schranke

Infimum: größte untere Schranke

Beispiel 2.26. • $\mathbb{N}$ ist von unten beschränkt, z.B. mit 0. $\min \mathbb{N} = 1$, von oben unbeschränkt.

- $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$: obere Schranke ist $\sqrt{2}$ und untere Schranke ist $-\sqrt{2}$, aber M besitzt kein Maximum bzw. Minimum. $\sqrt{2}$ ist Supremum und $-\sqrt{2}$ ist Infimum

Bemerkung 2.27. Falls $b = \sup M \iff$:

1. b ist eine obere Schranke von M , d.h. $\forall x \in M : x \leq b$ und
2. Jede Zahl $c < b$ ist keine obere Schranke von M , d.h. $\forall c \in M, c < b, \exists x \in M : c < x$ (oder $\forall \epsilon > 0 \exists x \in M : x > b - \epsilon$)

Analog für $a = \inf M$

Beispiel 2.28.

$$I = (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

dann gilt $\sup I = b, \inf I = a$.

Bemerkung 2.29. Das Supremum (Infimum) muss nicht zur Menge M gehören, aber falls $\sup M \in M$, dann $\sup M = \max M$.

Satz 2.30 (Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ Nr. 2). $\mathbb{R}$ vollständig $\iff$ jede nichtleere beschränkte Teilmenge $M \in \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum bzw. Infimum

Definition 2.31 (Intervalle).

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall.

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall.

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall.

$[a, b)$ analog.

Definition 2.32 (Intervallschachtelung). ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n := [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}, n \in \mathbb{N}$ mit Eigenschaften. 1) $I_{n+1} \subset I_n, n \in \mathbb{N}$ (bedeutet $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$) 2) $\forall \epsilon > 0, \exists I_n$ mit der Länge

$$|b_n - a_n| < \epsilon \text{ d.h. } |b_n - a_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Satz 2.33 (Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ Nr. 3). Vollständigkeit in $\mathbb{R} \iff$ Intervallschachtelungseigenschaft d.h. für jede Intervallschachtelung.

$$(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$$

so dass

$$c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I_n \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Diese Aussage ist verwandt mit dem Axiom vom Dedekindschen Schnitt

Satz 2.34 (Trennungseigenschaft). Seien $A, B \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ mit $a < b \forall a \in A, b \in B$

Dann existiert immer ein $c \in \mathbb{R}$, welches A und B trennt:

$$\forall a \in A, b \in B \text{ gilt } a \leq c \leq b.$$

Dies ist ebenfalls $\iff$ zur Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

Lemma 2.35 (Existenz der k -ten Wurzel einer positiven reellen Zahl). $\forall a \in \mathbb{R}^+ \forall k \in \mathbb{N}$: existiert eine positive k -te Wurzel. Das heißt die Lösung der Gleichung

$$x^k = a.$$

ist $\sqrt[k]{a}$ (Bezeichnung).

Beweis. 1) Die Eindeutigkeit der $\sqrt[k]{a}$ (falls sie existiert)

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zwei k -te Wurzeln des $a \in \mathbb{R}^+$:

$$x_1^k = a = x_2^k.$$

Dann gilt:

$$0 = x_1^k - x_2^k = (x_1 - x_2) \underbrace{\sum_{m=0}^{k-1} x_1^{k-1-m} x_2^m}_{>0}.$$

mit dieser Hilfsformel

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

$$\implies x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$$

2) Existenz: $a = 1 \implies \sqrt[k]{1} = 1$ ($1^k = 1$) Sei $a > 1$ und Annahme, dass $\exists$ Wurzel für $0 < a' < 1$
Dann definiere:

$$\sqrt[k]{a} := \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{a}}}.$$

$$(\sqrt[k]{a})^k = \left(\frac{1}{\sqrt[k]{a'}} \right)^k = \frac{1}{\sqrt[k]{a'^k}} = \frac{1}{a'} = a.$$

Es bleibt zu zeigen: $\exists \sqrt[k]{a}$ für $0 < a < 1$. □

Heute: Längstes deutsches Wort!

„Intervallschachtelungseigenschaft hat ganze 33 Buchstaben“ meint Kostina.

Fortsetzung des Beweises vom letzten Mal. Ab jetzt: n statt k .

Zu zeigen: Es existiert eine Wurzel für $0 < a < 1$.

Definiere Menge $M := \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 1, y^n < a\}$

$M \neq \emptyset$, weil $\frac{1}{2}a \in M$. M ist auch beschränkt, untere Schranke 0, obere Schranke 1.

Da $\mathbb{R}$ vollständig $\implies \exists \sup M =: x$.

Zu zeigen: $x^n = a$ Annahme: $x^n < a$. Wegen $(x+1) \notin M$ gilt $(x+1)^n > a$. Konstruiere:

$$\tau := \frac{\overbrace{a - x^n}^{>1}}{(x+1)^n - x^n}.$$

$$\begin{aligned} (x+\tau)^n &= x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \tau^k x^{n-k} \\ &< x^n + \tau \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= x^n + \tau((x+1)^n - x^n) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} x^n + (a - x^n) = a. \end{aligned}$$

$\implies$

$$(x+\tau)^n < a \implies (x+\tau) \in M.$$

und damit:

$$x + \tau > x \quad \text{Widerspruch zu } x = \sup M.$$

(folgt aus der binomischen Formel: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}$)

Annahme: $x^n > a$

Nach der Ungleichung von Bernoulli gilt für $\tau := \frac{x^n - a}{nx^n}$. ($0 < \tau < \frac{x^n - a}{x^n} < 1$) Damit:

$$\begin{aligned} (x - \tau x)^n &= x^n(1 - \tau)^n \geq x^n(1 - n\tau) \\ &= x^n \left(1 - \frac{x^n - a}{x^n} \right) = a. \end{aligned}$$

$\implies$ Für $y \in M$ gilt:

$$y^n < a < (x - \tau x)^n.$$

$\Rightarrow$

$$0 < (x - \tau x)^n - y^n = \underbrace{(x - \tau x - y) \sum_{k=0}^n (x - \tau x)^{n-1-k} y^k}_{>0}.$$

$$\Rightarrow x - \tau x - y > 0$$

$\Rightarrow y < x - \tau x < x \Rightarrow x - \tau x < x$ eine obere Schranke von M . Widerspruch zu $x = \sup M$

(Formel: $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$)

□

Bemerkung 2.36 (Ungleichung von Bernoulli). Sei $x \geq -1$, dann gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \forall n.$$

Definition 2.37 (Allgemeine rationale Potenzen). $a^q, q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, a > 0, a \in \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$a^q = a^{\frac{r}{s}} := \left(\sqrt[s]{a} \right)^r.$$

Bemerkung 2.38. • Regeln für das Rechnen mit Wurzeln

$$\left(\sqrt[s]{a} \right)^r = \left(a^{\frac{1}{s}} \right)^r = a^{\frac{r}{s}} = \left(a^r \right)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r}.$$

- Für $a \in \mathbb{R}_+$ wird unter $\sqrt[k]{a}$ **immer** die positive k -te Wurzel verstanden.

$\Rightarrow$ Aussage $\sqrt{a^2} = a$ ist falsch.

Korrekt: $\sqrt{a^2} = |a|$

Die Gleichung $x^2 = a$ hat zwei Lösungen: $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = -\sqrt{a}$

Bemerkung 2.39 (Reelle Potenzen). $a \in \mathbb{R}_+, r \in \mathbb{R}, a^r$ - ?

$\exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow r, q_n \in \mathbb{Q}$, damit:

$$a^r := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}.$$

Noch zu überprüfen: ob der Grenzwert existiert und eindeutig ist

Beispiel 2.40. $\sqrt{2}, (q_n) = \{1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$

$$a^{\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{q_n}, a_1 = a^{1.4}, a_2 = a^{1.41}, \dots$$

Analog über Intervallschachtelung:

$$I_1 = [1.4; 1.5]$$

$$I_2 = [1.41; 1.42]$$

$$I_3 = [1.414; 1.415]$$

$$I_n = [r_n, s_n].$$

$$a^{\sqrt{2}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Alternative Definition über exp und ln

$$a^r = \exp(r \ln a).$$

und Reihenentwicklung:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

oder

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

2.5 Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Definition 2.41 (Mächtigkeit). Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente.

Eine Menge ist „unendlich“, wenn eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow$ Echte Teilmenge von A existiert. Dann $|A| = \infty$.

Eine unendliche Menge, deren Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummeriert werden kann, heißt „abzählbar (unendlich)“, sonst „überabzählbar“.

Abzählbarkeit heißt: Es existiert eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Beispiel 2.42. • $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dann $|A| = 3$

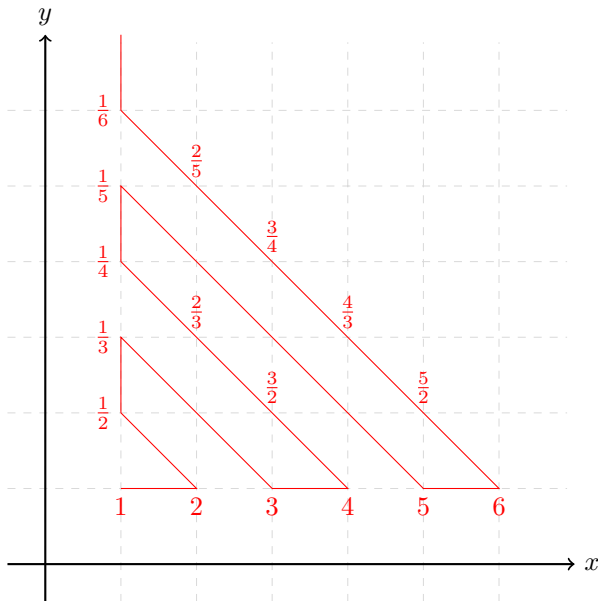
• $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind unendliche Mengen

Satz 2.43 (Abzählbarkeit). $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

$\mathbb{Z}$ Abzählbar. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, weil $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $z_n = \frac{1}{2}n$ für n gerade und $z_n = \frac{1}{2}(1-n)$ für n ungerade ist eine Abzählung von $\mathbb{Z}$. $\square$

$\mathbb{Q}$ Abzählbar. Argumentation nach Cantor

$$p \in \mathbb{Q}, q = \frac{n}{m}$$



Hier werden Punkte ausgelassen, für die n und n nicht teilerfremd sind. Die Gitterpunkte werden durchnummeriert $\implies \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, \dots\}$. $\square$

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Wir zeigen, dass $[0, 1)$ nicht abzählbar ist.

Angenommen: $[0, 1)$ ist abzählbar, dann sei $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung, z.B.:

$$z_1 = 0, d_{11}d_{12}d_{13} \dots$$

$$z_2 = 0, d_{21}d_{22}d_{23} \dots$$

$\vdots$

Dann Zahl $y := 0, d_1d_2d_3, \dots$ mit

$$d_n := \begin{cases} 2 & \text{falls } d_{nn} = 1 \\ 1 & \text{falls } d_{nn} \neq 1 \end{cases}$$

liegt in $[0, 1)$, $d_i \neq 9 \forall i$, aber $y \notin \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, denn falls $y = z_k$ für ein $k \implies$

$$y = 0, d_{k1}, d_{k2}, d_{k3}, \dots, d_{kk}, \dots$$

aber $d_k \neq d_{kk}$ nach Konstruktion. □

2.6 Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Addition in $\mathbb{C}$: $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Multiplikation in $\mathbb{C}$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Satz 2.44 ($\mathbb{C}$ ist ein Körper). Körperaxiome gelten (nachrechnen!)

Nullelement $0 := (0, 0)$

Einselement $1 := (1, 0)$

Imaginäre Einheit $i := (0, 1)$ mit $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$

Inverse der Addition $-z := (-x, -y)$

Inverse der Multiplikation $z^{-1} := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

Schreibweise / Normaldarstellung

$z = (x, y)$ oder $z = x + iy$ mit $i^2 = -1$.

Bemerkung 2.45 (Rechnen in $\mathbb{C}$).

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2y_1y_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

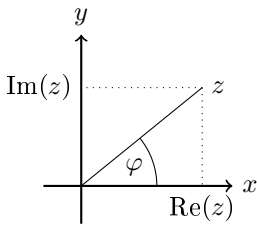
Definition 2.46. Für $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt

$x = \operatorname{Re}(z)$ Realteil von z

$y = \operatorname{Im}(z)$ Imaginärteil von z

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ Betrag von z

$\bar{z} := x - iy = (x, -y)$ zu z konjugierte komplexe Zahl



$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\varphi)$$

$$\operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} \text{ mit } r = |z|.$$

Bemerkung 2.47. Rechenregeln für komplexe Zahlen

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\bar{z}} = z$
2. $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{i}{2}(z - \bar{z})$
3. $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$
4. $|\bar{z}| = |z|$
5. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Reelle Zahlen: $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z = \bar{z}$

Dies führt zur weiteren Darstellung komplexer Zahlen mit Hilfe von sin und cos.

Polardarstellung

(a)

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad r = |z|.$$

$$\text{Bsp.: } i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

(b) Definiere $e^{iy} := \cos y + i \sin y$ $y \in \mathbb{R}$. Es folgt eine *Exponentialdarstellung*.

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \quad \varphi = \operatorname{Arg}(z).$$

Satz 2.48 (Vorteil der Exponentialdarstellung). Für $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$z_k = r_k e^{i\varphi_k} \quad k = 1, 2 \text{ gilt}$$

(a) $\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$

(b) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

(d) $z^n = r^n e^{in\varphi}$

insbesondere gilt die Formel von de Moivre:

$$(e^{i\varphi})^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = e^{in\varphi}.$$

Beweis. (a) $\bar{z} = \overline{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r \cdot e^{-\varphi}$

(b)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i ((\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

(c) folgt aus 2

(d) folgt aus 2

□

tolle Grafik von der Kostina, die gibt's nur in der Vollversion.

Bemerkung 2.49 (Beobachtungen). 1. $e^{i\varphi} = 1 \iff \varphi \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. durch Behauptung.

□

2. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1 - \varphi_2 \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Satz 2.50 (n -te Wurzel in $\mathbb{C}$). Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq w = re^{i\varphi}$ hat die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene Lösungen.

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k) \cdot \frac{1}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Beweis. Sei $z = \rho e^{i\psi}$. Dann:

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n e^{in\psi} \stackrel{!}{=} r e^{i\varphi} = w \\ \iff \rho^n &= r \text{ und } n\psi = \varphi + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\ \iff \rho &= \sqrt[n]{r} \text{ und } \psi = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k) \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Betrachte: $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\psi_k}, \psi_k = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k), k = 0, 1, \dots, n-1$

1. Alle z_k sind paarweise verschieden (klar).

2. Wir zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Sei z eine beliebige Lösung $z^n = w$ und $z = |z| \cdot (\cos \psi + i \sin \psi)$. Es gilt $|z|^n = |w|$ und folglich $|z| = \sqrt[n]{|w|} = \sqrt[n]{r}$.

