VL 19 und 20

Peano. $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann hat das AWP

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$\forall (x_0, y_0) \in D$ eine Lösung mit max. Def.bereich.

Flüsse und Vektorfelder **Bisher:**

Notation: Variable = t = "Zeit"

Lösung = γ = "Ortskurve"

$$(AWP) \begin{cases} \dot{\gamma} = v(t, \gamma) = v_\gamma \\ \gamma(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$v: D \to \mathbb{R}^n, \quad D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

$$(t,x) \longmapsto v(t,x) = v_t(x)$$

"Vektorfeld"

Jetzt betrachte (als Bsp) $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$

und $\begin{cases} \dot{\gamma} = \gamma \\ \gamma(0) = x \end{cases}$

Lösung: $\gamma_x(t) = e^t x$ $\quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ (soweit alles bei Alken)

Das definiert nun aber $\phi_v^t(x) = \gamma_x(t)$ "Fluss von v"

Im Allgemeinen $v: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ stetig mit global. Lipschitzbed.
$(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Dann hat das AWP $\begin{cases} \dot{\gamma} = v_t(\gamma) = v(t,\gamma) \\ \gamma(0) = x \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung γ_x.

Also ist der Fluss $\phi_v: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \longmapsto \gamma_x(t)$ wohldefiniert.
(Für festes t liefert das ein Vektorfeld $\phi_v^t: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

Falls v nicht von t abhängig: $\phi_v^{t+s} = \phi_v^t \circ \phi_v^s$, $(\phi_v^t)^{-1} = \phi_v^{-t}$ und $\phi_v^s \circ \phi_v^t = \phi_v^t \circ \phi_v^s$.

$\longrightarrow$ ϕ_v^t bijektiv und stetig

$\longrightarrow$ Falls $v \in C^k$: ϕ_v^t C^k-Diffeom.!

A1| (a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal lipschitz. und ϕ Lösung von $y' = f(y)$.

$\psi(x) := \phi(x+c)$ ist Lösung, denn: $\psi'(x) = \phi'(x+c) = f(\phi(x+c)) = f(\psi(x))$

Bsp für $\psi \neq \phi$: $f = \mathrm{id}$ also $y' = y$, dann sind $\phi(x) := \exp(x)$ und $\psi(x) := \exp(x+42)$

verschiedene Lösungen 13

(b) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal lipschitz. mit $f(-x,y) = -f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Sei $\varphi: (-r,r) \to \mathbb{R}$, $r > 0$ eine Lösung von $y' = f(x,y)$.

Betrachte zunächst $\psi: (-r,r) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(-x)$. Dann gilt

$$\psi'(x) = \varphi'(-x) = -\varphi'(-x) = -f(-x, \varphi(-x)) = f(x, \varphi(-x)) = f(x, \psi(x))$$

Außerdem ist $\psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0)$ also lösen ψ, φ das AWP

$$\begin{cases} y(0) = \varphi(0) = \psi(0) \\ y' = f(x,y) \end{cases}$$ also folgt $\varphi = \psi$ mit Picard-Lindelöf

13

A2| (a) Sei $\phi: I \to \mathbb{R}^n$ Lösung. Dann ist $\phi'(x) = \underbrace{A(x)\,\phi(x)}_{\in C^1}$.

Also $\phi''(x) = (A(x)\,\phi(x))' = \underbrace{A'(x)\,\phi(x) + A(x)\,\phi'(x)}_{\in C^1}$

Induktiv folgt die Aussage. 13

(b) Sei $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösung von $y' = f(x,y)$. Dann gilt $\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Da $f, \phi \in C^1$ folgt: $\phi''(x) = (f(x,\phi(x)))' \overset{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,\phi(x))} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,\phi(x))} \phi'(x)}_{\text{stetig}}$. Also

$\phi \in C^2$.

13