Aufgabe 1 (Gravitative Lichtablenkung). a) Die Lichtteilchen befinden sich offenbar auf ungebundenen Bahnen, da wir das Licht sehen können. Außerdem ist $E > 0$, also bewegen sich die Lichtteilchen auf einer Hyperbelbahn.

b) $L = bmv_\infty$, mit $b = R = R_{\text{Sonne}}$ und $v_\infty = c$ folgt $L = Rmc$.

c) $r(\varphi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}$. Für $r \to \infty$ folgt $1 + \epsilon\cos\varphi \to 0$. Damit folgt $\overline{\varphi} = \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)$.

Für die numerische Exzentrizität gilt

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{c^4R^2}{G^2M^2}}.$$

ϵ ist also masseunabhänig.

$\varphi_a = \overline{\varphi} \implies \varphi_e = \pi - \overline{\varphi}$.

d) Mit (c) folgt $\vartheta = \varphi_a - \varphi_e = 2\overline{\varphi} - \pi$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\vartheta &= 2 \cdot \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^4R^2}{G^2M^2}}}\right) - \pi \\ &= 2 \cdot \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(3\times 10^8\ \text{ms}^{-1})^4(7\times 10^8\ \text{m})^2}{(6.7\times 10^{-11}\ \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2})^2(2\times 10^{30}\ \text{kg})^2}}}\right) - \pi \\ &= 0.88''.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Freier Fall auf zwei Wegen). a) Hier bezeichnen die Integrationskonstanten v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und h_0 die Anfangshöhe.

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -g \\ \dot{x}(t) &= -gt + v_0 \\ x(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0.\end{aligned}$$

b) Zunächst: Lösung der homogenen DGL $\ddot{x}(t) = 0$. Zu erwarten ist ein Fundamentalsystem von zwei linear unabhängigen Lösungen:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 1 \\ x_2(t) &= t.\end{aligned}$$

Diese sind offensichtlich linear unabhängig. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $\ddot{x}(t) = -g$ ist:

$$x_p(t) = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}x(t) &= Ax_1(t) + Bx_2(t) + x_p(t) \\ &= A + Bt - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Mit $A = h_0$ und $B = v_0$ folgt damit erneut:

$$x(t) = h_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2.$$

c) Die allgemeinen Lösungen in a) und b) sind wie zu erwarten die gleichen. Durch das schrittweise Integrieren in a) müssen Integrationskonstanten hinzugefügt werden, um die Allgemeinheit der Lösung zu erhalten.

Bei b) wird die Allgemeinheit durch die Linearkombination der zwei linear unabhängigen Lösungen x_1 und x_2 sicher gestellt.

Aufgabe 3 (Gekoppelte Wasserbecken). a) Becken A: Der Wasserabfluss ist proportional zum Wasservolumen. f_A ist der Proportionalitätsfaktor. Wegen $f_A < 0$ fließt das Wasser ab. Es handelt sich um eine homogene DGL.

Becken B: Hier gibt es einen Wasserabfluss $-f_B V_B$, der proportional zum Wasservolumen ist. f_B ist hier der Proportionalitätsfaktor. Zudem gibt es einen Zufluss $f_A V_A$, der dem Abfluss aus Becken A entspricht. Es handelt sich wegen $f_A V_A$ um eine inhomogene DGL.

b) Im folgenden sei $f = f_A = f_B$. Dann folgt:

$$\frac{\mathrm{d}V_A}{\mathrm{d}t} = -fV_A$$
$$\frac{\mathrm{d}V_A}{V_A} = -f\ \mathrm{d}t$$
$$\ln(_A) = -ft + C$$

Mit $V_{A,0} = e^C$ folgt

$$V_A = V_{A,0}e^{-ft}$$

Für den homogenen Teil von V_B folgt analog

$$V_{B_h} = V_{B,0}e^{-ft}.$$

c) Durch Variation der Konstanten $V_{B,0} = B(t)$ folgt $V_B(t) = B(t)e^{-ft}$. Damit

$$\dot{V}_B = \dot{B}e^{-ft} - fBe^{-ft} = \dot{B}e^{-ft} - fV_B$$

Durch Einsetzen in die Ausgangs DGL für B ergibt sich

$$\dot{B}e^{-ft} - fV_B = -fV_B + fV_A$$

Mit $V_A = V_{A,0}e^{-ft}$ folgt

$$\dot{B} = fV_{A,0}e^{-ft+ft} = fV_{A,0}$$

Durch Integration erhalten wir

$$B = fV_{A,0}t + C$$

Mit $V_B(t = 0) = C \stackrel{!}{=}$ folgt $C = 0$. Damit folgt

$$V_B(t) = fV_{A,0}t \cdot e^{-ft}.$$

d) Das Volumen von B steigt zunächst durch den großen Abfluss von A an. Für sehr kleine t ist $e^{-ft} \approx 1$, das heißt der Anstieg kommt durch den linearen Teil $fV_{A,0}t$ zustande. Je größer das Volumen von B, desto mehr fließt auch ab, deswegen wird dann ein Maximum erreicht, nach dem das Volumen monoton fällt.