Weiterhin ist $n\psi = \varphi + 2\pi l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ (wegen $(e^{i\psi})^n = e^{in\psi}$), dann $\psi = \frac{\varphi}{n} + l \frac{2\pi}{n}$.

Teile l durch n mit Rest: $l = k + s \cdot n$.

$$\frac{l}{n} = s + \frac{k}{n}, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1.$$

Dann

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(k + sn) = \underbrace{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)}_{\psi_k} + 2\pi s.$$

$\implies z = z_k, 0 \leq k \leq n-1$
 $\implies$ Alle Lösungen gefunden

□

Bemerkung 2.51 (Geometrische Interpretation). Die Lösungen sind die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks auf dem Kreis mit Radius $|z| = \sqrt[n]{r}$.

Im Fall $w = 1$ heißen z_k die n -ten Einheitswurzeln.

Beispiel 2.52. Die dritten Einheitswurzeln sind

$$\begin{aligned} & \left\{ e^{i2k\pi\frac{1}{3}}, k = 0, 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ \cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

3 Folgen und Reihen

3.1 Folgen

Definition 3.1 (Folgen). Eine Zahlenfolge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, d.h. $n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$.

Die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wobei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen ist, die streng monoton wächst, d.h. $n_1 < n_2 < \dots$ bzw. $n_k < n_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 3.2. $(-1)^n$ hat zwei Teilfolgen: $(-1)^{2n} = 1$ und $(-1)^{2n+1} = -1$.

Definition 3.3 (Konvergenz, Beschränktheit, Monotonie von Folgen). 1. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq c$.

Sie heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt falls $\exists C \in \mathbb{R}$, s.d. $a_n \leq C$ (bzw. $a_n \geq C$) $\forall n \in \mathbb{N}$

2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend (fallend), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d.

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

4. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt divergent, falls sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Bemerkung 3.4. 1. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls in jeder ϵ -Umgebung $]a - \epsilon, a + \epsilon[$ fast alle Folgelemente liegen.

2. In Def. kann auch $\leq \epsilon$ und statt ϵ kann man $\frac{1}{N}$ für beliebig große $N \in \mathbb{N}$ schreiben.

Satz 3.5. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchy-Folge ist, d.h. $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n, m \geq n_\epsilon$ gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Satz 3.6 (Eindeutigkeit des Limes). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a, a' \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a'$, dann gilt $a = a'$.

Beweis. Angenommen $a \neq a'$. Definiere $\epsilon := \frac{|a-a'|}{2} > 0$.

Dann $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_1$ und $|a_n - a'| < \epsilon \quad \forall n \geq n_2$.

Dann gilt $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$:

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \epsilon + \epsilon = |a - a'|.$$

$$\implies |a - a'| < |a - a'|. \text{ Widerspruch } \implies a = a'$$

□

Satz 3.7. Konvergente Folgen sind beschränkt.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty, a \in \mathbb{R}$.

Wähle $\epsilon = 1$. Dann $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq n_\epsilon$.

Dann gilt $\forall n \geq n_\epsilon$:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

$$\implies |a_n| \leq \left(\max_{k=1, \dots, n_\epsilon} |a_k| \right) + |a| + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Satz 3.8 (Konvergenz und Nullfolgen). Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen Null konvergiert. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Dann sind äquivalent:

1. $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$
2. $(a_n - a) \rightarrow 0$
3. $|a_n - a| \rightarrow 0$

Beweis. durch Behauptung.

□

Satz 3.9 (Konvergenz von Teilfolgen). Teilfolgen einer gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergierenden Folge konvergieren ebenfalls gegen $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. trivial.

□

Satz 3.10 (Einschließungskriterium (Sandwich)). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$.

1. Falls $a_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq c$.
2. Falls $a = c$ und $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies b = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$.

1. $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|c_n - c| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\epsilon$.

$$\text{Dann: } a - c \leq a - (a_n - c_n) - c \leq |a - a_n| + |c_n - c| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \text{ gilt } a - c < \epsilon \implies a - c \leq 0$$

2. $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ und $|c_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

Dann gilt $\forall n \geq n_\epsilon$ und wegen $|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$:

$$-\epsilon < -|a_n - a| \leq a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a \leq |c_n - a| < \epsilon.$$

$$\implies -\epsilon < b_n - a < \epsilon \implies |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$$

□

Satz 3.11 (Rechenregeln für konvergente Folgen). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$
4. Falls $b \neq 0$, gilt $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
5. Falls $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a \geq 0$ und $(a_n)^{\frac{1}{k}} \rightarrow a^{\frac{1}{k}}, n \rightarrow \infty$.

Beweis. durch Zurückblättern.

□

Satz 3.12 (monoton + beschränkt $\implies$ konvergent). Eine monoton wachsende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \min\{c \in \mathbb{R} | a_n \leq c\}.$$

bzw. ihr Infimum:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \max\{c \in \mathbb{R} | a_n \geq c\}.$$

Beweis. Gegeben $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Definiere $s := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Z.z.: $a_n \rightarrow s$. Sei $\epsilon > 0$. Dann $s - \epsilon$ keine obere Schranke, d.h. $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $s - \epsilon < a_{n_\epsilon}$.

Damit $s - \epsilon < a_{n_\epsilon} \leq a_n \leq s < s + \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

$$\implies |a_n - s| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon \implies a_n \rightarrow s$$

□

Satz 3.13 (Bolzano-Weierstraß). Jede beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. $\exists a, b \in \mathbb{R}$, s.d. $a \leq a_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Konstruiere induktiv eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_k := [a_k, b_k]$ mit:

- (1) I_k enthält unendlich viele Folgeelemente von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (2) $I_k \subset I_{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$
- (3) $(b_k - a_k) \leq 2^{1-k}(b_1 - a_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Für $k = 1$ wähle $a_1 := a, b_1 := b$.

$k \rightarrow k + 1$: Intervall $I_k := [a_k, b_k]$ mit Eigenschaften (1)-(3) sei konstruiert.

Berechne $M := \frac{a_k + b_k}{2}$ (Mitte des Intervalls I_k). Wegen (1): $[a_k, M]$ oder $[M, b_k]$ enthält unendlich viele Folgeelemente.

Setze:

$$I_{k+1} := \begin{cases} [a_k, M] & \text{falls } [a_k, M] \text{ unendlich viele Folgelemente enthält} \\ [M, b_k] & \text{falls } [M, b_k] \text{ unendlich viele Folgelemente enthält} \end{cases}$$

in beiden Fällen:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} \stackrel{(3)}{\leq} \frac{1}{2} 2^{1-k} (b_1 - a_1) = 2^{-k} (b_1 - a_1).$$

$\implies$ (1) - (3) erfüllt für I_{k+1} .

Wir definieren eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \in I_k \ \forall k \in \mathbb{N}$:

$k = 1$: Setze $a_{n_1} := a, n_1 := 1$.

$k \rightarrow k+1$: Wegen (1) ex. ein Index $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$.

I_k bilden eine Intervallschachtelung:

$$\implies \underbrace{a_k}_{\rightarrow a} \leq a_{n_k} \leq \underbrace{b_k}_{\rightarrow a} \stackrel{\text{Sandwich}}{\implies} a_{n_k} \rightarrow a, k \rightarrow \infty.$$

□

Beispiel 3.14. $a_n = (-1)^n$. Teilfolge: $(1, 1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1, (-1, -1, -1, \dots) \rightarrow -1$.

Definition 3.15 (Häufungspunkt). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt der Folge, falls $\forall \epsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 3.16. 1. $a_n = (-1)^n$ hat zwei Häufungspunkte 1 und -1.

2. Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dann ist a Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung 3.17. Zu jedem Häufungspunkt a ex. eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, also $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$:

$$a \text{ Häufungspunkt} \iff a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \text{ für eine } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Beweis. (i) „ $\implies$ “: Sei a Häufungspunkt (HP). Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} \in D_1(a) = \{x \mid |x - a| < 1\}$.

Sei $n_1, \dots, n_{k-1}$ bereits gewählt.

Wähle $n_k > n_{k-1}$, s.d. gilt:

$$a_{n_k} \in D_{\frac{1}{k}}(a) = \left\{x \mid |x - a| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Dann ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.

$\implies a_{n_k} \rightarrow a, k \rightarrow \infty$.

(ii) „ $\impliedby$ “: Sei $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Zu zeigen: a ist HP.

Sei $\epsilon > 0$. Dann ex. $k_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall k \geq k_\epsilon$ gilt:

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon \implies \forall k \geq k_\epsilon \quad a_{n_k} \in D_\epsilon(a).$$

□

Bemerkung 3.18. Satz von Bolzano-Weierstraß besagt, dass jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ mindestens einen HP besitzt.

Definition 3.19 (Limes Superior). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, dann definiere eine reelle Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $s_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$.

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, dann definiere

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt ist, setze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := +\infty$.

Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, aber $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *nicht* nach unten beschränkt ist, setze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := -\infty$.

Beispiel 3.20. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = a$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (-1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{(-1)^k \mid k \geq n\} = 1$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup n = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (-n) = -\infty$

Definition 3.21 (Limes Inferior). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann setze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n := - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (-a_n).$$

Beispiel 3.22. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (n^2) = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf (n^2) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{-k^2 \mid k \geq n\} = - \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = +\infty$

2.

$$a_n := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

$$(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = +\infty$$

Satz 3.23 (Charakterisierung von $\limsup$ und $\liminf$). Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = a \in \mathbb{R} \iff$

$\forall \epsilon > 0$ gilt:

(i) $a_n < a + \epsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $a_n > a - \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = a \in \mathbb{R} \iff$

$\forall \epsilon > 0$ gilt:

(i) $a_n > a - \epsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n < a + \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

3. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = a \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Bemerkung 3.24. Satz 3.23 impliziert:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n &= \sup \{\text{HP von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n &= \inf \{\text{HP von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}. \end{aligned}$$

$\forall \epsilon > 0$ liegen unendlich viele Folgelemente im offenen Intervall

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \right) - \epsilon < a_n < \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \right) + \epsilon \quad (1 \text{ (i) (ii)}).$$

bzw.

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) - \epsilon < a_n < \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) + \epsilon \quad (2 \text{ (i) (ii)}).$$

Fast alle Folgelemente erfüllen:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) - \epsilon < a_n < \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) + \epsilon \quad (1 \text{ (i) und } 2 \text{ (i)}).$$

3.2 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ($z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$) konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $|z_n - z| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

Genauso wird die Beschränktheit und Begriff der C.F. übertragen.

Aus Definitionen:

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}.$$

und der Ungleichung:

$$\max(|x|, |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

folgt:

1. $z_n \rightarrow z, n \rightarrow \infty$ in $\mathbb{C} \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$
2. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine C.F. in $\mathbb{C} \iff$
 $(\operatorname{Re}(z_n))_n$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_n$ sind C.F. in $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede C.F. in $\mathbb{C}$ ist konvergent.
4. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel 3.25. 1. $\frac{1+i(n+1)}{n} = \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow i, n \rightarrow \infty$

$$2. \quad z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$

$$|z_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$3. \quad q^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad \forall q \in \mathbb{C} \text{ mit } |q| < 1.$$

3.3 Unendliche Summe („Reihen“)

Definition 3.26. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Wir betrachten die Folge der n -ten Partialsumme $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch:

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert (divergiert), wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (divergiert).

Im Fall von Konvergenz bezeichnet:

$$s_{\infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

die Summe oder den Wert der Reihe.

Bemerkung 3.27. Man kann auch Reihen $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ mit $l \in \mathbb{Z}$ betrachten.

Beispiel 3.28 (Geometrische Reihe).

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Beweis. Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}.$$

Für $|q| < 1$ gilt $|q|^{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

$$\implies s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Bleibt zu zeigen: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$.

Angenommen $\exists q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Dann

$$|q|^{n+1} = \underbrace{|s_{n+1} - s_n|}_{\rightarrow s_*}.$$

Widerspruch, da $|q|^{n+1} \geq 1$ für $|q| \geq 1$ □

Lemma 3.29. Ist $\sum_k a_k$ konvergent, dann ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis. $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \rightarrow s_{\infty} - s_{\infty} = 0, n \rightarrow \infty$ □

Bemerkung 3.30. Die Eigenschaft von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge zu sein, reicht nicht für die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ aus!

Beispiel 3.31 (Harmonische Reihe).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{ist strikt divergent.}$$

Beweis. Folge der Partialsummen ist unbeschränkt:

$$\begin{aligned} S_{2^m} &= \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \\ &= \underbrace{1}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}} \geq \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.32.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k.$$

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0.$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 = 1$$

c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Alles Falsch (Kostina: „Alles Schrot!“), weil $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ divergent.

3.3.1 Konvergenzkriterien

Die Konvergenz einer Reihe ist nichts anderes als die Konvergenz der Folge der Partialsummen.

Satz 3.33. 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_{\infty} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_{\infty}.$$

$\implies$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda a_{\infty} + \mu b_{\infty} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Ist $a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ dann gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\iff (\sum_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt.

Beweis. (1) folgt aus der linearen Kombination von Folgen.

(2) Falls $a_k \geq 0 \implies$ Folge $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

Für solche Folgen gilt: Konvergenz $\iff$ Beschränktheit □

Satz 3.34 (Leibniz-Kriterium). Ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Nullfolge, so ist die alternierende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

konvergent mit folgender Abschätzung:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Aus Voraussetzungen: $a_k \geq 0$, $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$.

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \stackrel{a_{2n} \geq a_{2n+1}}{\geq} s_{2n-1}.$$

Folge mit ungeraden Indizes: $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots$

$$s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-2}.$$

Folge mit geraden Indizes: $\dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$

$$s_{2n} > s_{2n+1} \quad (s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1})$$

$$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$s_1 \geq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

$\implies [s_{2n+1}, s_{2n}]$ bilden eine Intervallschachtelung, d.h.

$$\exists s_{\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [s_{2k+1}, s_{2k}].$$

$$s_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$$

$$s_{2n+1} \leq s_{\infty} \leq s_{2n}.$$

Damit gilt $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq s_{\infty} - s_{2n+1} \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

und

$$0 \geq s_{\infty} - s_{2n} \geq s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \geq -a_{2n}.$$

$\implies$

$$0 \leq |s_{\infty} - s_n| \leq a_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

und

$$\left| \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}_{s_{\infty}} - \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq a_n.$$

□

Beispiel 3.35 („Alternierende harmonische Reihe“).

