

Differentialgleichungen höherer Ordnung

Bis jetzt nur DGL erster Ordnung. Was passiert für (z.B.)

$$y'' = y' + 2y + x \quad (1) \quad ?$$

Wie können wir das in der Form $y' = f(x, y)$ schreiben?

Definiere $y_1 := y$, $y_2 := y'$. Dann

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_2 + 2y_1 + x \end{cases} \Leftrightarrow z' = f(x, z) \quad \text{mit} \quad z := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Lineare DGL n-ter Ordnung, $A: I \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^{n \times n}$, $b: I \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \quad \text{betrachte} \quad L(A, b) := \left\{ \alpha: I \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n, \alpha(t) = A(t)\alpha(t) + b(t) \right\}$$

Dann gilt $\rightarrow L(A, 0) \subseteq C^1(I, \mathbb{R}^n)$ n -dim UVR

$\rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L(A, 0)$ l.v. $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I: \alpha_1(t_0), \dots, \alpha_n(t_0)$ l.v. in $\mathbb{R}^n$

$\rightarrow$ Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L(A, 0)$ heißt Fundamentalsystem von $\dot{x} = A(t)x$

A1 a) Sei $v_0 \in \mathbb{R}^n$ bel. Setze $\psi(t) := \Phi(t) \cdot v_0$. Dann ist $\dot{\psi}(t) = \dot{\Phi}(t) \cdot v_0 = A(t) \Phi(t) \cdot v_0 = A(t) \psi(t)$.

b) $\psi(t) := \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau + c$ für $c \in \mathbb{R}^n$. Nun gilt $\dot{\psi}(t) = \Phi^{-1}(t) b(t)$. Also gilt

$$\left(\Phi(t) \psi(t) \right)' = \dot{\Phi}(t) \psi(t) + \Phi(t) \dot{\psi}(t) = \underbrace{\dot{\Phi}(t) \psi(t) + \Phi(t) \Phi^{-1}(t) b(t)}_{= (A\Phi)(t)} = (A\Phi)(t) + b(t)$$

c) $\ddot{x} = \alpha(t)x + \beta(t)x + \gamma(t)$. Setze $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$. Dann folgt

$$\ddot{x} = \alpha(t)x + \beta(t)x + \gamma(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha(t)x_2 + \beta(t)x_1 + \gamma(t) \end{cases} \quad (*)$$

Nun für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ folgt

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta(t) & \alpha(t) \end{pmatrix}}_{=: A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{pmatrix}}_{=: \Gamma(t)}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = A(t)x + \Gamma(t)$$

d) Es ist $\dot{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) & \ddot{\psi}(t) \end{pmatrix}$ und $A(t)\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta(t) & \alpha(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \beta(t)\varphi(t) + \alpha(t)\dot{\varphi}(t) & \beta(t)\dot{\varphi}(t) + \alpha(t)\dot{\psi}(t) \end{pmatrix}$$

φ, ψ hom. Lsg von (4)

$$\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) & \ddot{\psi}(t) \end{pmatrix} = \dot{\Phi}(t)$$

Also $\Phi(t)$ Fundamentallösung, wenn $\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}$ l.u. $\forall t$.

A2 Es gilt $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ und $\Phi(t)$ invertierbar. Also berechne

$$A(t) = \dot{\Phi}(t) \Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 2t-t^2 & t-1 \end{pmatrix}$$

Die Lsg $u(t)$ berechne mit A1 b). $u(t) = \Phi(t) \left[\int_0^t \Phi^{-1}(s) b(s) ds + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: c} \right]$

* Wir setzen $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, nach (b) ist das auch eine Lsg und da $\Phi(0) = \mathbb{1}$ folgt $u(0) = \mathbb{1}c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2-t+1 \end{pmatrix} \left[\int_0^t \begin{pmatrix} 1-s \\ s \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + 2t + 1 \\ \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}$$