VL Woche 2.6. Kurven II

- $\gamma : [a,b] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$ stückw. stetig diff'bar
  $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\exists\ Z = (a = t_0, \dots, t_n = b)$ s.d. $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ stetig diff'bar

$\Rightarrow$ γ auch rektifizierbar in natürl. Weise

<u>Wozu das alles?</u>: Kurvenintegrale!

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$, $\gamma : [a,b] \xrightarrow{C^1} D$

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\ \underbrace{|\gamma'(t)|\, dt}_{\text{"}= ds\text{"}}$$

Vektorfelder $v : D \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$

Standardskalarprodukt

$$\int_\gamma v \cdot dx := \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\, dt$$

Besonders schöne Vektorfelder: $v : D \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt Gradientenvektorfeld
$\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\exists\ f : D \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x) = v(x) \quad \forall x \in D$

f heißt Potential.

"f besitzt Stammfunktion"

$\rightarrow$ $v = \nabla f : D \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$, $\gamma : [a,b] \xrightarrow{C^1} D$. Dann gilt

$$\int_\gamma v \cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

- $v: D \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$ konservativ $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ $\forall$ Wege $\gamma: [a,b] \xrightarrow[\text{stückw.}]{C^1} D$: $\int_\gamma v \cdot dx$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab.

A1 $E := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}_{=: g(x,y,z)} = 1 \}$

Gesu. maximales Volumen durch eingeschriebenen achsenparallelen Quader definiert durch $x,y,z > 0$.

Dann ist $V(x,y,z) = (2x)(2y)(2z) = 8xyz$. Es ist $g, V \in C^1$ also

Lagrange: Für Extremum in (x,y,z) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.d.

$$\nabla V = \lambda \nabla g, \text{ also } \begin{pmatrix} 4yz \\ 4xz \\ 4xy \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} x/a^2 \\ y/b^2 \\ z/c^2 \end{pmatrix}$$

Falls $\lambda = 0 \Rightarrow yz = xz = xy = 0$ $\lightning$ zu $x,y,z > 0$.

Also $\lambda \neq 0$. Es folgt $x = \frac{4yza^2}{\lambda} \Rightarrow 4z \frac{4yza^2}{\lambda} = \lambda \frac{y}{b^2} \overset{y \neq 0}{\Rightarrow} z^2 = \frac{\lambda^2}{16a^2b^2}$

$\overset{z>0}{\Rightarrow} z = \frac{\lambda}{4ab}$

analog: $x = \frac{\lambda}{4bc}$ $y = \frac{\lambda}{4ac}$.

$$g(x,y,z) \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}\left(\frac{\lambda}{4bc}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\lambda}{4ac}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\lambda}{4ab}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{4abc}{\sqrt{3}}$$

Mögl. Extremum: $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$

Es ist $E \cap \{x,y,z \geq 0\}$ kompakt und $x=y=z=0$ glob. Min. von V

$\Rightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ ist glob. Max von V auf E.

$$\Rightarrow V_{max} = 8 \frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

A2) a) div $v = -z\left(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$

rot $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha - 1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Aus $v = \nabla f$ folgt rot $v = 0$, d.h. nur für $\alpha = 1$ möglich.

Dann $f(x,y,z) = z \log(xy)$ erfüllt $\nabla f = v$.

c) Fall 1: $\alpha = 1$: v Potentialfeld und $\gamma(-1) = \gamma(1) \Rightarrow \int_\gamma v \cdot dx = 0$

Fall 2 $\alpha = 0$: also $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/y \\ \log(xy) \end{pmatrix}$ also $v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\pi t) \\ t^2 \end{pmatrix}$

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2te^{t^2} \\ 0 \\ \pi\cos(\pi t) \end{pmatrix}$. Es folgt $\langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \pi t^2 \cos(\pi t)$.

Also $\int_\gamma v \cdot dx = \int_{-1}^{1} \pi t^2 \cos(\pi t) = \underbrace{\pi t^2 \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\Big|_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} 2\pi t \frac{\sin(\pi t)}{\pi} dt$

$= \frac{2}{\pi} t \cos(\pi t)\Big|_{-1}^{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} -\frac{2}{\pi}\cos(\pi t)\, dt}_{=0}$

$= \frac{2}{\pi}(-1) - \frac{2}{\pi}(-1)(-1)$

$= -\frac{4}{\pi}$