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

ist konvergent

Definition 3.36. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel 3.37. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ist konvergent nach Leibniz Kriterium, aber nicht absolut konvergent, weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Satz 3.38. Aus absoluter Konvergenz einer Reihe folgt deren Konvergenz.

Beweis. Sei $\sum_k a_k$ absolut konvergent, d.h. $\sum_k |a_k|$ konvergiert.

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k, t_n := \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Dann gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$.

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = t_m - t_n = |t_m - t_n|.$$

Da $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist C.F.

Aus $|s_m - s_n| \leq |t_m - t_n| < \epsilon$

$$\begin{aligned} &\implies (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist auch C.F. in } \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C} \\ &\implies \sum_k a_k \text{ konvergiert.} \end{aligned}$$

□

Satz 3.39 (Majoranten Kriterium). Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine reelle Reihe ($b_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$).

- (i) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und gilt $|a_n| \leq b_n$ ($a_n \in \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$) für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $\forall n \geq N_0$), so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- (ii) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und $a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \geq |b_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die reelle Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt Minorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. (i) $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}, (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Partialsummen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = |t_n - t_m|.$$

$$\begin{aligned} &\implies (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist C.F.} \\ &\implies (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert.} \end{aligned}$$

- (ii) Ann. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergente Majorante zu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Widerspruch.

□

Beispiel 3.40. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$.

$$2^n = (1+1)^n \geq 1+n \quad \forall n \implies \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{1+n} < 1 \quad \forall n.$$

$$\implies$$

$$\frac{n}{4^n} \leq \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n.$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ konvergente Majorante für } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}.$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist divergent, weil $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ ($\sqrt{n} \geq 1$) $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente Minorante.

Satz 3.41 (Quotientenkriterium). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n| \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ($a_n \in \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$).

- (i) Falls ein $0 < q < 1$ existiert mit

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0,$$

dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

- (ii) Falls $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \quad \forall n \geq N_0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Kostina glaubt, dass das so stimmt, aber offensichtlich ist sie sich nicht sicher.

Beweis. (i) $\forall n \geq N_0$ gilt:

$$|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq \dots \leq q^{n-N_0}|a_{N_0}|.$$

$$\implies \frac{|a_{N_0}|}{q^{N_0}} \sum_{n=1}^{\infty} q^n \text{ ist konvergente Majorante.}$$

- (ii) $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \dots \geq |a_N| \implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

□

Beispiel 3.42 (Exponentialreihe). $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: \exp(z) \text{ oder } e^z.$$

Zahl $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$ absolut konvergent, für alle $z \in \mathbb{C}$.

$$a_n := \frac{z^n}{n!} \implies \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Für $n \geq 2|z|$ gilt:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} =: q < 1.$$

Satz 3.43 (Wurzelkriterium). Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe ($a_n \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

- (i) Falls $\exists \quad 0 < q < 1$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \forall n \geq N_0,$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Falls $\exists N_0$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \forall n \geq N_0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. 1. Für $n \geq N_0$ ist $|a_n| \leq q^n \implies$ konvergente Majorante

2. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \implies |a_n| \geq 1 \implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies$ Divergenz.

□

Bemerkung 3.44. Im Quotientenkriterium und Wurzelkriterium wird gefordert:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ bzw. } \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1.$$

Die Forderung $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ bzw. $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ reicht nicht: Bsp.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent.

Satz 3.45 (Verdichtungskriterium von Cauchy). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}_+$, eine reelle, positive monoton fallende Nullfolge. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergent.}$$

Beweis. durch Übung.

□

Beispiel 3.46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

1. $\alpha \leq 0$: $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergent.

2. $\alpha > 0$:

$$\left(\frac{1}{n^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

eine monoton fallende Nullfolge mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(2^{1-\alpha})^k}_{=:q} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k.$$

mit $q = 2^{1-\alpha}$

Falls $|q| < 1 \iff$ konvergenz

d.h. $\alpha > 1 \iff$ konvergenz

3.4 Umordnen von Reihen

Definition 3.47 (Umordnung). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung.

Dann heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)} + \dots$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiel 3.48.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ konvergiert.}$$

Umordnung:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}}_{> 4 \cdot \frac{1}{15} > \frac{1}{4}} - \frac{1}{8} \\ & + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n-1} \right)}_{> 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{1}{4}} - \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

divergiert!

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, deshalb kann eine Umordnung die Konvergenzeigenschaften drastisch ändern !!!

Satz 3.49 (Umordnungssatz). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe.

Dann konvergiert jede Umordnung dieser Reihe absolut gegen denselben Grenzwert.

Beweis. Forster. □

Bemerkung 3.50. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine reelle Reihe, welche konvergiert, aber nicht absolut, so gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ oder $c = \pm\infty$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$, welche gegen $c \in \mathbb{R}$ konvergiert (oder divergiert).

3.5 Das Cauchy-Produkt von Reihen

Satz 3.51 (Cauchy-Produkt). Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei c_n definiert durch

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent mit $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$

Beweis. Forster. □

Bemerkung 3.52. Die Voraussetzung der absoluten Konvergenz ist wichtig:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ mit } a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

konvergieren, aber ihr Cauchy-Produkt:

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

divergiert

Beweis. durch Übung. □

Beispiel 3.53. Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

Bilde Cauchy-Produkt

$$\begin{aligned} c_n &:= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x+y)^n. \end{aligned}$$

□

Korrolar 3.54. (i) $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$

(iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ ist

$$\exp(n) = e^n = \begin{cases} e \cdot e \cdot \dots \cdot e & n > 0 \\ e^{-1} \cdot e^{-1} \cdot \dots \cdot e^{-1} & n < 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Beweis. (i) $\exp(-z) \cdot \exp(z) = \exp(-z + z) = \exp(0) = 1$

(ii) Für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ist $\exp(x) = 1 + x + \dots > 0$

Für $x < 0$ ist $(\exp(x))^{-1} = (\exp(-x)) > 0 \implies \exp(x) > 0$.

(iii) Zz.: $\exp(n) = e^n \forall n \in \mathbb{N}$

Vollständige Induktion:

$n = 1$: $\exp(1) = e$ nach Definition

$n \rightarrow n + 1$: $\exp(n + 1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}$

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ gilt:

$(\exp(n))^{-1} = \exp(-n) = e^{-n} \implies \exp(n) = e^n$

□

3.6 Potenzreihen

Definition 3.55. Eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in \mathbb{C}.$$

$$a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Beispiel 3.56 (Exponentialreihe). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ mit Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{C}$ konvergiert für $\forall z \in \mathbb{C}$.

Definition 3.57 (Konvergenzradius). Zur Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ definiere den Konvergenzradius ρ durch

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Satz 3.58. (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ divergiert für $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > \rho$

(iii) für $|z - z_0| = \rho$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beispiel 3.59. für Aussage (iii)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} x^k}_{\text{divergent für } |x|=1} \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}}_{\text{div für } x=1, \text{ konv für } x=-1} \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}}_{\text{konvergent für } |x|=1}.$$

$\rho = 1$ für alle Reihen.

4 Funktionen und Stetigkeit

Definition 4.1 (Funktion). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge. Eine reellwertige oder komplexwertige Funktion auf D ist eine Abbildung:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f : D \rightarrow \mathbb{C}.$$

Für zwei Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) definieren wir

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (f - g)(x) &:= f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

4.1 Grenzwerte bei Funktionen

Definition 4.2 (Berührpunkt). Sei $D \subset \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von D , falls in jeder δ -Umgebung von a , d.h.

$$U_\delta(a) :=]a - \delta, a + \delta[= (a - \delta, a + \delta).$$

mindestens ein Punkt von D liegt, d.h.

$$]a - \delta, a + \delta[\cap D \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0.$$

Beispiel 4.3. 1. $a \in D \implies a$ Berührpunkt von D

2. $D =]0, 1[$, 0 ist Berührpunkt von D , denn $\forall \delta > 0 \quad]-\delta, \delta[\cap]0, 1[\neq \emptyset$, da $\delta > 0$

3. $D = [1, 2]$, 0 ist kein Berührpunkt von D , denn z.B. für $\delta = \frac{1}{2}$:

$$]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cap [1, 2] = \emptyset.$$

Lemma 4.4 (Äquivalente Definition von Berührpunkten). a ist ein Berührpunkt von $D \iff \exists$ Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Beweis. durch Behauptung □

Definition 4.5 (Grenzwert bei Funktionen). 1. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und x_0 sei ein Berührpunkt von D . f hat in x_0 den Grenzwert (oder limes), $y_0 \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D, |x - x_0| < \delta.$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0.$$

y_0 ist eindeutig bestimmt.

y_0 kann von D abhängig sein und man schreibt daher zur Verdeutlichung ein $x \in D$ darunter.

2. Sei x_0 ein Berührpunkt von $D \cap]x_0, \infty[$. Dann hat f in x_0 den rechtsseitigen Grenzwert y_0 hat, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x \in D \cap]x_0, \infty[f(x) = y_0.$$

Schreibweise

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0$$

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = y_0.$$

3. Sei x_0 ein Berührungspunkt von $D \cap]-\infty, x_0[$. Dann hat f in x_0 den linksseitigen Grenzwert y_0 , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x \in D \cap]x_0, \infty[f(x) = y_0.$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0$$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y_0.$$

Beispiel 4.6 (Heaviside Funktion). $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, def. durch

$$H(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

Für $x_0 > 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = 1$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, wähle $\delta := \frac{x_0}{2} > 0$. Dann gilt

$$|H(x) - 1| = 0 < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \cap]x_0 - \frac{x_0}{2}, x_0 + \frac{x_0}{2}[.$$

□

Analog finden wir, dass für $x_0 < 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ existiert nicht!

Beweis. Angenommen: $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = y_0$.

Dann wählen wir $\epsilon = \frac{1}{4}$, dann ex. $\delta > 0$ mit

$$|H(x) - y_0| < \frac{1}{4} \quad \forall x \text{ mit } x \in]-\delta, \delta[.$$

$$\implies 1 = |H(-\delta) - H(\delta)| \leq |H(-\delta) - y_0| + |y_0 - H(\delta)| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ Widerspruch!}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0} H(x) \text{ existiert nicht.}$$

□

Es gibt $\lim_{x \nearrow 0} H(x) = 0$ und $\lim_{x \searrow 0} H(x) = 1$, weil

$$|H(x) - 0| = 0 \quad \forall x \in]-\delta, 0[$$

$$|H(x) - 1| = 0 \quad \forall x \in]0, \delta[.$$

Lemma 4.7 (Restgliedabschätzung der Exponentialreihe).

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x).$$

, d.h.

$$R_{n+1}(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Für $R_{n+1}(x)$ gilt

$$|R_{n+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}, \quad \forall |x| \leq \frac{N+2}{2}, N \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \left(\frac{|x|}{N+2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{|x|}{N+2} \right)^3 + \dots \right) \\ &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\ &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \\ &= 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, wähle $\delta := \frac{\epsilon}{4}$. Dann gilt $\forall x \in]-\frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{4}[$, wobei O.B.d.A. $\frac{\epsilon}{4} < 1$, dass

$$|\exp(x) - 1| = |R_{0+1}| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{0+1}}{(0+1)!} = 2|x| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

□

Lemma 4.9 (Folgenkriterium). Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein Berührungspunkt von D . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \text{ Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0.$$

Beweis. • „ $\implies$ “: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$. Sei also $\epsilon > 0$, nach Def. von $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert ein $\delta > 0$, s.d.

$$|f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Zu $\delta > 0$ ex. ein Index $n_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq n_\delta$.

$$\implies |f(x_n) - y_0| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\delta$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$

• „ $\impliedby$ “: Zu zeigen.: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D: |x - x_0| < \delta.$$

Angenommen das gilt nicht.

Dann $\exists \epsilon_0 > 0$, s.d. $\forall \delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - y_0| \geq \epsilon_0$.

$\implies$ Für alle $n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - y_0| \geq \epsilon_0$

$\implies$ Diese $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definieren eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, aber $|f(x_n) - y_0| \geq \epsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\implies f(x_n)$ konvergiert nicht gegen y_0 . Widerspruch!

$\implies$ Annahme ist falsch $\implies$ Behauptung

□

4.2 Stetigkeit

Definition 4.10 (Stetigkeit). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, und $a \in D$. f heißt stetig im Punkt a , falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

f heißt stetig in D , falls f stetig in a ist $\forall a \in D$.

Äquivalente Definitionen

Definition 4.11 (Stetigkeit per ϵ / δ Argument). f ist stetig in $a \iff$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Definition 4.12 (Stetigkeit mit Folgen). f ist stetig in $a \iff$

$$\forall \text{ Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ gilt, dass } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Definition 4.13 (Stetigkeit mit Bild). f ist stetig in $a \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d.

$$f(U_\delta(a)) \subset]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[= U_\epsilon(f(a)).$$

Beispiel 4.14. (1) Konstante Funktionen und die Identität sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Konstante Fkt.: Wähle δ beliebig, da

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x - a| < \delta \implies 0 = |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Bei der Identität: Wähle $\delta := \epsilon > 0$, denn

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - a| < \delta = \epsilon \implies |f(x) - f(a)| = |x - a| < \epsilon.$$

(2) $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Das folgt aus Rechenregeln für Folgen,

$$f(x_n) \rightarrow f(a), n \rightarrow \infty \implies |f(x_n)| \rightarrow |f(a)|.$$

(3) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0.$$

Aus $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n - a) = 1$

$$\implies \lim_{x \rightarrow a} \exp(x) = \lim_{x_n \rightarrow a} (\exp(a) + \exp(x_n - a)) = \exp(a) \cdot 1 = \exp(a).$$

Folgerung: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ und $f(a) \neq 0$. Dann $\exists \delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D \cap]a - \delta, a + \delta[$, d.h. es ex. Umgebungen von a , s.d. $f(x) \neq 0$ für alle Punkte in dieser Umgebung.

Beweis. Wähle $\epsilon := \frac{|f(a)|}{4} > 0$. Dann $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta$.

$$\implies |f(x)| \geq |f(a)| - \underbrace{|f(x) - f(a)|}_{< \epsilon} > |f(a)| - \frac{|f(a)|}{4} = \frac{3}{4}|f(a)| > 0.$$

$\forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta$

□

Satz 4.15. 1. Es sei $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$. Dann sind $\lambda f + \mu g \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$ und falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D \stackrel{f}{g}$ stetig in a .

2. Sei f stetig in $a \in D$ mit $f(D) \subset \overline{D} \subset \mathbb{R}$ und $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $f(a)$. Dann ist die Komposition $(h \circ f) : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(h \circ f)(x) := h(f(x))$ stetig in a .

Beweis. 1. folgt aus Rechenregeln für konvergente Folgen. z.B.: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Dann

$$(f+g)(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = f(a) + g(a).$$

2. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{y_n := f(x_n)} = b =: f(a).$$

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\overline{D}$. Aus Stetigkeit von h in b folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n) = h(b) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{h(f(x_n))}_{(h \circ f)(x_n)} = h(f(a)).$$

□

Beispiel 4.16. 1. Alle Polynome

$$f(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

sind stetig in $\mathbb{R}$.

2. Rationale Funktionen $\frac{f}{g}$ mit Polynomen f, g ($g \neq 0$) sind stetig in $D := \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

3. f stetig in D , dann ist auch $|f|: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, als Komposition: $(|\cdot| \circ f)(x)$.

4. Heaviside Funktion ist stetig $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. Dirichlet-Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

ist in keinem Punkt stetig.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{Q}$. Es existiert eine Folge

$$x_n := a + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{=0} = 0 \neq 1 = f(a).$$

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es ex. eine Folge von rationalen Zahlen x_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. $x_n \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{N}$ (Konstruktion von reellen Zahlen) es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{=1} = 1 \neq 0 = f(a).$$

□

4.3 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition 4.17 (offene, abgeschlossene, kompakte Mengen). Eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt offen, falls $\forall x \in D \exists r > 0$ mit

$$B_r(x) :=]x - r, x + r[\subset D.$$

d.h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung, welche ganz in D liegt.

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, falls die Grenzwerte von konvergenten Folgen aus D wieder in D liegt, d.h. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies x_0 \in D$.

$D \subset \mathbb{R}$ heißt kompakt, falls D beschränkt und abgeschlossen ist. (beschränkt $\stackrel{\text{def.}}{=} \exists C > 0$ mit $|x| < C \forall x \in D$)

Beispiel 4.18. 1. $]0, 1[$ ist offen. $\forall x \in]0, 1[$ setze $r := \frac{1}{2} \min\{x, 1 - x\}$. Man kann zeigen, dass $B_r(x) \subset]0, 1[$

$]0, 1[$ ist nicht abgeschlossen, weil $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \subset]0, 1[$ mit $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin]0, 1[$.

2. $[0, 1]$ ist kompakt. $x \in [0, 1] \implies |x| \leq 1 \implies [0, 1]$ beschränkt.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, 1]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Dann gilt

$$0 \leq x_n \leq 1 \forall n \stackrel{\text{Sandwich}}{\implies} 0 \leq x_0 \leq 1 \implies x_0 \in [0, 1] \text{ abgeschlossen.}$$

$[0, 1]$ ist nicht offen, da $0 \in [0, 1]$, aber $\underbrace{]-r, r[}_{B_r(0) \not\subset [0, 1]} \quad \forall r > 0$

3. $\mathbb{R}$ ist offen, abgeschlossen aber nicht kompakt.

Lemma 4.19 (Folgenkompakt). $D \subset \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann wenn, alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D eine konvergente Teilfolge enthalten mit Grenzwert in D .

Beweis. • „ $\implies$ “ Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D , Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\implies$ nach Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset D \stackrel{D \text{ abgeschlossen}}{\implies} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in D$

• „ $\impliedby$ “ Angenommen. D ist unbeschränkt, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D$ mit $|x_n| \geq n$.

Dann enthält $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, weil alle Teilfolgen unbeschränkt sind. Widerspruch $\implies D$ ist beschränkt.

Bleibt zu zeigen: D ist abgeschlossen. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$. Nach Voraussetzungen existiert eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Limes in D . Da alle Teilfolgen ebenfalls gegen x_0 konvergieren folgt, dass $x_0 \in D$.

□

Satz 4.20 (Das stetige Bild kompakter Mengen ist kompakt). Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $D \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ kompakt.

Beweis. Zu zeigen: $f(D)$ ist kompakt. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $f(D)$. Dann ex. eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $f(x_n) = y_n \forall n \in \mathbb{N}$ (f stetig).

D kompakt $\implies \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in D$.

$$f \text{ stetig} \implies f(x_{n_k}) = \underbrace{y_{n_k}}_{\text{Teilfolge in } f(D)} \rightarrow f(x_0) \in f(D).$$

□

Definition 4.21 (Supremum, Infimum, Maximum, Minimum reellwertiger Funktionen). Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$.

$$\sup_{x \in D} f(x) \quad \text{kleinste obere Grenze der Bildmenge } B_f := \{f(x) \mid x \in D\}$$

$$:= \sup B_f := \min\{\beta \in \mathbb{R} \mid y \leq \beta \forall y \in B_f\}.$$

$$\inf_{x \in D} f(x) := \inf B_f := \min\{\beta \in \mathbb{R} \mid y \leq \beta \forall y \in B_f\}.$$

Falls $B_f := f(D)$ beschränkt ist, dann $\exists$ inf und sup.

$x_{\min} \in D$ heißt Minimum, $x_{\max}$ Maximum von f , falls

$$\begin{cases} \inf f(x) = f(x_{\min}) =: \min f(x) \\ \sup f(x) = f(x_{\max}) =: \max f(x) \end{cases}.$$

Satz 4.22. Stetige reellwertige Funktionen nehmen auf kompakten Mengen ihr Minimum und Maximum an, d.h. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, D kompakt, dann ex. $x_{\min}, x_{\max} \in D$ mit

$$\begin{aligned} f(x_{\min}) &= \inf \{f(x) \mid x \in D\} \\ f(x_{\max}) &= \sup \{f(x) \mid x \in D\} \end{aligned}$$

Beweis. Folgt aus Satz. Zunächst $f(D)$ ist beschränkt, d.h. dass Supremum und Infimum von $f(D)$ existieren. Nach Definition von $s := \sup \{f(x) \mid x \in D\}$ ex. eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $f(x_n) \rightarrow s, n \rightarrow \infty$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \rightarrow x_{\max}, k \rightarrow \infty, x_{\max} \in D$.

$$\implies f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_{\max}), k \rightarrow \infty$$

$\implies$ Behauptung für Supremum □

Satz 4.23 (Zwischenwertsatz). Sei $f: \underbrace{[a, b]}_{\text{kompakt}} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (*) mindestens ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$.

* d.h. $f(a) \leq y \leq f(b)$ falls $f(a) \leq f(b)$, sonst $f(b) \leq y \leq f(a)$

Beweis. Sei $f(a) < y < f(b)$ (die Fälle $y = f(a)$ oder $y = f(b)$ sind trivial). Betrachte $g(x) := f(x) - y$. $g(x)$ stetig und $g(a) < 0, g(b) > 0$.

Wir suchen die Nullstelle $c \in [a, b]$ mit $g(c) = 0$ mit dem Intervallschachtelungsprinzip in $\mathbb{R}$.

Starte mit $I_0 = [a_0, b_0] := [a, b]$, es gilt $g(a_0) \cdot g(b_0) < 0$. Sei $c_0 := \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ der Mittelpunkt von $[a_0, b_0]$. Falls $g(c_0) = 0$, dann ist c_0 Nullstelle von $g(x)$. Sonst setze

$$I_1 = [a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, c_0] & \text{für } g(a_0)g(c_0) < 0 \\ [c_0, b_0] & \text{für } g(c_0)g(b_0) < 0 \end{cases}.$$

Es gilt $g(a_1) \cdot g(b_1) < 0$ und $|a_1 - b_1| = \frac{1}{2}|a_0 - b_0|$ usw.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir entweder eine Nullstelle c_n von $g(x)$. Dann ist $c = c_n$, oder eine unendliche Folge von geschachtelten Intervallen $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften $g(a_n)g(b_n) < 0$ und

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^n |b_0 - a_0|.$$

wird konstruiert. $\implies$

$$\exists c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \text{ und } c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Nach Konstruktion $g(a_n)g(b_n) < 0$. Wegen der Stetigkeit und den Eigenschaften des Limes gilt $g(a_n)g(b_n) \rightarrow g(c)g(c) \leq 0, n \rightarrow \infty$

$\implies g(c) = 0$ □

- Bemerkung 4.24.** 1. Bisektionsverfahren zur Berechnung einer Nullstelle einer stetigen Funktion funktioniert wie im Beweis des Zwischenwertsatzes.
2. Eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Bildbereich $B \subset [a, b]$ besitzt einen „Fixpunkt“, d.h. $\exists c \in [a, b]$ mit $f(c) = c$ (Folgt aus Beweis des Zwischenwertsatzes mit $g(x) = f(x) - x$)
3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall. Konvention: $f \equiv a$ konstant, dann $f(I) = [a, a]$.

Beweis. Setze $B := \sup\{f(x) \mid x \in I\}$ falls f nach oben beschränkt, sonst $B := \infty$ und $A := \inf\{f(x) \mid x \in I\}$ falls f nach unten beschränkt, sonst $A := -\infty$. Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $A < y < B$. Nach Definition $\exists x_0, x_1 \in I$ mit $f(x_0) < y < f(x_1)$.

$\xrightarrow{\text{ZWS}} \exists x \in I$ mit $f(x) = y$
 $\Rightarrow]A, B[\subset f(I)$. Damit:

$$f(I) \in \{]A, B[, [A, B[,]A, B], [A, B]\}.$$

□

Definition 4.25 (Monotone Funktionen). Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f \text{ heißt } \begin{cases} \text{monoton wachsend} & f(x) \leq f(x') \\ \text{streng monoton wachsend} & f(x) < f(x') \\ \text{monoton fallend} & f(x) \geq f(x') \\ \text{streng monoton fallend} & f(x) > f(x') \end{cases} \quad \forall x, x' \in D \text{ mit } x < x'.$$

Satz 4.26 (Stetigkeit der Umkehrfunktion). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige streng monoton wachsende (streng monoton fallende) Funktion.

Dann ist $f: I \rightarrow f(I)$ bijektiv und $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis. $f(I)$ ist wieder ein Intervall, f ist streng monoton $\Rightarrow$ injektiv $\Rightarrow f: I \rightarrow f(I)$ bijektiv, d.h. $\exists f^{-1}$.

Außerdem $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} f^{-1}(f(x_1)) = x_1 < x_2 = f^{-1}(f(x_2)) & f \text{ wachsend} \\ f^{-1}(f(x_1)) = x_1 > x_2 = f^{-1}(f(x_2)) & f \text{ fallend} \end{cases}.$$

$\Rightarrow f^{-1}$ auch streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Zu zeigen: $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ ist stetig. O.B.d.A. f wachsend (sonst $\rightarrow -f$). Sei $y_0 \in f(I)$ mit $x_0 := f^{-1}(y_0)$ und $\epsilon > 0$.

1. Fall: x_0 ist kein Randpunkt, sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset I$. Dann

$$y_- := f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon) =: y_+.$$

Definiere $\delta := \min(y_+ - y_0, y_0 - y_-)$. $\Rightarrow$

$$B_\delta(y_0) \subset]y_-, y_+[\xrightarrow{\text{ZWS}}]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\quad | \quad f^{-1} \Rightarrow \quad f^{-1}(]y_0 - \delta, y_0 + \delta]) \subset f^{-1}(f(]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[)) =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\\ \Rightarrow f^{-1} \text{ stetig in } y_0 \text{ nach Definition.}$$

2. Fall: x_0 ist Randpunkt $\Rightarrow y_0$ ist Randpunkt. Gleiche Argumentation wie oben mit $[x_0 - \epsilon, x_0]$ bzw. $[x_0, x_0 + \epsilon]$ □

Beispiel 4.27. 1. Wurzeln sind stetig

Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $f(x) := x^k$ streng monoton wachsend und surjektiv.

$\implies$ Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ ist stetig und streng monoton wachsend mit $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$

2. $\ln$ ist stetig

Satz 4.28 (Logarithmus). $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$. Die Umkehrfunktion $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und heißt natürlicher Logarithmus. $\ln(x) = \log_e(x)$.

Es gibt die Funktionalgleichung

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y \in]0, \infty[.$$

Beweis. $f(x) = \exp(x) = e^x \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

1. e^x ist streng monoton wachsend, weil für $k > 0$ gilt $e^k > 1$ und für $x < x'$ folgt $\exists h > 0$ s.d. $x' = x + h$.

$$\implies e^x < e^x \cdot \underbrace{e^h}_{>1} = e^{x'} \implies e^x \text{ injektiv}$$

2. e^x surjektiv, weil: Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Folge $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert strikt, da $e > 1 \implies$ Folge $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

$$\implies \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } e^{-n} < a < e^n.$$

Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}$ und auch auf $[-n, n]$ stetig $\xrightarrow{\text{ZWS}} \exists c \in [-n, n]$, s.d. $e^c = a \implies e^x$ surjektiv

3. Nach Umkehrfunktionssatz folgt $\ln(x)$ ist stetig und strikt monoton wachsend $\forall [e^{-n}, e^n] \forall n \in \mathbb{N} \implies \ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

4. Z.z.: $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$.

Für x, y gilt

$$\begin{aligned} \exp(\ln x + \ln y) &= e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = x \cdot y & | \ln \\ \implies \ln(e^{\ln x + \ln y}) &= \ln x + \ln y = \ln(x \cdot y). \end{aligned}$$

□

Definition 4.29 (a^x). Für $a > 0$ wird die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto a^x$ definiert durch

$$\exp_a(x) := a^x := \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

Lemma 4.30 (Eigenschaften von a^x). Sei $a > 0$:

1. $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig
2. $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. $\exp_a(n) = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} \quad n \in \mathbb{N}$
4. $\exp_a(n) = a^n \quad n \in \mathbb{Z}$
5. $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \quad \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$
6. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
7. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$$8. a^x b^x = (ab)^x \quad b > 0, x \in \mathbb{R}$$

$$9. \frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis. trivial. □

4.4 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 4.31 (gleichmäßige Stetigkeit). Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf D , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Bemerkung 4.32. 1. Jede gleichmäßige stetige Funktion auf D ist auch stetig

2. Unterschied zwischen stetig und gleichmäßig stetig:

- stetig: δ hängt von ϵ und x ab
- gleichmäßig stetig: δ hängt nur von ϵ ab

Beispiel 4.33. $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$

f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Wähle $\epsilon = 1$. Angenommen: $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < 1 \quad \forall x, y \in]0, 1]$ mit $|x - y| < \delta$.

$\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \delta$. Für $x := \frac{1}{n}$ und $y := \frac{1}{2n}$ gilt $|x - y| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = |\frac{1}{2n}| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geq 1$. Widerspruch □

Satz 4.34. Auf kompakten Mengen (Intervallen) gilt: stetig $\iff$ gleichmäßig stetig

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Ang. f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann $\exists \epsilon_0 > 0$ mit $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in D$, s.d. $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$.

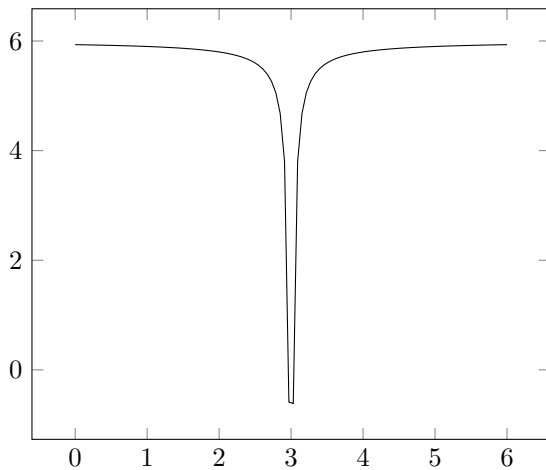
Folgenkompakt $\implies \exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $x_{n_k} \rightarrow p \in D$.

$k \rightarrow \infty$. Dann konvergiert auch $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen p , d.h. $y_{n_k} \rightarrow p, k \rightarrow \infty$ (weil $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$
 $\implies \epsilon_0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow |f(p) - f(p)| = 0$. Widerspruch □

Definition 4.35 (Lipschitzstetigkeit). Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lipschitz stetig auf D , falls $\exists$ Konstante $L > 0$ (sog. Lipschitzkonstante), s.d.

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D.$$

Beispiel 4.36. für $x = 3$ nicht lipschitzstetig.



Bemerkung 4.37. Lipschitzstetige Funktionen sind gleichmäßig stetig (stärker als gleichmäßige Stetigkeit)

4.5 Trigonometrische Funktionen

Satz 4.38. Für $x \in \mathbb{R}$ definiere $\cos(x) := \operatorname{Re}(e^{ix})$ und $\sin(x) := \operatorname{Im}(e^{ix})$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ (Eulersche Formel)
2. $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$
 $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$
3. $\cos(-x) = \cos(x)$
 $\sin(-x) = -\sin(x)$
4. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Beweis. trivial. □

Satz 4.39. $\cos$ und $\sin$ sind stetig.

Beweis. Restgliedabschätzung von $\exp(x)$ gilt auch für komplexe $z \in \mathbb{C}$

$$|R_{n+1}(z)| \leq 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Damit folgt für eine Nullfolge in $\mathbb{C}$ ($z_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, z_n \in \mathbb{C}$)

$$\implies \exp(z_n) \rightarrow \exp(0) = 1, n \rightarrow \infty$$

Mit Funktionalgleichung $\exp(x \cdot y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ gilt für eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}, z_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$ in $\mathbb{C} \implies \exp(z_n) \rightarrow \exp(a)$. $(z_n - a \rightarrow 0, \exp(z_n - a) \rightarrow 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(a) \cdot \exp(z_n - a)) = \exp(a))$

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x_n \rightarrow a, x_n \in \mathbb{R}$. Dann $\exp(ix_n) \rightarrow \exp(ia)$ mit $\operatorname{Re} / \operatorname{Im}$ ($\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(a), \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(a), z_n \rightarrow a$ in $\mathbb{C}$).

$$\implies \cos(x_n) \rightarrow \cos(a) \text{ und } \sin(x_n) \rightarrow \sin(a)$$

$$\implies \text{Stetigkeit} \quad \square$$

Satz 4.40 (Additionstheoreme). $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
 $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

$$\begin{aligned} 2. \quad \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos x - \cos y &= -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

Beweis. 1. Mit $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ folgt direkt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \underbrace{\cos x \cos y - \sin x \sin y}_{\text{Re}} + i \underbrace{(\sin x \cos y + \cos x \sin y)}_{\text{Im}} \end{aligned}$$

2. Setze $u := \frac{x+y}{2}, v := \frac{x-y}{2}$. $x = u + v, y = u - v$.

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= \sin(u+v) - \sin(u-v) \\ &= \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v - (\sin u \underbrace{\cos(-v)}_{=\cos v} + \cos u \cdot \underbrace{\sin(-v)}_{=-\sin v}) \\ &= 2 \cos u \sin v = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

□

Satz 4.41 (Reihenentwicklung Sinus / Cosinus). Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (absolut konvergente Potenzreihendarstellung)

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

und

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Beweis. Die absolute Konvergenz folgt als Teilreihe der Exponentialreihe (als Majorante)

Es gilt für $m \in \mathbb{N}_0$

$$i^n = \begin{cases} 1 & n = 4m \\ i & n = 4m + 1 \\ -1 & n = 4m + 2 \\ -i & n = 4m + 3 \end{cases}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(x)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(x)}. \end{aligned}$$

□

Satz 4.42 (Restgliedabschätzung Sinus / Cosinus). Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x).$$

und

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x).$$

mit

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für } |x| \leq 2n+3.$$

bzw.

$$|R_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \text{ für } |x| \leq 2n+4.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} R_{2n+2}(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-(n+1)} \frac{x^{2(k-(n+1))}}{(2k)! \frac{1}{(2n+2)!}} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k} (2n+2)!}{(2k+2n+2)!} \right). \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{x^{2k} (2n+2)!}{(2k+2n+2)!} = \frac{x^{2k}}{(2n+3)(2n+4) \dots (2k+2n+2)} \\ a_{k-1} &= \frac{x^{2k-2} (2n+2)!}{(2k+2n)!} \end{aligned}$$

damit

$$a_k = a_{k-1} \cdot \frac{x^2}{(2k+2n+1)(2k+2n+2)}.$$

Es gilt für $|x| \leq 2n+3, k \geq 1$

$$\frac{x^2}{(2k+2n+1)(2k+2n+2)} \leq \frac{(2n+3)^2}{(2n+3)(2n+4)} < 1.$$

$\Rightarrow$

$$a_k \leq \frac{(2n+3)^k}{(2n+4)^k} a_0 \quad a_0 = \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Leibniz

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

konvergent mit

$$0 < \underbrace{1 - a_1}_{>0} + \underbrace{a_2 - a_3}_{>0} + \underbrace{a_4 - \dots}_{>0} < 1.$$

$\Rightarrow$

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für } |x| \leq 2n+3.$$

Genauso für $R_{2n+3}(x)$ (Sinus). □

Lemma 4.43. Sinus und Cosinus Funktionen haben das folgende Verhalten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| &= \left| 1 - \underbrace{\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots}_{\frac{\sin(x)}{x}} - 1 \right| \\
 &= \left| x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!} \right| \\
 &\stackrel{|x| < 1}{\leq} |x| \cdot \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \right| \leq |x| \cdot e. \\
 \Rightarrow \\
 \underbrace{\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right|}_{\rightarrow 0} &\leq \underbrace{|x| \cdot e}_{\rightarrow 0}.
 \end{aligned}$$

genauso für $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$. □

4.6 Die Zahl π

Ziel: Analytische Definition von $\pi \in \mathbb{R}$.

Satz 4.44 (und Definition). Die Funktion $\cos: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ hat genau eine Nullstelle im Intervall $[0, 2]$, welche mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet wird ($\pi := 2\frac{\pi}{2}$).

Beweis. in 4 Schritten.

Schritt 1 / Lemma 1: $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$.

Restgliedabschätzung liefert ($|x| \leq 5$).

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + R_4(x) \text{ mit } |R_4(x)| \leq \frac{|x|^4}{24}.$$

$\Rightarrow$

$$\cos(2) = 1 - 2 + \underbrace{R_4(2)}_{\leq \frac{16}{24} = \frac{2}{3}} \leq -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Schritt 2 / Lemma 2: $\sin(x) > 0 \forall x \in]0, 2[$

Es gilt

$$\sin(x) = x + R_3(x) = x \left(1 + \frac{R_3(x)}{x} \right) \left| \frac{R_3(x)}{x} \right| \leq \frac{|x|^3}{6} \stackrel{|x| \leq 2}{\leq} \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$

$$1 + \frac{R_3(x)}{x} \geq \frac{1}{3}.$$

Schritt 3 / Lemma 3: $\cos: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

Sei $0 \leq y < x \leq 2$. Dann gilt

$$\cos(x) - \cos(y) = \underbrace{-2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{>0} < 0.$$

Schritt 4 (Beweis der Definition von π) $\cos(0) = 1$ (nach Definition).

$$\cos(2) \leq -\frac{1}{3} \stackrel{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in [0, 2] \text{ mit } \cos(x_0) = 0.$$

Nach Lemma 3 ist x_0 eindeutig. □

Korrolar 4.45 (Spezielle Werte von exp). Es gilt: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$

Beweis. Übung. □

Korrolar 4.46 (Eigenschaften Sinus / Cosinus). $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
 2π : Periodizität
- (ii) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- (iii) $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
- (iv) Nullstellen von sin / cos.
 $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{x = k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
 $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \{x = (k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. folgt aus den Additionstheoremen, der Definition von $\frac{\pi}{2}$, den speziellen Werten von exp und

folgender Tabelle

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\sin x$	0	1	0	-1	0

□

Korrolar 4.47 ($e^z = 1$). Es gilt $\{z \in \mathbb{C} \mid e^z = 1\} = \{i2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 4.48 (Tangens, Cotangens). (i) Die Tangensfunktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

ist definiert durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

(ii) Die Cotangensfunktion

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

ist definiert durch

$$\cot x := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

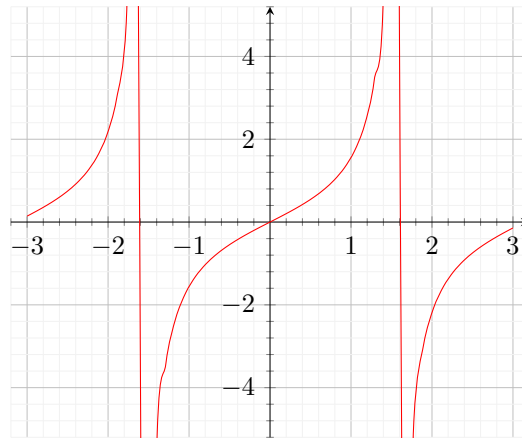
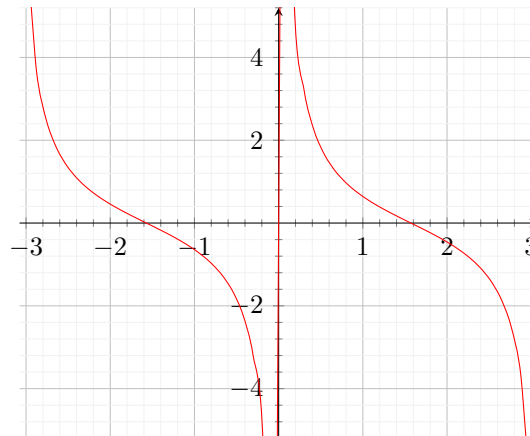
Definition 4.49 (Arcusfunktionen). (i) $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton fallend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Arcus-Cosinus.

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

(ii) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Arcus-Sinus.

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(iii) $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt

Abbildung 1: $\tan(x)$ Abbildung 2: $\cot(x)$

Arcus-Tangens.

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Satz 4.50 (Polarkoordinaten). Jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z| \in [0, \infty[$.

Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Beweis. Rannacher. □

5 Differentiation

5.1 Ableitung

Definition 5.1. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, eine Funktion. Definiere Differenzenquotienten in $x_0 \in D$.

$$D_h f(x_0) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

für Inkrement $h \in \mathbb{R}$ mit $x_0 + h \in D$.

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in D$ mit Ableitung $f'(x_0)$, wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_0 + h_n \in D$ die Folge $(D_{h_n} f(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Bemerkung 5.2. 1. Ist eine Funktion differenzierbar in $x_0 \in D$, so haben die Folgen von Differenzenquotienten alle denselben Limes.

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x_0+h \in D \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

2. In anderen Worten: Differenzierbarkeit in $x_0 \in D \stackrel{\text{Def.}}{\iff}$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Notationen:

$$f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \frac{d}{dx}f(x_0), \frac{df}{dx}(x_0).$$

4. Ist $x_0 \in D$ ein Randpunkt, z.B.: unterer oder oberer Endpunkt von $D = [a, b]$, dann wird in der Definition der rechts- oder linksseitige Grenzwert gebildet. Man spricht von der links- oder rechtsseitigen Ableitung.

$$\lim_{x \nearrow x_0 \text{ oder } x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

($\searrow$ für $x < x_0, x \rightarrow x_0$). Analog für die rechtsseitige Ableitung.

5. f heißt differenzierbar auf D , wenn sie $\forall x_0 \in D$ differenzierbar (bzw. einseitig differenzierbar im Falle eines Randpunktes) ist. f heißt stetig differenzierbar, falls die Ableitung $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ auf D stetig ist.

6. Differenzierbarkeit bedeutet: Man kann die Funktion f in x_0 „gut“ durch eine affin-lineare Funktion annähern (affin-linear: Polynom vom Grad 1).

Satz 5.3 (ϵ - δ Sprache). Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0) \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$, s.d. $\forall x_0 + h \in D, |h| < \delta_\epsilon$:

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \epsilon.$$

Beweis. trivial. □

Satz 5.4 (differenzierbar $\iff$ linear approximierbar). $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in D$, genau dann wenn eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + R(x).$$

Für das Restglied $R(x) = R(x, x_0)$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

In diesem Falle ist c eindeutig bestimmt mit $c = f'(x_0)$.

Beweis. „ $\implies$ “: Sei f differenzierbar mit $c = f'(x_0)$. Definiere Funktion

$$R(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0).$$

Dann gilt

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \underbrace{c}_{f'(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

„ $\impliedby$ “ Sei umgekehrt $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c.$$

$\Rightarrow f'(x_0) = c$. Limes eindeutig $\Rightarrow f$ differenzierbar. $\square$

Bemerkung 5.5. Aus dem Satz zur linearen Approximation folgt eine geometrische Interpretation: $f(x)$ kann in x_0 „gut“ durch eine Gerade approximiert werden.

$$f(x) \approx g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

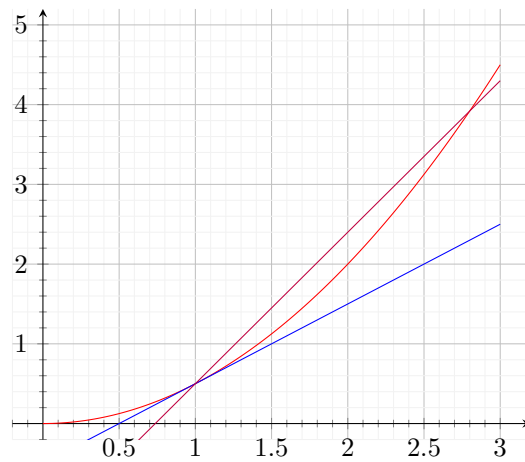
Der Graph von g ist eine Tangente. Sekante:

$$s_h(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Tangente:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Abbildung 3: $f(x)$ in rot, ihre Tangente (blau) und eine Sekante (lila) im Punkt $x_0 = 1$



Lemma 5.6. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 .

Beweis. Sei f differenzierbar, d.h.

$$\exists f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dann gilt wegen der linearen Approximation:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{R(x)}{x - x_0}(x - x_0). \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow x_0$ geht

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{R(x)}{x - x_0}}_{\rightarrow 0} \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0}.$$

d.h. $f(x) \rightarrow f(x_0)$ $\xRightarrow{\text{Def. Stetigkeit}} f$ stetig. $\square$

Bemerkung 5.7. Umgekehrt gilt das nicht, z.B.: die Betragsfunktion.

Beispiel 5.8. 1. Konstante Funktionen $f \equiv c$ sind stetig differenzierbar mit $f'(x_0) = 0 \forall x_0$.

2. Lineare Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f = ax$ sind stetig differenzierbar mit $f'(x_0) = a \forall x_0$, weil

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h) - ax_0}{h} = a.$$

3. Monomfunktion: $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ ist stetig differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1} \forall x$, weil

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} \cdot x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}}{h} \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + \dots + x^{n-1}}_{n\text{-mal}} \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

4. Elementare rationale Funktionen $f = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

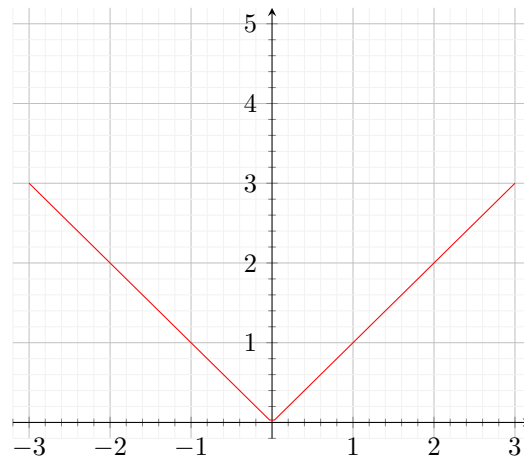
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{x - (x+h)}{(x+h) \cdot x} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{-\frac{1}{(x+h) \cdot x}}_{\rightarrow x} = -\frac{1}{x^2}.$$

5. Betragsfunktion $f(x) = |x|$

$$f'(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. $\frac{d|x|}{dx}$ für $x_0 = 0$ existiert nicht. Allerdings existieren die einseitigen Ableitungen.

Abbildung 4: Betragsfunktion



6. Exponential-Funktion $f(x) = e^x$ ist stetig differenzierbar $\forall x$ mit $f'(x) = e^x$, weil

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x.$$

mit

$$\begin{aligned} e^h &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots \\ \frac{e^h - 1}{h} &= 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \dots \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1. \end{aligned}$$

7. Sinus / Cosinus. mit $\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cdot \sin \frac{1}{2}(x-y)$ folgt

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(\frac{1}{2}h + x \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{2}h \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\cos \left(\frac{1}{2}h + x \right)}_{\rightarrow \cos x} \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{1}{2}h \right)}{\frac{h}{2}}}_{\rightarrow 1} \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

$\cos'(x) = -\sin(x)$ folgt analog.

Satz 5.9 (Ableitungsregeln). Für die Ableitungen gelten folgende Rechenregeln. Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

1. Lineare Kombinationen $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar mit

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2. Produktregel

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

3. Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2}.$$

$$g(x) \neq 0$$

Beweis. 1. Z.z.: $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha f + \beta g)(x_1) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x_1 - x_0} &= \alpha \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) + \beta \left(\frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} \right) \\ &\xrightarrow{x_1 \rightarrow x_0} \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \end{aligned}$$

2. Z.z.: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1)g(x_1) - f(x_0)g(x_0)}{x_1 - x_0} &= \frac{f(x_1)g(x_1) - f(x_0)g(x_1) + f(x_0)g(x_1) - f(x_0)g(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= g(x_1) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + f(x_0) \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &\xrightarrow[g \text{ stetig in } x_0]{x_1 \rightarrow x_0} g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

3. Z.z.: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Für $f \equiv 1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \\ &\stackrel{g \text{ stetig}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x_0)^2} \cdot (-g'(x_0)) \end{aligned}$$

Nun für f beliebig mit Produktregel:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= (f \cdot \frac{1}{g})'(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' \\ &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

□

Satz 5.10 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion). Sei $f: D \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ stetige invertierbare Funktion mit Inverser

$$f^{-1}: B \rightarrow D.$$

Ist f in $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad y_0 = f(x_0).$$

Beweis. Sei $y_n = f(x_n)$, $y_0 = f(x_0)$, $y_n \neq y_0$, $y_n \rightarrow y_0$, $n \rightarrow \infty$. Wegen Stetigkeit von f^{-1} gilt $\underbrace{f^{-1}(y_n)}_{=x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{=x_0}$, oder $x_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_n$.

Berechne

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f'(x_0))^{-1}.$$

□

Satz 5.11 (Kettenregel). Seien $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. f in $x_0 \in D_f$ differenzierbar, g in $y_0 = f(x_0) \in D_g$ differenzierbar. Dann ist $(g \circ f): D_f \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gilt die Kettenregel

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Definiere die Funktion $\Delta g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\Delta g(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 = f(x_0) \\ g'(y_0) & y = y_0 \end{cases}$.

g in y_0 differenzierbar $\implies \exists g'(y_0) \implies \lim_{y \rightarrow y_0} \Delta g(y) = g'(y_0)$.

Für $y \in D_g$ gilt $g(y) = g(y_0) + \Delta g(y)(y - y_0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overbrace{g(f(x))}^y - \overbrace{g(f(x_0))}^{y_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta g(f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.12. Für $x > 0$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

$\ln x$ auf $]0, \infty[$ ist stetig differenzierbar.

$$\ln'(y) = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

$$y = e^x$$

Trick: $y = u^v$, $u = u(x)$, $v = v(x)$

$$\begin{aligned} \ln y &= v \ln u \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= v' \ln u + v \cdot \ln u + v \cdot (\ln u)' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u' \\ \implies y' &= y(v' \ln u + v \frac{1}{u} u') \\ \implies (u^v)' &= u^v(v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u') = u^v \cdot \ln u \cdot v' + u^{v-1} \cdot v \cdot u'. \end{aligned}$$

$$y = \frac{(x^2+2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} e^x}{(x+5)^3} = g(x)$$

$$\ln y = \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{4}(x - 1) + x - 3 \ln(x + 5)$$

5.2 Mittelwertsatz und Satz von Rolle

Definition 5.13 (globales / lokales Extremum). Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein globales Extremum (Maximum oder Minimum), falls gilt $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D$.

Die Funktion f hat in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum), falls $\exists \delta > 0$, s.d. $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

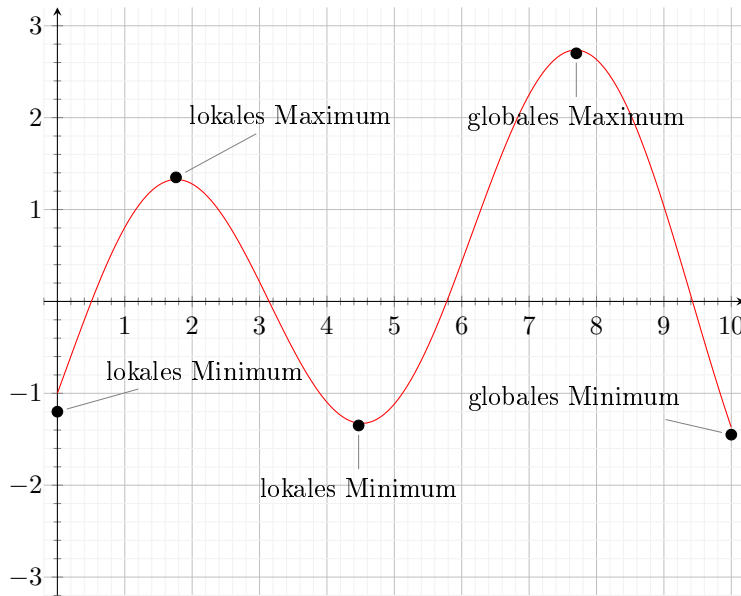


Abbildung 5: Beispiel für Extrema

Satz 5.14. Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$. Ist f in x_0 differenzierbar, und ist x_0 ein lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Sei x_0 ein lokales Maximum, dann $\exists \delta > 0$, s.d. $f(x) - f(x_0) \leq 0 \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap (a, b)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}_{\leq 0} = \lim_{x \nearrow x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}_{\geq 0}.$$

$\implies f'(x_0) = 0$. Analog für Minimum □

Bemerkung 5.15. 1. $a < x_0 < b$ ist wichtig! z.B.: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) := x$. Maximum bei $x = 1$, Minimum bei $x = 0$ mit Ableitung $f'(x) = 1 \neq 0$.

2. $f'(x_0)$ nur eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum, z.B.: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \implies f'(0) = 0$, aber $x = 0$ ist kein lokales Extremum.

Satz 5.16 (Satz von Rolle). Es sei $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$, f auf (a, b) differenzierbar.

Dann ex. ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Ist $f(x) = f(a) \forall x \in [a, b] \implies$ Behauptung $\forall \xi \in]a, b[$.

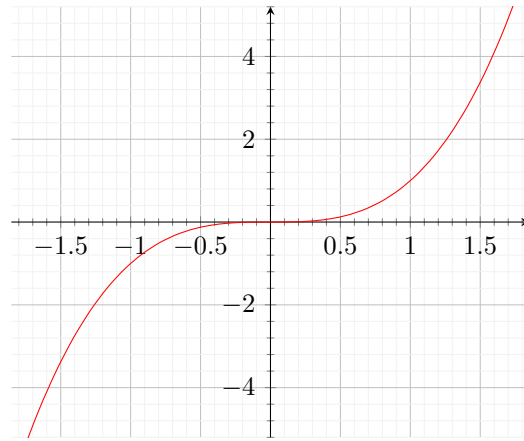
Nun f nicht konstant. $[a, b]$ ist kompakt und f ist stetig, d.h. f nimmt Minimum und Maximum an. $\implies \exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit $f(x_{\min}) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ und $f(x_{\max}) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

Da f nicht konstant $\implies f(x_{\min}) < f(a) = f(b)$ oder $f(x_{\max}) > f(a) = f(b)$.

$\implies x_{\min} \in (a, b)$ oder $x_{\max} \in (a, b)$

$\stackrel{\text{Satz 5.14}}{\implies} f'(x_{\min}) = 0$ oder $f'(x_{\max}) = 0$

$\implies$ Behauptung gilt mit $\xi = x_{\min}$ oder $\xi = x_{\max}$. □

Abbildung 6: x^3 hat bei $x = 0$ kein lokales Extremum

Satz 5.17 (Mittelwertsatz). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$. Dann ex. ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Beweis. Hilfsfunktion $g(x) := f(x) - f(a) - m(x-a)$ mit $m := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Damit folgt $g(a) = g(b) = 0 \xrightarrow{\text{Satz 5.16}} \exists \xi \in]a, b[$ mit $g'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. $\square$

Satz 5.18 (Monotoniekriterium). Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

- (i) f monoton wachsend $\iff f'(x) \geq 0 \ \forall x \in D$
- (ii) f streng monoton wachsend $\iff f'(x) > 0 \ \forall x \in D$

Für fallende Funktionen ersetze f durch $-f$.

Beweis. Es gilt $\forall a < b \in D$ nach Satz 5.17

$$f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0} f'(x) \quad (*).$$

für ein $x \in]a, b[$. Daraus folgt direkt (ii) und (i, „ $\Leftarrow$ “)

Für (i, „ $\implies$ “): Betrachte in (*):

$$\lim_{b \rightarrow a} \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\geq 0} = f'(a) \geq 0.$$

$\square$

Satz 5.19. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt f ist konstant auf $D \iff f' \equiv 0$ auf D

Beweis. „ $\implies$ “ klar.

„ $\Leftarrow$ “: Für $a < b \in D$ gilt $f(b) - f(a) = (b-a) \underbrace{f'(x)}_{=0}, x \in]a, b[\implies f(b) = f(a)$. $\square$

5.3 Höhere Ableitungen und Satz von Taylor

Definition 5.20. Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann sagt man: f ist zweimal differenzierbar und $f'': D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die zweite Ableitung von f .

Analog wird die n -te Ableitung $f^{(n)}$ von f definiert mit $f^{(0)} := f$, die „nullte“ Ableitung. Schreibe

$$\frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n f \quad \text{oder} \quad \frac{d^n}{dx^n} f.$$

Definition 5.21 ($C^n(D, \mathbb{R})$). Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar auf D , falls f auf D differenzierbar und $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Schreibe $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.

f heißt n -mal stetig differenzierbar auf D ($f \in C^n(D, \mathbb{R})$), falls f n -mal differenzierbar und $f^{(n)}: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Bemerkung 5.22. 1. Ist f beliebig oft differenzierbar, dann gilt $f \in C^\infty(D, \mathbb{R})$ bzw. f ist glatt auf D .

2. f stetig auf D , dann gilt $f \in C^0(D, \mathbb{R})$.

3. $f \in C^n(D, \mathbb{R}) \implies f^{(k)}$ stetig auf $D \forall 0 \leq k \leq n$.

Satz 5.23 (Satz von Taylor). Jede Funktion $f \in C^{n+1}(D, \mathbb{R})$ lässt sich für $x, x_0 \in D$ nach Potenzen von $(x - x_0)$ entwickeln:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_{n+1}(x).$$

Dabei ist das Restglied $R_{n+1}(x)$:

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

mit ξ ein Punkt zwischen x_0 und x ($\xi = x_0 + \tau(x - x_0)$, $\tau \in (0, 1)$).

Der Ausdruck

$$T_n(x) = T_n(f, x, x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

heißt Taylorpolynom n -ter Ordnung von f bei x_0 .

Beweis. Für $x = x_0$: klar.

Sei $x \neq x_0$. Betrachte $R = R(x, x_0)$ definiert durch $f(x) = T_n(f, x, x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot R$.

Für $y \in D$ definiere

$$\varphi(y) := f(y) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k - \frac{(x - y)^{n+1}}{(n+1)!} R.$$

Dann folgt $\varphi(x_0) = 0 = \varphi(x)$, $\varphi \in C^1$.

Satz von Rolle $\implies \exists \xi$ zwischen x und x_0 mit $\varphi'(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(\xi) &= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} k(x - \xi)^{k-1} (-1) + \frac{(n+1)(x - \xi)^n}{(n+1)!} R \\ &\stackrel{\text{Teleskop}}{=} - \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n + \frac{(x - \xi)^n}{n!} R \\ &= \frac{(x - \xi)^n}{n!} \left(-f^{(n+1)}(\xi) + R \right). \end{aligned}$$

$$\implies R = f^{(n+1)}(\xi), \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0.$$

□

Satz 5.24. Sei f auf einem beschränkten Intervall (a, b) eine C^∞ Funktion mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen.

$$\sup_{x \in (a, b)} |f^{(n)}(x)| \leq M < \infty.$$

Dann ist f auf (a, b) analytisch, d.h. $\forall x, x_0 \in (a, b)$ konvergiert die Taylor-Reihe von f und es gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Beweis.

$$|f(x) - T_n(f, x, x_0)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon, \text{ s.d. } \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} < \epsilon$$

□

Bemerkung 5.25. 1. Eine C^∞ Funktion muss nicht analytisch sein.

2. Ist $f \in C^n$ mit $f^{(n)} \equiv 0$ auf D , dann ist f ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich $n-1$, da

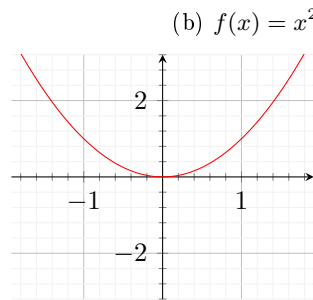
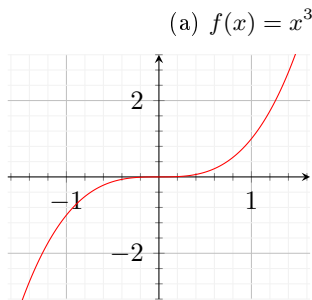
$$f(x) = T_{n-1}(f, x, x_0) + \underbrace{R_n(x, x_0)}_{=0}.$$

Korrolar 5.26 (Lokale Extrema). Sei $f \in C^n(D, \mathbb{R})$, $D = (a, b)$ und für $x_0 \in (a, b)$ gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt

1. Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$ bzw. $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann ist x_0 ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum von f .
2. Ist n ungerade, dann ist x_0 kein lokales Extremum von f (Sattelpunkt, Wendepunkt).



Beweis. Satz von Taylor $\implies f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n$ $f^{(n)}$ stetig in x_0 , $f^{(n)} \neq 0$ in x_0
 $\implies \exists \delta > 0$, s.d. $f^{(n)}(x) \neq 0$ für $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ und hat das gleiche Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$.

1. n gerade $\implies (x - x_0)^n > 0$, falls $x \neq x_0$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \underbrace{(x - x_0)^n}_{>0}.$$

$\implies$ Wegen $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(\xi)$ folgt $f(x) > f(x_0)$, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ und $f(x) < f(x_0)$, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$.

2. n ungerade, wechselt $(x - x_0)^n$ das Vorzeichen.

□

Korrolar 5.27. Sei $f \in C^2((a, b), \mathbb{R})$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann folgt

- (i) x_0 ist ein lokales Minimum von $f \implies f'(x_0) = 0, f''(x_0) \geq 0$
- (ii) x_0 ist ein lokales Maximum von $f \implies f'(x_0) = 0, f''(x_0) \leq 0$.

Beweis. klar. □

Korrolar 5.28 (Hinreichende Optimalitätsbedingung). Sei x_0 mit $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$. Dann ist x_0 ein lokales Minimum.

Beweis. trivial. □

5.4 Die Regeln von de l'Hospital

Ziel: Grenzwerte zu berechnen für $x \rightarrow \pm\infty$ oder $f(x) \rightarrow \pm\infty$. Grenzwerte vom Typ:

$$\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^\infty, \dots \right).$$

Lemma 5.29 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). Seien f, g im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Dann $\exists$ ein $c \in (a, b)$ s.d. gilt

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 5.30 (1. Regel von de l'Hospital). Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty, I := (a, b)$ und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = 0 = \lim_{x \nearrow b} g(x).$$

Es gelte $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$ und $\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c. c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dann gilt:

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \text{ und } \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Analoge Aussagen gelten für $x \searrow a$.

Beweis. f, g in b stetig $\implies f(b) = g(b) = 0. g'(x) \neq 0 \implies$ keine weiteren Nullstellen von g in (a, b) , d.h. $g(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.

Wir nutzen den verallgemeinerten Mittelwertsatz. $\implies \exists \xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Aus $x \nearrow b$ folgt $\xi \nearrow b \implies$ Behauptung. □

Beispiel 5.31.

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2.

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{2x} = +\infty$$

3.

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2 \sin(x) \cdot \cos(x)}{2x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2(\cos^2 x - \sin^2(x))}{2} = 1.$$

Satz 5.32 (2. Regel von de l'Hospital). Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $I := (a, b)$ und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty$, $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$.

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Dann gilt: $\exists x_0 \in I$ mit $g(x) \neq 0$ für $a < x_0 \leq x < b$ und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Analoge Aussage für $x \searrow a$.

Beweis. Rannacher. □

Bemerkung 5.33. 1. Grenzprozesse für $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Substitution $y = \frac{1}{x}$, ($y \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$).

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})}.$$

2. $0 - \infty$

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = 0, \lim_{x \nearrow b} g(x) = \infty.$$

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)^{-1}} \sim \frac{0}{0}.$$

3. $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow b} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow b} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} \sim \frac{0}{0}.$$

4. $f(x) \rightarrow 1, g(x) \rightarrow \infty$

$$f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow 0$$

$$f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$$

$$\lim f(x)^{g(x)}?$$

Logarithmiere $f(x)^{g(x)} = A$.

$$\ln A = g(x) \cdot \ln f(x).$$

$$\lim A = \exp(\lim g(x) \cdot \ln(f(x)))$$

6 Integration

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ziel: Fläche unter dem Graphen berechnen.

6.1 Riemannintegral

Definition 6.1 (Zerlegungen, Stützpunkte). Eine endliche Zerlegung Z von einem (beschränkten) Intervall $[a, b]$ ist eine endliche Folge $z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. x_k heißen Teilungs- oder Stützpunkte. Die Intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ heißen Teilintervalle. $h := \max_{k=1 \dots n} |x_k - x_{k-1}|$ heißt Feinheit der Zerlegung.

Eine Zerlegung mit $|x_k - x_{k-1}| = h \ \forall k$ heißt äquidistant.

$\mathcal{Z}(a, b)$ = Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$

Definition 6.2 (Ober- und Untersumme). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. $\exists M \in \mathbb{R}$, s.d. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in [a, b]$.

Die Riemannschen Ober- / Untersummen sind

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^n \sup_{x \in I_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

bzw.

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^n \inf_{x \in I_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Bemerkung 6.3. Eine Verfeinerung der Zerlegung Z ist eine Zerlegung $Z'' = (x''_0, \dots, x''_{n''})$ s.d. $(x_0, \dots, x_n) \subset (x''_0, \dots, x''_{n''})$ und $h'' \leq h$. Zu Zerlegungen $Z = (x_0, \dots, x_n)$ und $Z' = (x'_0, \dots, x'_{n'})$ gibt es eine gemeinsame Verfeinerung Z''

$$\begin{aligned} (x_0, \dots, x_n) &\subset (x''_0, \dots, x''_{n''}) \\ (x'_0, \dots, x'_{n'}) &\subset (x''_0, \dots, x''_{n''}) \end{aligned}$$

und $h'' \leq \min\{h, h'\}$

Bemerkung 6.4. Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen und Z_1 feiner als Z_2 ist, dann gilt

$$\inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \cdot (b-a) \leq \underline{S}_{Z_2}(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \leq \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \cdot (b-a).$$

Definition 6.5 (Ober-/Unterintegral). Das Ober- / Unterintegral von f sind definiert durch

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx := \inf\{\overline{S}_Z(f) \mid z \in \mathcal{Z}(a, b)\}.$$

bzw.

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx := \sup\{\underline{S}_Z(f) \mid z \in \mathcal{Z}(a, b)\}.$$

Lemma 6.6. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ex. für f das Ober- und Unterintegral und für jede Folge von Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{Z_n}(f) = \underline{\int_a^b} f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(f).$$

Beweis. Rannacher. □

Definition 6.7 (Riemann-Integral). Sind Ober- und Unterintegral für eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleich, so heißt der gemeinsame Wert das (bestimmte) Riemann-Integral für f über $I = [a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^b f(x)dx.$$

Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar.

Satz 6.8 (Riemannsches Integrabilitätskriterium). Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann auf $I = [a, b]$ integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0 \exists$ Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$, s.d. $|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| < \epsilon$.

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 6.9 (Riemann-Summen). Sei $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, i = 1 \dots n$.

$$RS_Z(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

heißt eine Riemann-Summe von f .

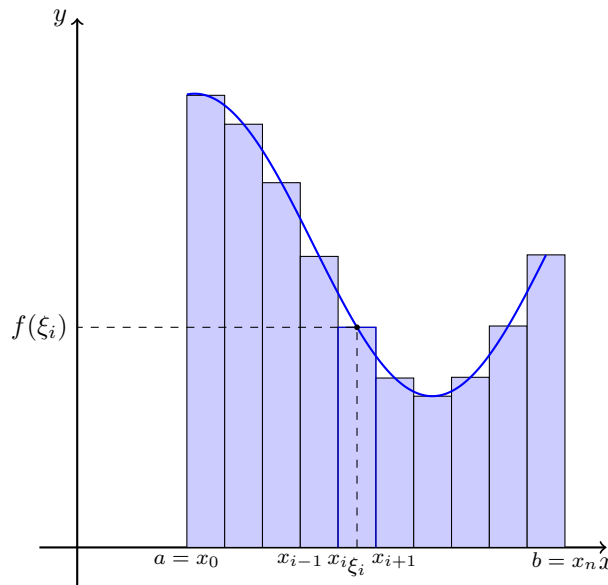


Abbildung 8: Riemannsche Summen

Satz 6.10. Eine beschränkte Funktion $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann R.-integrierbar wenn $\forall$ Folgen $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ alle zugehörigen R.-Summen zu dem selben Limes konvergieren.

$$RS_{Z_n}(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. „ $\implies$ “: Sei f R.-integrierbar. Sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit Feinheit h . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underbrace{RS_Z(f)}_{\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)} \leq \overline{S}_Z(f).$$

Aus der Konvergenz $|\underline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \xRightarrow{\text{Sandwich}} RS_Z \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$.

„ $\impliedby$ “ Seien alle R.-Summen konvergent gegen denselben Limes. Sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b), \epsilon > 0$ beliebig.

Offenbar $\exists$ R.-S. $\underline{RS}_Z(f)$, $\overline{RS}_Z(f)$ s.d. $\underline{RS}_Z(f) - \epsilon \leq \underline{S}_Z(f)$ und $\overline{S}_Z(f) \leq \overline{RS}_Z(f) + \epsilon$.

Dann

$$\underbrace{\underline{RS}_Z(f)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_a^b f(x) dx} - \epsilon \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq \underbrace{\overline{RS}_Z(f)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_a^b f(x) dx} + \epsilon.$$

Wegen ϵ beliebig folgt:

$$|\underline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

□

Satz 6.11. Eine stetige Funktion $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. $I = [a, b]$ kompakt $\implies f$ auch gleichmäßig stetig $\implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$, s.d. $\forall x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta_\epsilon$ gilt $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit Feinheit $h < \delta_\epsilon$, dann

$$\begin{aligned} |\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| &\leq \sum_{k=1}^n \underbrace{\left| \sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \right|}_{< \epsilon} \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &< \epsilon \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \epsilon(b - a). \end{aligned}$$

$\implies |\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \rightarrow 0, h \rightarrow 0$
 $\implies f$ Riemann-integrierbar.

□

Satz 6.12. Eine beschränkte monotone Funktion $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. Sei f monoton steigend. Dann gilt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, $x \in I$.

Sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit h .

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) \leq h \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = h(f(b) - f(a)).$$

Sei $\epsilon > 0$, dann wähle $h_\epsilon := \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$ ($f(b) \neq f(a)$, sonst trivial). Dann gilt für $h < h_\epsilon$

$$|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| < \epsilon.$$

□

Beispiel 6.13. Nicht alle beschränkte Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sind R.-integrierbar, z.B.:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

$I = [0, 1]$. $\underline{S}_Z(f) = 0 \neq 1 = \overline{S}_Z(f)$.

6.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 6.14 (Additivität). 1. Eine (beschr.) R.-integrierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch über jedem Teilintervall $[a', b'] \subset [a, b]$ R.-integrierbar. Insb. gilt für $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad (*).$$

2. Ist eine (beschr.) Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für ein $c \in (a, b)$ über $[a, c]$ und $[c, b]$ R.-integrierbar, dann ist f über $[a, b]$ integrierbar und es gilt (*).

Beweis. ohne Beweis. □

Korrolar 6.15. Eine beschränkte Funktion $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, welche bezüglich einer Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$ von I stückweise stetig ist oder stückweise monoton ist, ist über I Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

Beispiel 6.16.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

auf $I = [0, 1]$ ist $f(x)$ R.-integrierbar. Auf I hat $f(x)$ eine Unstetigkeit bei $x = 0$.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann $\exists \delta \in [0, 1]$, s.d.

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \cdot \delta < \frac{1}{4} \epsilon.$$

Auf $[\delta, 1] f(x)$ stetig und R.-integrierbar. Dann ex. eine Zerlegung $Z_\delta \in \mathcal{Z}(\delta, 1)$, s.d.

$$|\overline{S}_{Z_\delta}(f) - \underline{S}_{Z_\delta}(f)| < \frac{1}{2} \epsilon.$$

Ergänze Z_δ um das Intervall $[0, \delta] \implies Z \in \mathcal{Z}(0, 1)$. Und es gilt

$$|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \leq |\overline{S}_{Z_\delta}(f) - \underline{S}_{Z_\delta}(f)| + 2 \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x)| \cdot \delta < \epsilon.$$

Satz 6.17 (Linearität). Seien $f, g: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (beschränkt) R.-integrierbar. Dann ist $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ über I R.-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Es ex. $RS_Z(f)$ und $RS_Z(g)$ s.d.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} RS_Z(f) &= \int_a^b f(x)dx \\ \lim_{h \rightarrow 0} RS_Z(g) &= \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

o.B.d.A. Z und ξ_k sind gleich für f und g . Damit folgt

$$\begin{aligned}
 RS_Z(\alpha f + \beta g) &:= RS_Z(\alpha f) + RS_Z(\beta g) = \alpha RS_Z(f) + \beta RS_Z(g) \\
 \implies \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx &= \alpha \lim_{h \rightarrow 0} RS_Z(f) + \beta \lim_{h \rightarrow 0} RS_Z(g) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (\alpha \cdot RS_Z(f)) + \lim_{h \rightarrow 0} (\beta \cdot RS_Z(g)) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} RS_Z(\alpha f) + \lim_{h \rightarrow 0} RS_Z(\beta g) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} RS_Z(\alpha f + \beta g) \\
 &= \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx.
 \end{aligned}$$

□

Satz 6.18 (Monotonie des Riemann-Integrals). Seien $f, g: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (beschränkte) R.-integrierbare Funktionen mit $g(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Es gilt für Zerlegung Z und $\xi_k \in I_k$:

$$RS_Z(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = RS_Z(g).$$

Für $h \rightarrow 0$ folgt die Behauptung.

□

Korrolar 6.19. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (beschr.) R.-integrierbare Funktion, $m \leq f(x) \leq M$. Dann gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Beweis. $g \equiv 1 \implies \int_a^b 1dx = (b-a)$ Damit folgt

$$m(b-a) = \int_a^b m \cdot dx \stackrel{\text{Satz 6.18}}{\leq} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a).$$

□

Korrolar 6.20. Seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei beschr. R.-integrierbare Funktionen. Dann gilt

- (a) $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := \min\{f, 0\}$ sind R.-integrierbar
- (b) $|f|$ ist R.-integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

- (c) $\forall p \in [1, \infty)$ ist $|f|^p$ R.-integrierbar
- (d) $f \cdot g$ ist R.-integrierbar.

Beweis. (a) $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \overline{S}_Z(f_+) - \underline{S}_Z(f_+) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \\
 0 &\leq \overline{S}_Z(f_-) - \underline{S}_Z(f_-) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f).
 \end{aligned}$$

Falls $|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \implies |\overline{S}_Z(f_{\pm}) - \underline{S}_Z(f_{\pm})| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \implies \text{Beh.}$

$$(b) \quad |f| = f_+ - f_- \xrightarrow{\text{Linearität}} |f| \text{ R.-integrierbar. } f \leq |f|, -f \leq |f| \xrightarrow{\text{Monotonie}} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \implies \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(c) Sei $M = \sup_{x \in [a,b]} |f| \xrightarrow{\text{linear}} \frac{|f|}{M}$ integrierbar. $0 \leq \frac{|f|}{M} \leq 1 \implies$ z.Zg.: $|f|^p$ integr. für $0 \leq p \leq 1$.
Sei $0 \leq x \leq y \leq 1$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\begin{aligned} y^p - x^p &= p \cdot \xi^{p-1}(y - x) \\ \implies |y|^p - |x|^p &= p \cdot |\xi|^{p-1}(|y| - |x|) \leq p(|y| - |x|). \end{aligned}$$

Für $Z \in \mathcal{Z}(0,1)$ gilt

$$\underbrace{\overline{S}_Z(|f|^p) - \underline{S}_Z(|f|^p)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \leq p \underbrace{(\overline{S}_Z(|f|) - \underline{S}_Z(|f|))}_{\xleftarrow{h \rightarrow 0} 0}.$$

(d) $f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ und c).

□

Bemerkung 6.21. Im Allgemeinen ist

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right).$$

Korollar 6.22 (Definitheit des R.-Integrals). Sei $f: I = [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0, x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \implies f \equiv 0.$$

Beweis. durch Kontraposition. Sei $f \not\equiv 0$, d.h. $\exists x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$. $\xrightarrow{f \text{ stetig}} \exists I_\epsilon := [x_0, x_0 + \epsilon]$ oder $I_\epsilon := [x_0 - \epsilon, x_0]$, s.d. $f(x) \geq \delta > 0 \forall x \in I_\epsilon$.

Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit h klein genug, s.d. für ein k $I_k \subset I_\epsilon$. Dann gilt

$$0 < \delta(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{x \in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \int_a^b f(x)dx.$$

□

Definition 6.23. Sei $a \leq b$ Dann ist

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x)dx &:= - \int_a^b f(x)dx \\ \int_a^a f(x)dx &:= 0. \end{aligned}$$

Satz 6.24 (1. Mittelwertsatz). Sei $f: I = [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ R.-integrierbar. g habe in I keinen Vorzeichenwechsel. Dann $\exists \xi \in [a,b]$ s.d. gilt

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Sei $g \geq 0$ (o.B.d.A.). f stetig $\implies \exists m = \min_{x \in I} f(x), M = \max_{x \in I} f(x)$. Dann folgt

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Betrachte $\varphi(t) := (m(1-t) + M \cdot t) \int_a^b g(x)dx$, $t \in [0, 1]$. Nach ZWS $\exists \theta \in [0, 1]$, s.d.

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &= y = (m(1-\theta) + M \cdot \theta) \int_a^b g(x)dx \\ \varphi(0) &\leq y \leq \varphi(1) \\ m \int_a^b g(x)dx &\leq y \leq M \int_a^b g(x)dx \\ \implies \int_a^b f(x)g(x)dx &= \mu \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

Nach dem ZWS für $f \exists \xi \in [a, b]$, s.d. $f(\xi) = \mu \in [m, M]$. □

Korrolar 6.25. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

1. $\exists \xi \in I$, s.d. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$
2. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $m \leq f(x) \leq M$. $x \in I$. Sei $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ R.-integrierbar mit $g \geq 0$. Dann gilt

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Bemerkung 6.26. Voraussetzungen sind unverzichtbar!

Stetigkeit: $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ unstetig.

$$f(\xi)(b-a) = f(\xi) \cdot 2 = \begin{cases} 0 & 0 \leq \xi < 1 \\ 2 & 1 \leq \xi \leq 2 \end{cases} \neq 1 = \int_0^2 f(x)dx.$$

Positivität: $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 (-x)dx + \int_1^2 xdx = -\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

aber

$$\xi \cdot \int_0^2 g(x)dx = \xi \cdot 0 = 0 \quad \forall \xi \in [0, 2].$$

6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 6.27 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Es sei $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

- (a) Die Funktion $F_0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$ ist stetig differenzierbar auf $[a, b]$ und

$$F_0'(x) = f(x) \quad x \in [a, b] \quad (*).$$

Jede Funktion $F \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ welche (*) erfüllt, heißt Stammfunktion von f .

- (b) Jede Stammfunktion F von f hat die Form

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)dt = C + F_0(x).$$

(c) Ist F eine Stammfunktion von f , dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \text{ d.h. insb. } \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) \quad \forall F \in C^1([a, b], \mathbb{R}).$$

Beweis. (a) Für $h \neq 0, x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \stackrel{1. \text{ MWS}}{=} \frac{1}{h} f(\xi_h) \cdot h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x) \\ \implies F'_0(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = f(x). \end{aligned}$$

(b) Sei F eine Stammfunktion von f , dann gilt $(F - F_0)' = f - f = 0 \stackrel{\text{MWS Diff.}}{\implies} F - F_0 \equiv \text{konstant} = C \implies F = F_0 + C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

(c) $F(b) - F(a) \stackrel{(b)}{=} F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)dt$

□

Bemerkung 6.28. 1. $F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b \implies \int_a^b F'(t)dt = F(x) \Big|_a^b$.

Man bezeichnet eine Stammfunktion auch als unbestimmtes Integral

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

(math. nicht korrekte Bezeichnung)

2. Integration und Differentiation sind inverse zu einander

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt &= f(x) \\ F(x) &= F(a) + \int_a^x F'(t)dt. \end{aligned}$$

Korollar 6.29 (2. Mittelwertsatz). Seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ R.-integrierbar. Dann ex. $\xi \in [a, b]$ s.d.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

Beweis. o.B.d.A: f monoton fallend.

Definiere $\phi(t) := f(a) \int_a^t g(x)dx + f(b) \int_t^b g(x)dx$, $a \leq t \leq b$. Nach HDI $\phi(t)$ stetig.

$$\phi(a) = f(b) \int_a^b g(x)dx \stackrel{f \text{ monoton fallend}}{\leq} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(a) \int_a^b g(x)dx = \phi(b).$$

Nach ZWS $\exists \xi \in [a, b]$ s.d. $\phi(\xi) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

□

Bemerkung 6.30. Monotonie unverzichtbar. $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, $I = [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} f(-1) \int_{-1}^\xi g(x)dx + f(1) \int_\xi^1 g(x)dx &= \int_{-1}^1 1dx = 2 \quad \forall \xi \in I \\ \int_{-1}^1 x^2 dx &= \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \neq 2. \end{aligned}$$

6.4 Integrationsformeln

Lemma 6.31 (Partielle Integration). $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x) \cdot g(x)] \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beweis. $(f \cdot g)'(x) = f' \cdot g + f \cdot g' \implies$

$$\int_a^b (f' \cdot g + f \cdot g')(x)dx = \int_a^b (f \cdot g)'(x)dx \stackrel{\text{HDI}}{=} (f \cdot g)(x) \Big|_a^b.$$

□

Beispiel 6.32.

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos^2(x) &= \int_a^b \cos x \cdot \cos x dx \\ &= \cos x \cdot \sin x \Big|_a^b - \int_a^b (-\sin x) \sin x dx \\ &= \cos x \cdot \sin x \Big|_a^b + \int_a^b (1 - \cos^2(x)) dx \\ \implies 2 \int_a^b \cos^2(x) dx &= \cos x \cdot \sin x \Big|_a^b + \int_a^b dx. \end{aligned}$$

Lemma 6.33. Seien $[a, b], [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar mit $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f . Dann $F \circ \varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$(F \circ \varphi)' = (F'(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t)dt = (F \circ \varphi)(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

□

Bemerkung 6.34. Formal: $x = \varphi(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) &\implies dx = \varphi'(t)dt \\ \int_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b} f(x)dx &= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \end{aligned}$$

Beispiel 6.35.

$$\int_0^2 t \cdot \underbrace{\cos(t^2 + t)}_x dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{\cos(t^2 + t)}_{\varphi(t)} \cdot 2t dt = \frac{1}{2} \int_{\varphi(0)=1}^{\varphi(2)=5} \cos x dx.$$

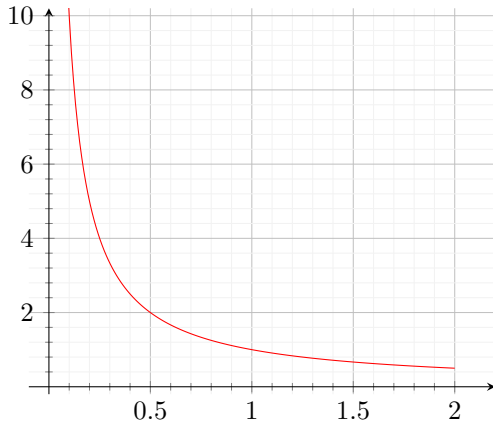
6.5 Uneigentliche Integrale

Satz 6.36 (Uneigentliches R.-Integral Typ 1). Sei $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $(a, b]$ R.-integrierbar, d.h. f R.-integrierbar auf $\forall [a', b] \subset (a, b]$, aber nicht auf $[a, b]$.

Falls für alle Folgen $a_n \in (a, b]$ ex.

$$\lim_{a_n \searrow a} \int_{a_n}^b f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx.$$

Dann gilt: Dieser Limes ist von der Wahl der Folge a_n unabhängig und heißt das uneigentliche Integral von f über $[a, b]$.



Beweis. Sei $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit

$$\lim_{a_n \searrow a} \int_{a'}^b f(x) dx = A'.$$

Konstruiere Folge $\{a_1, a'_1, a_2, a'_2, \dots\} = (a''_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nach Voraussetzungen

$$\exists \lim_{a''_n \searrow a} \int_{a''}^b f(x) dx = A''.$$

Alle Teilfolgen konvergenter Folgen, konvergieren gegen denselben Limes wie die Gesamtfolge $\Rightarrow A'' = A'$. $\square$

Lemma 6.37. Sei $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $(a, b]$ aber nicht auf $[a, b]$ integrierbar.

Falls das uneigentliche Integral von $|f|$ auf $[a, b]$ ex., dann ex. das uneigentliche Integral von f über $[a, b]$ und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0, \epsilon < b - a$. Betrachte

$$\int_{a+\epsilon}^b f(x) dx = \int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)| + f(x)}{2} dx - \int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)| - f(x)}{2} dx.$$

Integrale sind gleichmäßig beschränkt.

$$\frac{|f(x)| + f(x)}{2} > 0 \quad \forall x \quad \text{und} \quad \frac{|f(x)| - f(x)}{2} > 0 \quad \forall x.$$

$\Rightarrow \int_{a+\epsilon}^b \dots dx$ monoton wachsend für $\epsilon \rightarrow 0$ und

$$\left| \int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)| + f(x)}{2} dx \right| + \left| \int_{a+\epsilon}^b \frac{|f(x)| - f(x)}{2} dx \right| \leq \frac{4}{2} \int_{a+\epsilon}^b |f(x)| dx \leq 2 \int_a^b |f(x)| dx.$$

$\Rightarrow$ Für $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx.$$

□

Bemerkung 6.38. 1. Umkehrung der Aussage (d.h. f uneigentlich integrierbar $\Rightarrow |f|$ uneigentlich integrierbar) ist i.A. nicht richtig.

„einfache“ Konvergenz, d.h. $\exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$.

„absolute“ Konvergenz / absolut uneigentlich integrierbar, d.h. $\exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b |f(x)| dx$.

2. Sei $\int_a^b f(x) dx$ bei b uneigentlich und bei a nicht uneigentlich, dann definiert man das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt \quad \text{oder} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx.$$

falls der Limes existiert!

3. Sei $\int_a^b f(x) dx$ bei a und b uneigentlich, dann

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_c^{b-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^c f(x) dx.$$

mit $c \in (a, b)$, falls beide Grenzwerte existieren, ist der Wert unabhängig von der Wahl von $c \in (a, b)$.

4. Uneigentliches Integral existiert $\iff$ uneigentliches Integral konvergiert.

Lemma 6.39 (wie bei Reihen). Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Einfache Konvergenz

Beispiel 6.40.

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty.$$

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \frac{1}{1-\mu} \frac{1}{(x-a)^{\mu-1}} \Big|_{a+\epsilon}^b = \frac{1}{1-\mu} \left(\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\epsilon^{\mu-1}} \right).$$

$\Rightarrow$ Integral ex. für $0 < \mu < 1$, ex. nicht für $\mu \geq 1$.

Satz 6.41 (Uneigentliche R.-Integrale Typ 2). Sei $f: [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion, d.h. f ist auf $[a, b'] \subset [a, \infty)$ integrierbar $\forall b'$.

Falls für alle Folgen $b_n \in [a, +\infty)$ der Limes

$$\lim_{b_n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} f(x) dx =: \int_a^\infty f(x) dx.$$

existiert, dann ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und heißt uneigentliches Integral von f über $[a, \infty)$.

Lemma 6.42. Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar und es existiere $\int_a^\infty |f(x)|dx$. Dann ex. $\int_a^\infty f(x)dx$ und es gilt

$$\left| \int_a^\infty f(x)dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx.$$

Ende.

□